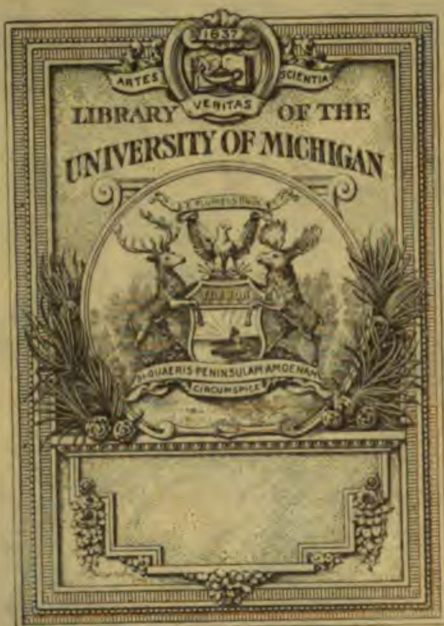
JOHANNES KNOBLAUCH

GRUNDLAGEN DER DIFFERENTIALGEOMETRIE


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

GRUNDLAGEN

DER

DIFFERENTIALGEOMETRIE.

VON

JOHANNES KNOBLAUCH.



LEIPZIG UND BERLIN,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1913.

Vorwort.

Seit vielen Jahren hat sich die Erkenntnis vorbereitet, daß die Aufgaben der Differentialgeometrie nicht mit den gewöhnlichen Methoden der Analysis behandelt werden dürfen, wenn nicht schon nach wenigen Schritten der Überblick über die Formeln und vor allem auch der Zusammenhang mit der Geometrie verloren gehen soll. Die Differentiationen sind vielmehr durch andere, mit der Natur der Gebilde enger verknüpfte Operationen, die ich geometrische Differentiationen nenne, zu ersetzen, wobei als weitere Forderung hinzugefügt werden muß, die unabhängigen Variablen völlig allgemein zu lassen. Eine systematische Darstellung der Elemente der Differentialgeometrie für diese Behandlungsweise ist bis jetzt nicht gegeben worden. Denn auch Ricci, dessen zahlreiche und grundlegende Arbeiten, namentlich die zusammenfassenden Lezioni sulla teoria delle superficie (Padova 1898), hier besonders hervorgehoben sein mögen, stellt meist nicht die geometrischen Ableitungen selbst, sondern ihre Koeffizientensysteme an die Spitze.

In meiner Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen (Leipzig 1888) hatte ich die Absicht ausgesprochen, eine vollständige Übersicht über die flächentheoretische Literatur zu geben. Eine genauere Beschäftigung mit dem Gegenstande zeigte bald, daß die darauf zu verwendende Mühe sich nicht lohnen würde. Was dagegen von großem Nutzen wäre, das ist, obgleich die Differentialgeometrie noch in ihren Anfängen steckt, eine kritische Darstellung der geschichtlichen Entwickelung dieser Disziplin im 18. und 19. Jahrhundert. Das kurze Literaturverzeichnis auf S. 607—614 des vorliegenden Buches dient diesem Zwecke nicht. Es soll vielmehr in erster Linie den, der mit der Differentialgeometrie noch nicht vertraut ist, auf wichtige Originalarbeiten hinweisen; es führt ferner eine Anzahl von Stellen auf, in denen sich der Text des Buches ausdrücklich an andere bereits vorliegende Darstellungen anschließt. Dabei sind allerdings bestimmte, als klassisch zu betrachtende Auseinandersetzungen, die sich bereits in

vielen Arbeiten fast übereinstimmend vorfinden, nicht besonders erwähnt worden, und ebensowenig ist die Literatur über die elementare Theorie der quadratischen Formen zitiert, die für die Differentialgeometrie zwar sehr wichtig ist, aber immerhin nur den Wert eines Hilfsmittels hat. Obwohl ich bemüht gewesen bin, überall bis zu den Quellen vorzudringen, so sollen doch Prioritäten durch das Literaturverzeichnis weder festgestellt noch abgesprochen werden.

Die wenigen Bezeichnungs-Änderungen, die sich seit 1888 als notwendig herausgestellt haben, bedürfen für den Kenner keiner Begründung.

Berlin, Mai 1913.

J. Knoblauch.

Inhalt.

I. Abschnitt.

Einführung in die Theorie der Raumkurven.

II. Abschnitt.

Grundbegriffe und Grundformeln der Flächentheorie.

III. Abschnitt.

Die Normalkrümmung und das Krümmungsmaß.

IV. Abschnitt.

Grundformeln der Theorie der Tangentialkrümmung.

V. Abschnitt.

Grundlagen der Theorie der binären Differentialformen.

Seite

VI. Abschnitt.

Die drei Fundamentalgleichungen.

VII. Abschnitt.

Besondere Kurven und Koordinatensysteme auf einer Fläche.

VIII. Abschnitt.

Die Einheitskugel.
Einführung in die Theorie der Strahlensysteme.
Geradlinige Flächen.

IX. Abschnitt.

Spezielle Flächen, die mit einer gegebenen zusammenhängen.

Seite

X. Abschnitt.
Aufgaben der Biegungstheorie.

XI. Abschnitt.
Allgemeine Theorie der Kurven und Kurvennetze auf einer Fläche.

I. Abschnitt.

Einführung in die Theorie der Raumkurven.

§ 1.

Die verschiedenen Darstellungen einer Raumkurve.

Gegenstand der Differentialgeometrie ist die Untersuchung geometrischer Gebilde mittels der Analysis. Von diesen Gebilden wird im Folgenden angenommen, daß sie auf ein dreiachsiges, rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen seien. Stellt man sich vor, daß die x-Achse und die y-Achse des Systems in einer horizontalen Ebene liegen, so möge die positive z-Achse senkrecht nach oben gerichtet sein, und für einen Beobachter, der auf der (xy)-Ebene stehend nach der Richtung der positiven x-Achse hin blickt, die positive y-Achse zur Linken liegen. Die Aussage, ein Punkt A habe die kartesischen Koordinaten x, y, z, wird durch

$$A \equiv (xyz)$$

wiedergegeben werden.

Setzt man die Koordinaten gleich ebensovielen reellen, eindeutigen, endlichen und stetigen Funktionen eines reellen Parameters t, so stellen die entstehenden Gleichungen

$$\text{(I)} \qquad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

wenn t alle Werte eines gewissen Bereiches durchläuft, eine einfache Mannigfaltigkeit von Punkten dar. Als Stück einer Raumkurve oder als Raumkurve schlechthin darf ein solches Gebilde dann bezeichnet werden, wenn in seinen einzelnen Punkten, im allgemeinen wenigstens, von einer Tangente die Rede sein kann. Den genannten Eigenschaften der Funktionen $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ soll demnach von vornherein die der einmaligen Differentiierbarkeit hinzugefügt werden. Andere geometrische Vorstellungen werden es nötig machen, die Existenz höherer Ableitungen anzunehmen; mit Rücksicht hierauf sei ein für allemal bemerkt, daß von dem Funktionensystem immer alle die Eigenschaften vorausgesetzt werden sollen, deren Einführung der Gang der jeweiligen Untersuchung als notwendig oder zweckmäßig erscheinen läßt.

Man kann von der Hilfsvariablen t absehen, indem man eine Raumkurve durch zwei Gleichungen zwischen kartesischen Koordinaten

$$\text{(II)} \qquad F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0$$

darstellt, wo die Funktionen F und G inbezug auf ihre drei Argumente x, y, z entsprechende Eigenschaften haben sollen wie die drei Funktionen in der Darstellung (I) hinsichtlich des Parameters t. Die Kurve erscheint dann als Durchschnitt zweier Flächen. Ist das geometrische Gebilde ursprünglich in der Form (I) gegeben, und sind $x(t), y(t), z(t)$ z. B. rationale Funktionen ihres Argumentes, so kann man von (I) zu (II) dadurch übergehen, daß man t aus den Gleichungen (I) auf algebraischem Wege eliminiert. Umgekehrt läßt sich eine gegebene Darstellung (II) auf unendlichviele Weisen durch eine von der Form (I) ersetzen. Die drei Funktionen $x(t), y(t), z(t)$ sind zu diesem Zweck nur so zu wählen, daß sie die beiden Gleichungen (II) für alle in Betracht kommenden Werte von t identisch erfüllen. Ob die beiden Gleichungssysteme (I) und (II) sich gegenseitig genau ersetzen, nachdem man eines von ihnen durch bestimmte Rechnungsoperationen aus dem anderen abgeleitet hat, ist in jedem speziellen Falle sorgfältig zu prüfen.

In der allgemeinen Theorie der Raumkurven, die hier jedoch nur so weit behandelt werden soll, wie sie für die Theorie der krummen Flächen gebraucht wird, ist es schon aus Gründen der Symmetrie zweckmäßig, die analytische Darstellung (I) zugrunde zu legen. Für Kurven von besonderen Eigenschaften dagegen kann es vorteilhafter sein, von den Gleichungen (II) auszugehen. So z. B. wenn die krumme Linie als eben vorausgesetzt wird; die eine der beiden Funktionen $F(x, y, z)$ und $G(x, y, z)$ ist dann vom ersten Grade. Namentlich aber würde eine Untersuchung der algebraischen Kurven sich auf die Darstellung (II) stützen müssen, weil die Definition solcher Kurven auf ihr beruht. Denn eine Raumkurve heißt dann algebraisch, wenn sie durch zwei algebraische Gleichungen zwischen kartesischen Koordinaten dargestellt werden kann.

Die algebraischen Raumkurven können nach dem Grade, d. h. nach der Anzahl ihrer Schnittpunkte mit einer beliebigen Ebene eingeteilt werden. Nach einem Satze der Algebra ist z. B. die durch die Gleichungen

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$$

bestimmte Raumkurve vom vierten Grade. Sie erscheint als Durchschnitt einer Kugel vom Radius a mit einem durch den Kugelmittelpunkt gehenden Kreiszylinder, dessen Grundkreis den Radius $\frac{a}{2}$ hat. Wird die zweite Gleichung durch die beiden

$$x - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\cos t, \qquad y = \frac{a}{2}\sin t$$

ersetzt, so liefert die erste

$$z = \pm a \sin\frac{t}{2}.$$

Es reicht aus, t das Intervall $(0 \ldots 2\pi)$ durchlaufen zu lassen. Beschränkt man sich dann, wie es der Symmetrie wegen zulässig ist, auf die Punkte oberhalb der (xy)-Ebene, d. h. auf solche, deren z-Koordinate positiv ist, so wird die Darstellung (I) für dieses Beispiel

$$x = a\cos^2\frac{t}{2}$$

$$y = a\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$$

$$z = a\sin\frac{t}{2}.$$

Hieraus können noch die transzendenten Funktionen Sinus und Kosinus entfernt werden. Für

$$\operatorname{tg}\frac{t}{4} = u$$

wird nämlich

$$x = a\left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2$$

$$y = 2a\frac{u(1-u^2)}{(1+u^2)^2}$$

$$z = 2a\frac{u}{1+u^2},$$

d. h. die Koordinaten der betrachteten Kurve lassen sich als rationale Funktionen eines Parameters u darstellen.

§ 2.

Tangente und Normalebene, Schmiegungsebene und Binormale.

Die Tangente einer Kurve in einem Punkte A wird bekanntlich als die gerade Linie erklärt, der eine durch A gehende Sekante zustrebt, wenn ihr zweiter Schnittpunkt mit der Kurve sich diesem Punkte bis zum Zusammenfallen nähert. Nach der Methode des Unendlichkleinen kann diese Gerade als Verbindungslinie des Punktes

$A \equiv (xyz)$ mit dem ihm auf der Kurve unendlich nahe liegenden Punkte $B \equiv (x + dx, y + dy, z + dz)$ aufgefaßt werden. Ihre Richtungskosinus sind

(1) $$a = \frac{dx}{ds}, \quad b = \frac{dy}{ds}, \quad c = \frac{dz}{ds},$$

wenn ds das Bogenelement der Kurve, nämlich den durch die Gleichung

(2) $$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

bestimmten unendlichkleinen Abstand der beiden Punkte A und B bedeutet. ds soll als absolute Größe betrachtet werden. Versteht man also unter der Quadratwurzel aus einer reellen positiven Größe den positiven Wert, so ist

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

zu setzen.

Die drei, durch die Formeln (1) gegebenen Richtungskosinus hängen dem Vorzeichen nach noch von dem sogenannten Prinzip des Fortganges auf der Kurve ab. Um nämlich, unter Voraussetzung der Darstellung (I), auf der Raumkurve von A nach B überzugehen, kann man t entweder wachsen oder abnehmen lassen, d. h. wenn B zu dem Werte $t + dt$ des Parameters gehört, dt positiv oder negativ annehmen. Wird nun

$$dx = x'dt, \quad dy = y'dt, \quad dz = z'dt$$

gesetzt, so ist, wenn $\varepsilon = \pm 1$ das Vorzeichen von dt bedeutet, also

$$\varepsilon dt > 0$$

ist,

$$ds = \varepsilon dt \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2},$$

und weiter

(3) $$a = \frac{\varepsilon x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}, \ldots .$$

Die Gleichungen der Tangente in laufenden Koordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ sind

(4) $$\frac{\mathfrak{x} - x}{a} = \frac{\mathfrak{y} - y}{b} = \frac{\mathfrak{z} - z}{c}$$

oder

(5) $$\frac{\mathfrak{x} - x}{dx} = \frac{\mathfrak{y} - y}{dy} = \frac{\mathfrak{z} - z}{dz}.$$

Wird die Kurve durch das Gleichungspaar (II) definiert, so genügen die Differentiale dx, dy, dz den Bedingungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial y} dy + \frac{\partial G}{\partial z} dz = 0,$$

und die Gleichungen der Tangente nehmen daher die Form an

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(\mathfrak{x}-x)+\frac{\partial F}{\partial y}(\mathfrak{y}-y)+\frac{\partial F}{\partial z}(\mathfrak{z}-z)=0 \\ \frac{\partial G}{\partial x}(\mathfrak{x}-x)+\frac{\partial G}{\partial y}(\mathfrak{y}-y)+\frac{\partial G}{\partial z}(\mathfrak{z}-z)=0. \end{aligned}$$

Die Bedeutung jeder dieser Gleichungen für sich kann erst später (§ 14) angegeben werden.

Alle zur Tangente in A senkrechten Geraden liegen in einer Ebene, der **Normalebene** der Kurve in dem betrachteten Punkte. Ihre Gleichung ist

$$(7)\qquad a(\mathfrak{x}-x)+b(\mathfrak{y}-y)+c(\mathfrak{z}-z)=0$$

oder für die Darstellung (II)

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x}-x, & \mathfrak{y}-y, & \mathfrak{z}-z \\ \frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{\partial F}{\partial y}, & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x}, & \frac{\partial G}{\partial y}, & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}=0.$$

Nimmt man zu den beiden benachbarten Punkten A und B der Kurve noch einen dritten, dem Punkte B unendlichnahen C hinzu, so kann man sich im allgemeinen durch A, B und C eine Ebene bestimmt denken. Sie heißt die **Schmiegungsebene** der Kurve für den Punkt A. Die Koordinaten von C werden aus denen von B nach derselben Rechnungsvorschrift abgeleitet, wie die von B aus den Koordinaten von A, d. h. die erste von ihnen wird

$$x+dx+d(x+dx)\equiv x+2dx+d^2x.$$

Die Gleichung der Schmiegungsebene ist demnach

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x}-x, & \mathfrak{y}-y, & \mathfrak{z}-z \\ dx, & dy, & dz \\ d^2x, & d^2y, & d^2z \end{vmatrix}=0$$

oder, wenn

$$(10)\qquad \begin{aligned} dy\,d^2z-dz\,d^2y=P \\ dz\,d^2x-dx\,d^2z=Q \\ dx\,d^2y-dy\,d^2x=R \end{aligned}$$

gesetzt wird,

$$(11)\qquad P(\mathfrak{x}-x)+Q(\mathfrak{y}-y)+R(\mathfrak{z}-z)=0.$$

Um die Koeffizienten P, Q, R in endliche Größen überzuführen, hat man sie durch dt^3 zu dividieren.

Die Normale der Schmiegungsebene heißt die **Binormale** der Kurve. Durch diese Benennung soll angedeutet werden, daß die Gerade auf zwei Tangenten, nämlich den beiden benachbarten AB und BC, senkrecht steht. Die Gleichungen der Binormale sind

$$\frac{\mathfrak{x}-x}{P}=\frac{\mathfrak{y}-y}{Q}=\frac{\mathfrak{z}-z}{R}, \tag{12}$$

und ihre Richtungskosinus haben für $\varepsilon' = \pm 1$ die Werte

$$\frac{\varepsilon' P}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}},\quad \frac{\varepsilon' Q}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}},\quad \frac{\varepsilon' R}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}.$$

Die positive Richtung der Binormale soll im nächsten Paragraphen bestimmt werden.

§ 3.

Krümmung, Hauptnormale, rektifizierende Ebene.

Einer der wichtigsten Begriffe der Geometrie ist der der Krümmung einer Kurve in einem gegebenen Punkte. Sie kann als Krümmung eines Kreises erklärt werden, der durch den Punkt A und zwei ihm unendlichnahe, B und C, hindurchgeht. Dieser Kreis, der **Krümmungskreis**, liegt also ganz in der Schmiegungsebene des Punktes A. Sein Mittelpunkt heißt der **Krümmungsmittelpunkt**, sein Radius der **Krümmungsradius**, und dessen reziproker Wert die **Krümmung** der Kurve für den Punkt A.

Der Krümmungskreis kann auf unendlichviele Weisen als Durchschnitt der Schmiegungsebene

$$P(\mathfrak{x}-x)+Q(\mathfrak{y}-y)+R(\mathfrak{z}-z)=0$$

mit einer Kugel

$$(\mathfrak{x}-\xi)^2+(\mathfrak{y}-\eta)^2+(\mathfrak{z}-\zeta)^2=r^2$$

betrachtet werden. Die Bedingungen dafür, daß die Kugel die drei Punkte A, B, C enthält, ergeben sich durch Zusammenstellung der Gleichung

$$(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2=r^2 \tag{1}$$

mit den beiden, die aus ihr durch Bildung des ersten und zweiten Differentials hervorgehen, wobei x, y, z als veränderlich, ξ, η, ζ und r als konstant zu behandeln sind. Diese Gleichungen lauten:

$$(x-\xi)\,dx+(y-\eta)\,dy+(z-\zeta)\,dz=0 \tag{2}$$

$$(x-\xi)\,d^2x+(y-\eta)\,d^2y+(z-\zeta)\,d^2z=-\,ds^2. \tag{3}$$

Die Bestimmung der Kugel werde nun durch die Vorschrift vervollständigt, daß ihr Mittelpunkt in der Schmiegungsebene liegen soll.

Der gesuchte Kreis wird dann ein Hauptkreis der Kugel, und der Krümmungsmittelpunkt und der Krümmungsradius fallen mit dem Mittelpunkt und dem Radius der Kugel selbst zusammen. Sind aus der somit hinzutretenden Bedingung

(4) $$(x-\xi)P+(y-\eta)Q+(z-\zeta)R=0$$

in Verbindung mit (2) und (3) die Koordinaten ξ, η, ζ des Krümmungsmittelpunktes bestimmt, so liefert die Gleichung (1) den Wert von r.

Die Auflösung des Systems (2, 3, 4) ergibt

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ P & Q & R \end{vmatrix}(\xi-x)=\begin{vmatrix} 0 & dy & dz \\ ds^2 & d^2y & d^2z \\ 0 & Q & R \end{vmatrix},$$

d. h.

$$(P^2+Q^2+R^2)(\xi-x)=ds^2(Qdz-Rdy),$$

(5) $$\xi=x+\frac{(Qdz-Rdy)\,ds^2}{P^2+Q^2+R^2}$$
$$\eta=y+\frac{(Rdx-Pdz)\,ds^2}{P^2+Q^2+R^2}$$
$$\zeta=z+\frac{(Pdy-Qdx)\,ds^2}{P^2+Q^2+R^2}.$$

Bildet man jetzt $(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2$ und benutzt die Identität

(6) $$(Qdz-Rdy)^2+(Rdx-Pdz)^2+(Pdy-Qdx)^2= (P^2+Q^2+R^2)(dx^2+dy^2+dz^2)-(Pdx+Qdy+Rdz)^2,$$

wobei auf Grund der Definition von P, Q, R

(7) $$Pdx+Qdy+Rdz\equiv 0$$

ist, so erhält man aus (1):

(8) $$r^2=\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)^3}{P^2+Q^2+R^2}.$$

Der Krümmungsradius soll stets als absolute Größe betrachtet werden. Dann ist also

(9) $$r=\frac{ds^3}{\sqrt{P^2+Q^2+R^2}}.$$

Dreigliedrige Summen wie $dx^2+dy^2+dz^2$, $P^2+Q^2+R^2$, $Pdx+Qdy+Rdz$ kommen in der analytischen Geometrie des Raumes und besonders in der Differentialgeometrie ungemein häufig vor, so daß es zweckmäßig ist, sie abgekürzt zu bezeichnen. Ist f

irgend ein aus x, y, z und deren Differentialen zusammengesetzter Ausdruck, und gehen g und h durch zyklische Vertauschung von x, y, z aus f hervor, so möge

$$f + g + h = \Sigma f$$

gesetzt werden. Überall, wo das Summenzeichen ohne weiteren Zusatz benutzt wird, soll es diese Bedeutung haben. Die Identität (6) z. B. läßt sich mittels dieser Bezeichnung in der Gestalt

$$\Sigma(Q dz - R dy)^2 = (\Sigma P^2)(\Sigma dx^2) - (\Sigma P dx)^2$$

schreiben. Enthält der Ausdruck f noch andere Größen, die einzeln oder gruppenweise den Koordinaten x, y, z zugeordnet sind, so wird bei der Bildung der Summe vorausgesetzt, daß sie gleichzeitig mit den Koordinaten zyklisch vertauscht werden. Hiernach kann man beispielsweise

$$\sum \frac{x^2}{p^2}$$

für

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} + \frac{z^2}{r^2}$$

setzen.

Die Gleichung (2), die nach Division mit ds die Form

$$a(\xi - x) + b(\eta - y) + c(\zeta - z) = 0$$

annimmt, besagt nach § 2 (7), daß der Krümmungsmittelpunkt der Normalebene angehört, also auf der Geraden liegt, in der diese Ebene von der Schmiegungsebene geschnitten wird. Diese Kurvennormale wird Hauptnormale genannt. Ihre positive Richtung, zu der die Kosinus a'', b'', c'' gehören sollen, gehe von dem Kurvenpunkte $(xyz) \equiv A$ nach dem Krümmungsmittelpunkte $(\xi\eta\zeta) \equiv M$, d. h. es sei

$$a'' = \frac{\xi - x}{r}, \quad b'' = \frac{\eta - y}{r}, \quad c'' = \frac{\zeta - z}{r}$$

oder, nach (5) und (9),

(10)
$$a'' = \frac{Q dz - R dy}{ds\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}$$
$$b'' = \frac{R dx - P dz}{ds\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}$$
$$c'' = \frac{P dy - Q dx}{ds\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}.$$

Nach (6) kann man auch

(11)
$$a'' = \frac{Q dz - R dy}{\sqrt{\Sigma(Q dz - R dy)^2}}, \ldots$$

setzen, und ferner:

$$(12)\qquad \begin{aligned} Q\,dz - R\,dy &= d^2x(dy^2 + dz^2) - dx(dy\,d^2y + dz\,d^2z) \\ &= d^2x\,\Sigma dx^2 - dx\,\Sigma dx\,d^2x \\ &= ds(d^2x\,.\,ds - dx\,.\,d^2s). \end{aligned}$$

Der letzte dieser Ausdrücke ergibt sich bei Benutzung der Gleichung § 2 (2) und ihres Differentials.

Die Tangente, Binormale und Hauptnormale bilden in jedem Punkte A ein System von drei aufeinander senkrechten Achsen, das seine Lage ändert, wenn A die Kurve durchläuft. Stellt man die Achsen paarweise zusammen, so bestimmen sie drei Ebenen: die Schmiegungsebene, der die Tangente und die Hauptnormale angehören, die Normalebene, in welcher Hauptnormale und Binormale liegen, und die durch Tangente und Binormale definierte Ebene, die aus einem später (§ 88) anzugebenden Grunde als rektifizierende Ebene der Kurve bezeichnet wird.

Die positiven Richtungen t der Tangente, b der Binormale und h der Hauptnormale sollen so gewählt werden, daß wenn man sich die Anfangspunkte des beweglichen und des im Raume festen Achsensystems zusammenfallend denkt, die beweglichen Achsen, in der Reihenfolge t, b, h genommen, auch den positiven Richtungen nach mit den festen Achsen, in der Folge x, y, z, zur Deckung gebracht werden können. Es sollen also die beiden Dreikante t, b, h und x, y, z gleichen Sinnes oder, wie man sagt, einander äquivalent sein,

$$t, b, h \sim x, y, z.$$

Wenn dann a', b', c' die bis auf ein Vorzeichen bereits im § 2 bestimmten Richtungskosinus der Binormale bezeichnen, so ist

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = +1,$$

und jedes Element der Determinante dritten Grades ist gleich der zugehörigen Unterdeterminante, z. B.

$$(14)\qquad a' = cb'' - bc''.$$

Für die Kosinus der positiven Richtung der Binormale ergeben sich hiernach die Ausdrücke

$$(15)\qquad \begin{aligned} a' &= \frac{-P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}} \\ b' &= \frac{-Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}} \\ c' &= \frac{-R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}. \end{aligned}$$

Sie sind, wie auch leicht durch Ausrechnung geprüft werden kann, vom Fortgangsprinzip abhängig, während das Vorzeichen von dt auf die Richtungskosinus der Hauptnormale keinen Einfluß hat.

§ 4.

Krümmungsachse, Kontingenzwinkel.

Denkt man sich in den Gleichungen (2, 3) des vorigen Paragraphen statt ξ, η, ζ laufende Koordinaten gesetzt, so bestimmt dieses Gleichungspaar eine gerade Linie, deren Richtungskosinus den Verbindungen

$$dy\,d^2z - dz\,d^2y, \quad dz\,d^2x - dx\,d^2z, \quad dx\,d^2y - dy\,d^2x,$$

d. h. den Größen

$$P, \quad Q, \quad R$$

proportional sind, und die daher der Binormale parallel oder auf der Schmiegungsebene senkrecht ist. Da (3) aus (2) durch Differentialbildung hervorgeht, die Gleichung (2) aber, immer für laufende Koordinaten ξ, η, ζ, die Normalebene in A darstellt, so kann die betrachtete Gerade als Durchschnitt dieser Ebene mit der unendlichnahen Normalebene aufgefaßt werden. Die Gerade heißt die Krümmungsachse der Kurve für den Punkt A. Nach der ursprünglichen Bedeutung der Relationen (2, 3), als Bedingungsgleichungen für die Koordinaten von M, liegt der Krümmungsmittelpunkt auf der Krümmungsachse. Es ist der Punkt, in dem die Krümmungsachse auf der Schmiegungsebene senkrecht steht.

Nun konnte die Gleichung (2) nach Division mit ds in der Form

$$(x-\xi)a + (y-\eta)b + (z-\zeta)c = 0$$

geschrieben werden. Nimmt man ihr Differential hinzu und sucht wieder die Richtungskosinus der Krümmungsachse, also a', b', c', durch die Koeffizienten beider Gleichungen auszudrücken, so findet man sie proportional den Verbindungen

$$b\,dc - c\,db, \quad c\,da - a\,dc, \quad a\,db - b\,da,$$

die jetzt an die Stelle von P, Q, R treten. Andererseits waren a', b', c', vom Vorzeichen abgesehen, gleich

$$bc'' - cb'', \quad ca'' - ac'', \quad ab'' - ba''.$$

Zwischen den Richtungskosinus a'', b'', c'' der Hauptnormale und den Differentialen der Richtungskosinus der Tangente müssen hiernach einfache Beziehungen gelten. Man findet sie mit Hilfe der Formel (12)

des vorigen Paragraphen fast unmittelbar, wenn man direkt da, db, dc ansetzt.

Es ist nämlich

$$da = d\frac{dx}{ds} = \frac{ds\,d^2x - dx\,d^2s}{ds^2} = \frac{Q\,dz - R\,dy}{ds^3}.$$

Entnimmt man nun aus § 3 (10)

$$Qdz - Rdy = a''ds\sqrt{\Sigma P^2}$$

und aus (9)

$$\sqrt{\Sigma P^2} = \frac{ds^3}{r}$$

und setzt

$$\frac{1}{r} = k,$$

wo k die Krümmung bezeichnet, so erhält man

$$da = ka''ds.$$

Die drei zusammengehörigen Formeln heißen

(1) $$\frac{da}{ds} = ka'', \quad \frac{db}{ds} = kb'', \quad \frac{dc}{ds} = kc'',$$

und hierin ist also

(2) $$k = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{ds^3}$$

oder

$$k = \frac{\sqrt{\Sigma P^2}}{(\sqrt{\Sigma dx^2})^3}.$$

Die Krümmung kann noch auf andere Weise erklärt werden als mittels des Krümmungskreises, nämlich durch einen Ausdruck, der geeignet ist, die Abweichung der krummen Linie von einer geraden, der Tangente, zu messen. Man versteht unter dem Kontingenzwinkel der Kurve im Punkte A den unendlich kleinen Winkel zwischen der Tangente in A und der Tangente im benachbarten Punkte B, oder vielmehr, wie in der Analysis immer, den Bogen eines Kreises vom Radius Eins, der zu dem Winkel als Zentriwinkel gehört. Der Kontingenzwinkel $d\omega$ kann auch als der unendlich kleine Winkel benachbarter Normalebenen bezeichnet werden. Nennt man das Verhältnis von $d\omega$ zu dem Bogenelement ds die Krümmung der Kurve, so hat man die Übereinstimmung dieser Definition mit der früheren nachzuweisen.

Es seien A_0 und B_0 die Endpunkte des unendlichkleinen Kreisbogens $d\omega$, so ist, wenn der Mittelpunkt des Kreises mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammenfällt,

$$A_0 \equiv (a, b, c), \qquad B_0 \equiv (a + da,\ b + db,\ c + dc),$$

also

(3) $$d\omega^2 = da^2 + db^2 + dc^2.$$

Nachdem nun einmal da, db, dc einzeln berechnet worden sind, findet man sofort

$$d\omega^2 = k^2(a''^2 + b''^2 + c''^2)ds^2,$$

d. h. wegen $\Sigma a''^2 = 1$:

$$d\omega^2 = k^2 ds^2,$$

mithin in der Tat

(4) $$\frac{d\omega}{ds} = k,$$

wenn $d\omega$, ebenso wie ds, als absolute Größe betrachtet wird.

Die Gleichungen (1) können hiernach auch in die Form

(5) $$\frac{da}{d\omega} = a'', \quad \frac{db}{d\omega} = b'', \quad \frac{dc}{d\omega} = c''$$

gesetzt werden.

§ 5.

Windung und ganze Krümmung.

Ist eine Raumkurve nicht eben, so kann man ihre Abweichung von einer Ebene in ähnlicher Weise messen wie die Abweichung von einer Geraden. Es sei $d\omega'$ der unendlichkleine Winkel der Schmiegungsebene im Punkte A mit der benachbarten. Dieser Winkel, der mit $d\omega'$ bezeichnet werden möge, heißt der Windungswinkel (Torsionswinkel), sein Verhältnis zum Bogenelement die Windung (Torsion) der Kurve.

Da $d\omega'$ mit dem unendlichkleinen Winkel benachbarter Binormalen identisch ist, so hat man, der Formel (2) für $d\omega$ im vorigen Paragraphen entsprechend,

(1) $$d\omega'^2 = da'^2 + db'^2 + dc'^2.$$

Aus § 3 (15) folgt nun

$$da' = -d\frac{P}{\sqrt{\Sigma P^2}} = \frac{P\Sigma P dP - dP\Sigma P^2}{(\sqrt{\Sigma P^2})^3}$$

$$= \frac{Q(PdQ - QdP) - R(RdP - PdR)}{(\Sigma P^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

In db' und dc' erscheint außer den Verbindungen $PdQ - QdP$ und $RdP - PdR$ noch

$$QdR - RdQ = Q(dx\,d^2y - dy\,d^2x) - R(dz\,d^2x - dx\,d^2z)$$
$$= dx(Pd^2x + Qd^2y + Rd^2z) - d^2x(Pdx + Qdy + Rdz),$$

wo der Koeffizient von d^3x identisch verschwindet (§ 3 (7)). Wird

(2) $$\Sigma P d^3 x \equiv \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = D$$

gesetzt, so heißen die Formeln, die zur Berechnung von $d\omega'$ gebraucht werden,

(3) $$\begin{aligned} QdR - RdQ &= Ddx \\ RdP - PdR &= Ddy \\ PdQ - QdP &= Ddz, \end{aligned}$$

und es wird

(4) $$da' = \frac{D(Qdz - Rdy)}{(\Sigma P^2)^{\frac{3}{2}}}, \ldots$$

$$d\omega'^2 = \frac{D^2 ds^2}{(\Sigma P^2)^2}.$$

Während der Kontingenzwinkel als absolute Größe definiert worden ist, soll der Windungswinkel und demnach auch die Windung ein Vorzeichen haben, das sich nach dem von D richtet. Es soll nämlich

(5) $$d\omega' = \frac{D\,ds}{\Sigma P^2}$$

gesetzt werden. Für die Windung

(6) $$\frac{d\omega'}{ds} = k'$$

ergibt sich hiernach die Formel

(7) $$k' = \frac{1}{\Sigma(dy\,d^2z - dz\,d^2y)^2} \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}.$$

In (4) sind aufs neue die Zähler der Ausdrücke für die Richtungskosinus der Hauptnormale (§ 3 (10)) aufgetreten. Führt man diese Kosinus selbst ein und benutzt die Gleichung (7), nämlich

$$k' = \frac{D}{\Sigma P^2},$$

so erhält man

(8) $$\frac{da'}{ds} = k'a'', \quad \frac{db'}{ds} = k'b'', \quad \frac{dc'}{ds} = k'c'',$$

drei Formeln, die den Relationen § 4 (1) an die Seite zu stellen sind. Schreibt man sie, unter Wiederbenutzung von (5), den Gleichungen § 4 (5) entsprechend, nämlich

(9) $$\frac{da'}{d\omega'} = a'', \quad \frac{db'}{d\omega'} = b'', \quad \frac{dc'}{d\omega'} = c'',$$

so lassen sie sich mit jenen zusammen nach einer einheitlichen und verallgemeinerungsfähigen Methode geometrisch deuten.

Um einen beliebigen Punkt des Raumes, etwa den Anfangspunkt der Koordinaten, als Mittelpunkt werde eine Kugel mit dem Radius Eins beschrieben. Wegen der unter den Richtungskosinus a, b, c stattfindenden Relation

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

kann der Punkt A_0 (S. 12) als dieser Kugel angehörig betrachtet werden; man gelangt zu ihm, indem man durch den Kugelmittelpunkt einen Strahl parallel der positiven Tangente der Raumkurve zieht. Durchläuft der Berührungspunkt A der Tangente die gegebene Kurve, so durchläuft auch A_0 eine Kurve, die man als ein sphärisches Bild der gegebenen bezeichnen kann. $d\omega$ ist das Bogenelement der sphärischen Kurve, $\frac{da}{d\omega}$ der erste Richtungskosinus ihrer Tangente.

Bildet man die gegebene Linie in gleicher Weise vermittelst der Gesamtheit ihrer Binormalen auf die Einheitskugel ab, d. h. nimmt man den Ort der Punkte

$$A_0' \equiv (a' b' c')$$

hinzu, so ist $d\omega'$, wenigstens abgesehen vom Vorzeichen, das Bogenelement der neuen Kurve, und $\frac{da'}{d\omega'}$ ein Richtungskosinus ihrer Tangente. Die Gleichungen (9) und § 4 (5) besagen nun, daß die Tangenten der beiden sphärischen Kurven einander und der Hauptnormale der gegebenen Kurve parallel sind.

Eine sphärische Abbildung der Kurve kann man sich auch mittels des Systems der Hauptnormalen vollzogen denken. Die dabei auftretende Größe $d\omega''$, die der Gleichung

$$d\omega''^2 = da''^2 + db''^2 + dc''^2$$

genügt, heißt der Winkel der ganzen Krümmung, und sein Verhältnis zum Bogenelement,

$$\frac{d\omega''}{ds} = k'',$$

ist die ganze Krümmung selbst. Die Benutzung dieses Begriffes ist jedoch in der allgemeinen Theorie der Raumkurven insofern überflüssig, als sich die ganze Krümmung in einfacher Weise algebraisch durch die Krümmung und die Windung darstellen läßt.

Zum Beweise beziehe man die x-Achse des festen Koordinatensystems auf die Achsen t, b, h des beweglichen Systems. Die drei Richtungskosinus der Achse, a, a', a'', sind durch die Identität

$$a^2 + a'^2 + a''^2 = 1$$

verbunden, aus der durch Differentiation

$$a''da'' = -ada - a'da'$$

folgt. Nimmt man die beiden entsprechenden Gleichungen hinzu, ersetzt die Differentiale da', db', dc'; da, db, dc durch ihre aus (9) und § 4(5) folgenden Werte, quadriert dann und addiert, so erhält man

$$d\omega''^2 = d\omega^2 + d\omega'^2 \tag{10}$$

und nach Division mit ds^2

$$k''^2 = k^2 + k'^2. \tag{11}$$

Das Quadrat des Winkels der ganzen Krümmung ist also gleich der Summe der Quadrate des Kontingenzwinkels und des Windungswinkels, und das Quadrat der ganzen Krümmung gleich der Summe der Quadrate der Krümmung und der Windung.

Weil es hiernach bei nicht-ebenen Kurven wesentlich auf zwei Größen, Krümmung und Windung, ankommt, so pflegt man solche Linien als Kurven doppelter Krümmung zu benennen, wobei die Krümmung als erste, die Windung als zweite Krümmung gilt.

Werden die Formeln für da'', db'', dc'' einzeln durch ds dividiert und die eben schon benutzten Gleichungen in der Form (8) und § 4(1) verwendet, so ergibt sich das System von Differentialrelationen

$$\frac{da''}{ds} = -(ka + k'a'), \quad \frac{db''}{ds} = -(kb + k'b'), \quad \frac{dc''}{ds} = -(kc + k'c'). \tag{12}$$

§ 6.

Die Frenetschen Formeln. Geometrische Differentiation. Schmiegungskugel.

Die drei Gleichungssysteme § 4(1), § 5(8) und § 5(12) werden unter dem Namen der Frenetschen Formeln zusammengefaßt. Sämtliche linken Seiten der Gleichungen haben die Form

$$\frac{d\chi}{ds},$$

und zwar sind für χ der Reihe nach die neun Richtungskosinus abc; $a'b'c'$; $a''b''c''$ zu setzen. Die Formeln liefern also für die durch das Bogenelement der Kurve dividierten Differentiale der Richtungskosinus der Tangente, Binormale und Hauptnormale Ausdrücke durch diese Kosinus selbst, die Krümmung und die Windung der Raumkurve. Es ist zweckmäßig, die Bildung des Differentials einer beliebigen Funktion von t mit nachfolgender Division durch das Bogenelement als eine

einzige Operation zu betrachten und demnach auch durch **ein** Zeichen zu charakterisieren. Es werde

(1) $$\frac{d\chi}{ds} = \Theta\chi$$

gesetzt. Die Θ-Operation soll als geometrische Differentiation längs der betrachteten Kurve oder, wenn kein Mißverständnis vorkommen kann, als **geometrische Differentiation** ohne weiteren Zusatz bezeichnet werden; die Größe $\Theta\chi$, also das Ergebnis der Operation, heißt die **geometrische Ableitung** der Funktion χ.

Bei Anwendung des Zeichens Θ nehmen die Frenetschen Formeln die Gestalt an:

(I) $\Theta a = ka''$, $\Theta b = kb''$, $\Theta c = kc''$

(II) $\Theta a' = k'a''$, $\Theta b' = k'b''$, $\Theta c' = k'c''$

(III) $\Theta a'' = -(ka + k'a')$, $\Theta b'' = -(kb + k'b')$, $\Theta c'' = -(kc + k'c')$.

Multipliziert man die drei Gleichungen (I), dann (II) der Reihe nach mit a'', b'', c'' und addiert, so erhält man für die Krümmung und die Windung die Ausdrücke

(2) $$k = a''\Theta a + b''\Theta b + c''\Theta c$$

(3) $$k' = a''\Theta a' + b''\Theta b' + c''\Theta c'.$$

Schon die Richtungskosinus a, b, c selbst können als geometrische Ableitungen dargestellt werden. Denn nach § 2 (1) ist

(4) $$a = \Theta x, \quad b = \Theta y, \quad c = \Theta z.$$

Namentlich aber führt die Anwendung des Operationszeichens Θ zu übersichtlichen Formeln, wenn in der Theorie der Raumkurven gleichzeitig mit einer bestimmten Gleichung ihre Differentiale betrachtet werden müssen. So würde z. B. die Gleichung § 3 (1), nachdem man ihr erstes Differential (2) durch

$$\Sigma(x - \xi)\Theta x = 0,$$

d. h.

(5) $$\Sigma(x - \xi)a = 0$$

ersetzt hat, in derselben Weise weiter behandelt

$$\Sigma(x - \xi)\Theta a + \Sigma a\Theta x = 0,$$

also

(6) $$\Sigma(x - \xi)\Theta a = -1$$

ergeben. Die ersten und zweiten Differentiale der Koordinaten x, y, z werden dann durch endliche Größen von unmittelbar anschaulicher Bedeutung vertreten.

Auch kann die Θ-Operation bei der Bestimmung der **Schmiegungskugel** einer Raumkurve zweckmäßig benutzt werden. Man versteht darunter eine Kugel, die vier unendlichnahe Punkte mit der Kurve gemein hat. Ist

$$(\mathfrak{x} - \xi_0)^2 + (\mathfrak{y} - \eta_0)^2 + (\mathfrak{z} - \zeta_0)^2 = R^2$$

ihre Gleichung, so sind die Mittelpunktskoordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 und der Radius R aus

(7) $$(x - \xi_0)^2 + (y - \eta_0)^2 + (z - \zeta_0)^2 = R^2$$

und denjenigen drei Bedingungen zu bestimmen, die nacheinander aus dieser durch dreimalige Differentiation oder Anwendung der Theta-Operation folgen. Man erhält zunächst

$$(x - \xi_0)\,\Theta x + (y - \eta_0)\,\Theta y + (z - \zeta_0)\,\Theta z = 0$$

oder

(8) $$(x - \xi_0)\,a + (y - \eta_0)\,b + (z - \zeta_0)\,c = 0,$$

eine Gleichung, die ihrer Form nach mit (5) übereinstimmt und demnach lehrt, daß der Mittelpunkt der Schmiegungskugel — ebenso wie der Krümmungsmittelpunkt — in der Normalebene liegt. Aber er gehört im besonderen ebenfalls der Krümmungsachse an, denn der nächste Schritt liefert, der Gleichung (6) entsprechend,

$$(x - \xi_0)\,\Theta a + (y - \eta_0)\,\Theta b + (z - \zeta_0)\,\Theta c = -1$$

oder, nach Heranziehung des I. Systems Frenetscher Formeln und wegen $k = \frac{1}{r}$:

(9) $$(x - \xi_0)\,a'' + (y - \eta_0)\,b'' + (z - \zeta_0)\,c'' = -r.$$

Die noch hinzutretende Bedingung

$$\Sigma(x - \xi_0)\,\Theta a'' + \Sigma a''\,\Theta x = -\Theta r$$

kommt in der Theorie des Krümmungsmittelpunktes nicht vor. Sie kennzeichnet mit (8) und (9) zusammen den Mittelpunkt der Schmiegungskugel als Schnittpunkt zweier unendlichnahen Krümmungsachsen.

Nun ist

$$\Sigma a''\,\Theta x \equiv \Sigma a'' a = 0,$$

und das III. System Frenetscher Formeln führt die letzte Bedingung in

$$k\,\Sigma(x - \xi_0)\,a + k'\,\Sigma(x - \xi_0)\,a' = \Theta r$$

über. Wegen des gleichzeitigen Bestehens von (8) ist die erste Summe zu streichen, und wenn man noch

(10) $$k' = \frac{1}{r'}$$

setzt, so entsteht

$$(x - \xi_0)a' + (y - \eta_0)b' + (z - \zeta_0)c' = r'\Theta r. \tag{11}$$

Multipliziert man die in den Unbekannten ξ_0, η_0, ζ_0 linearen Gleichungen (8), (9), (11) der Reihe nach mit a, a'', a' und addiert, so fallen wegen

$$ab + a''b'' + a'b' = 0$$

$$ac + a''c'' + a'c' = 0$$

η_0 und ζ_0 heraus, und man erhält, wenn man den Wert von ξ_0 mit den beiden entsprechenden zusammenstellt,

$$\begin{aligned} \xi_0 &= x + a''r - a'r'\Theta r \\ \eta_0 &= y + b''r - b'r'\Theta r \\ \zeta_0 &= z + c''r - c'r'\Theta r. \end{aligned} \tag{12}$$

Schließlich liefert die Relation (7) für den Radius der Schmiegungskugel die Bestimmungsgleichung

$$R^2 = r'^2 + r^2(\Theta r)^2. \tag{13}$$

§ 7.

Die Schraubenlinie und ihr Windungssinn.

Die in den Paragraphen 4, 5 und 6 abgeleiteten Formeln für die Krümmung, die Windung und den Radius der Schmiegungskugel sollen jetzt auf eine spezielle Kurve, die Schraubenlinie (Helix) angewendet werden. Man versteht darunter eine Kurve auf einem geraden Kreiszylinder, deren Tangenten mit den Kanten des Zylinders einen konstanten, von 0 und $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen (spitzen) Winkel bilden. Ist der Grundkreis des Zylinders in der (xy)-Ebene so gelegen, daß sein Mittelpunkt mit dem Koordinatenanfangspunkt zusammenfällt, und bezeichnet a den Kreisradius, so sind die beiden ersten Gleichungen der Schraubenlinie

$$\begin{aligned} x &= a\cos t \\ y &= a\sin t. \end{aligned} \tag{1}$$

Dazu tritt die Bestimmung

$$\frac{dz}{ds} = \alpha, \tag{2}$$

für α als konstante Größe. Entnimmt man nun aus (1)

$$dx^2 + dy^2 = a^2dt^2$$

und setzt

$$ds^2 = a^2dt^2 + dz^2$$

in (2) ein, so findet man durch einmalige Integration und unter der Annahme, daß $z = 0$ zu $t = 0$ gehört, als dritte Gleichung der Schraubenlinie

(3) $$z = bt,$$

wo b in einem einfachen Zusammenhange mit a und α steht.

Geht man umgekehrt von (1) und (3) aus, so erhält man

$$ds^2 = (a^2 + b^2)\,dt^2$$

$$D = \begin{vmatrix} -a\sin t, & a\cos t, & b \\ -a\cos t, & -a\sin t, & 0 \\ a\sin t, & -a\cos t, & 0 \end{vmatrix} = a^2 b\,dt^6$$

$$\Sigma P^2 = a^2(a^2 + b^2)\,dt^6,$$

und demnach aus § 4 (2)

(4) $$k = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

und aus § 5 (5, 6)

(5) $$k' = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Da $r = a + \frac{b^2}{a}$ eine konstante Größe ist, so wird $\Theta r = 0$, und der Radius der Schmiegungskugel (aus § 6 (13)) mit dem Krümmungsradius identisch. Dann müssen auch die Mittelpunkte der Schmiegungskugel und des Krümmungskreises zusammenfallen. Aus den Gleichungen für ihre Koordinaten, § 6 (12) und § 3 (5), wird dies ersichtlich, wenn die letzteren in der Form

$$\xi = x + a''r, \ldots$$

geschrieben werden.

Nach (4) und (5) ist die Schraubenlinie eine Kurve von konstanter Krümmung und Windung. Man kann fragen, ob sie die einzige Kurve dieser Art ist. Es sei also eine krumme Linie durch die Gleichungen

$$k = k_0$$

$$k' = k_0'$$

definiert, wo k_0 und k_0' konstante, von Null verschiedene Größen bezeichnen. Wird

$$\frac{k_0}{k_0'} = m$$

gesetzt, so liefern die beiden ersten Systeme Frenetscher Formeln nach Elimination von $a''ds, \ldots$:

$$da - m\,da' = 0, \ldots;$$

d. h., da m konstant ist,

$$a - ma' = A, \ldots,$$

wo die Integrationskonstanten A, B, C mit m durch die Gleichung

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1 + m^2$$

verbunden sind. Erklärt man nun ein System von Richtungskosinus durch die Gleichungen

$$\frac{A}{\sqrt{\Sigma A^2}} = p, \quad \frac{B}{\sqrt{\Sigma A^2}} = q, \quad \frac{C}{\sqrt{\Sigma A^2}} = r,$$

wobei das Vorzeichen der Quadratwurzel gleichgültig ist, so kann man, ohne die Allgemeinheit der Untersuchung zu beeinträchtigen, die positive z-Achse mit der Richtung (pqr) zusammenfallen lassen, also

$$p = 0, \quad q = 0, \quad r = 1,$$

d. h.

$$A = 0, \quad B = 0, \quad C = \sqrt{1 + m^2}$$

annehmen. Die Gleichungen

$$a = ma'$$
$$b = mb'$$
$$c - \sqrt{1 + m^2} = mc'$$

geben dann quadriert und addiert

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}.$$

Das heißt: Die Kurventangente bildet mit einer festen Geraden (der z-Achse) einen konstanten Winkel. Denkt man sich durch die krumme Linie eine Zylinderfläche gelegt, deren Kanten dieser Geraden parallel sind, so sieht man, daß die Kurve, für die das Verhältnis von Krümmung und Windung konstant ist, mit der Schraubenlinie die Grundeigenschaft teilt, die Kanten eines Zylinders unter konstantem Winkel zu treffen; nur braucht der Zylinder nicht gerade ein Kreiszylinder zu sein. Eine solche Raumkurve wird als allgemeine Schraubenlinie bezeichnet.

Aus der Gleichung zwischen c und c' ergibt sich noch

$$c' = \frac{-m}{\sqrt{1 + m^2}},$$

also

$$c^2 + c'^2 = 1,$$

und da allgemein

$$c^2 + c'^2 + c'' = 1$$

ist, so muß

$$c'' = 0$$

sein. Die Hauptnormale einer allgemeinen Schraubenlinie ist demnach senkrecht zu der Achse des Zylinders, auf dem die Kurve liegt.

Sind nun Krümmung und Windung einzeln konstant, so folgt aus der ersten Formel des III. Frenetschen Systems in Verbindung mit $a' = \frac{a}{m}$ und $a = \frac{dx}{ds}$:

$$da'' = -a\left(k_0 + \frac{k_0'}{m}\right) ds$$
$$= -\left(k_0 + \frac{k_0'}{m}\right) dx$$
$$= -\frac{k_0^2 + k_0'^2}{k_0} dx,$$

und durch Integration

$$a'' = -\frac{k_0^2 + k_0'^2}{k_0}(x - x_0).$$

Ebenso findet sich

$$b'' = -\frac{k_0^2 + k_0'^2}{k_0}(y - y_0).$$

Wegen $c'' = 0$ muß

$$a''^2 + b''^2 = 1,$$

also

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{k_0^2}{(k_0^2 + k_0'^2)^2}$$

sein. Dies ist aber die Gleichung eines Kreiszylinders.

Hiernach können nur für die Schraubenlinie — nämlich die gewöhnliche, auf einem Kreiszylinder gelegene — gleichzeitig Krümmung und Windung konstant sein.

Das Vorzeichen der Windung stimmt nach (5) mit dem der Konstanten b überein. Von der Bedeutung dieser Tatsache kann man sich eine anschauliche Vorstellung bilden. Nach der Gleichung (3) geht die Schraubenlinie für $t = 0$ durch einen Punkt der (xy)-Ebene hindurch. Mit wachsendem t nimmt z zu oder ab, je nachdem b positiv oder negativ ist. Nun sind im § 1 die positiven Richtungen der drei Koordinatenachsen in einer bestimmten Weise angeordnet worden, wozu hier noch Folgendes bemerkt sei. Denkt man sich zuerst die positiven Richtungen der x-Achse und der y-Achse fixiert, so soll die Drehung um den Anfangspunkt, durch die man auf dem kürzesten Wege, nämlich durch den rechten Winkel hindurch, die erste dieser Richtungen in die zweite überführen kann, als positiv bezeichnet werden. Ein Punkt (xy) beschreibt die Peripherie eines Kreises mit dem Anfangspunkt als Mittelpunkt in positivem Sinne, wenn in den Gleichungen (1) die Winkelgröße t das Intervall $(0 \ldots 2\pi)$ durchläuft. Man kann, wenn man zwei Punkte X und Y auf der

positiven x- und y-Achse willkürlich, etwa im Abstande Eins vom Anfangspunkte O annimmt, die Drehung auch durch die Punktfolge OXY definieren, wobei es auf die Annahme $OY \perp OX$ nicht ankommt. Für die Raumgeometrie gewinnt aber die Festsetzung des Drehungssinnes erst dann eine präzise Bedeutung, wenn man die Ebene von einer bestimmten Seite her betrachtet. Es sei als positive Seite der (xy)-Ebene diejenige bezeichnet, nach der sich die positive z-Achse erstreckt. Ist dann die gegenseitige Lage der Achsen die im § 1 festgesetzte, so geht bei der Betrachtung von der positiven Seite her die positive Drehung in der (xy)-Ebene von rechts über oben (oder hinten) nach links vor sich.

Verfolgt man jetzt den Verlauf einer Schraubenlinie auf einem vertikalen Kreiszylinder, so scheint die Kurve, bei einer Betrachtung der Zylinderfläche von außen, entweder von links nach rechts oder von rechts nach links zu steigen. Im ersten Falle heißt die Schraubenlinie rechtsgewunden (Fig. 1), im zweiten linksgewunden (Fig. 2). Bezieht man sie auf ein Koordinatensystem, dessen positive Richtungen so wie bisher fixiert sein sollen und dessen positive z-Achse, der Zylinderachse parallel oder mit ihr zusammenfallend, senkrecht nach oben geht, so bildet die Fortgangsrichtung längs der Kurve beim Übertritt von der negativen Seite der (xy)-Ebene zur positiven einen spitzen Winkel mit der positiven Drehungsrichtung, wenn die Schraubenlinie rechtsgewunden ist; im entgegengesetzten Falle einen stumpfen. Oder, anders ausgesprochen: Die Schraubenlinie tritt, indem sie die (xy)-Ebene unter spitzem Winkel gegen die positive Drehungsrichtung durchsetzt, von der negativen zur positiven Seite über oder umgekehrt, je nachdem sie rechtsgewunden oder linksgewunden ist. Bei der analytischen Darstellung durch die Gleichungen (1, 3) gehört die erste Annahme zu $b > 0$, die zweite zu $b < 0$. Das heißt schließlich: Die rechts- und linksgewundenen Schraubenlinien können voneinander durch das Vorzeichen der Windung unterschieden werden; für eine rechtsgewundene ist die Windung positiv, für eine linksgewundene negativ.

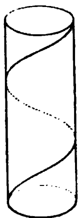

Fig. 1.


Fig. 2.

Diese Kennzeichnung des Sinnes einer Windung durch ein Vorzeichen soll auch dann festgehalten werden, wenn von einem analytischen Ausdruck der Windung nicht die Rede ist.

Nachdem dies alles einmal festgestellt ist, kann man zweckmäßig von dem Begriff der Windung ausgehen und erst danach die positiven Richtungen der Koordinatenachsen festlegen. Ist doch die Windung,

anders als die Drehung, von dem Standpunkt des Beschauers einer Figur im dreidimensionalen Raume unabhängig. Bedeutet Z einen Punkt auf der positiven z-Achse, etwa wie X und Y im Abstande Eins von O gelegen, so wird durch die Punktfolge $OXYZ$ eine Windung bestimmt. Die positiven Richtungen im (rechtwinkligen oder schiefwinkligen) Achsensystem haben die hier immer vorausgesetzte Lage, wenn diese Windung positiv ist.

Der Zusammenhang des Vorzeichens von k_0' mit dem Windungssinn der Schraubenlinie ist auch für die allgemeine Theorie der Raumkurven wichtig. Er gestattet nämlich, für eine beliebige Kurve das Zeichen von k' ebenfalls geometrisch zu deuten. Wie in der Theorie der ebenen krummen Linien das in der Nähe eines gegebenen Punktes zu untersuchende Gebilde mit einem Kreise, als der einzigen ebenen Linie von konstanter Krümmung, verglichen wird, so kann man versuchen, einer beliebigen Raumkurve eine bestimmte Schraubenlinie zuzuordnen, weil nur längs einer solchen die Krümmung und die Windung konstante Werte haben. Ein Stück der Schraubenlinie, das den betrachteten Kurvenpunkt enthalten soll, denken wir uns als Durchschnitt des Kreiszylinders mit einer anderen Fläche, die als **Schraubenfläche** bezeichnet wird. Unter den speziellen Annahmen, auf denen die hier zugrunde gelegte Darstellung der Schraubenlinie beruht, wird ein Stück der Schraubenfläche durch die Gleichung

$$z = b \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

definiert, die durch Elimination des Parameters t aus dem System (1, 3), d. h. aus

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} t, \qquad z = bt$$

hervorgeht. Auf Grund dieser Gleichungen kann man sich die Schraubenfläche durch Schraubenbewegung einer geraden Linie, die eine feste Gerade senkrecht schneidet, entstanden denken. Die feste Gerade heißt die Achse der Fläche. Es fragt sich nun, von wieviel Stücken eine bestimmte Schraubenlinie abhängt, wenn sie auf ein beliebiges Koordinatensystem bezogen wird, wievielen Bedingungen sie also unterworfen werden darf. Die gemeinsame Achse des Kreiszylinders und der Schraubenfläche wird durch vier Konstanten bestimmt. Dazu treten für den Zylinder der Radius a des Grundkreises und für die Schraubenfläche der Parameter b, der mit der sogenannten Ganghöhe, dem Abstande zweier in Richtung der Achse unmittelbar übereinander liegenden Punkte, in unmittelbarem Zusammenhange steht. Zu gegebener Achse und Ganghöhe gehört noch eine einfache Mannigfaltig-

keit von Schraubenflächen, nämlich alle, die aus einer von ihnen durch Drehung um die Achse hervorgehen. Um eine von ihnen herauszuheben, ist die Angabe eines weiteren Parameters nötig, etwa der Neigung einer bestimmten erzeugenden Geraden gegen eine mit dem Achsensystem fest verbundene Ebene.

Von diesen, insgesamt sieben Parametern einer Schraubenlinie kann man im allgemeinen sechs dadurch bestimmen, daß man jede der beiden Flächen durch drei unendlichnahe Punkte der gegebenen Kurve gehen läßt. Diese hat dann mit der Schraubenlinie alle geometrischen Größen gemein, zu deren Darstellung die Differentiale erster und zweiter Ordnung gebraucht werden, also namentlich die Krümmung. Durch einen vierten unendlichnahen Punkt der Raumkurve kann die Schraubenlinie für gewöhnlich nicht gehen, weil dazu zwei weitere Bedingungen erfüllt sein müßten. Dagegen kann verlangt werden, daß eine bestimmte, auch von den dritten Differentialen abhängige Größe, nämlich der Ausdruck der Windung, für die allgemeine und die spezielle Kurve denselben Wert habe. Die durch die Gesamtheit dieser Bedingungen definierte Linie, auf deren genauere Bestimmung hier nicht eingegangen werden soll, heißt die oskulierende Schraubenlinie der gegebenen Kurve. Das Vorzeichen der Windung k wird nun durch den Windungssinn dieser Linie veranschaulicht. Je nachdem der Ausdruck k das positive oder negative Zeichen hat, ist die oskulierende Schraubenlinie rechts- oder linksgewunden.

II. Abschnitt.

Grundbegriffe und Grundformeln der Flächentheorie.

§ 8.

Die verschiedenen Darstellungen einer Fläche.

Es seien jetzt die kartesischen Koordinaten x, y, z eines Punktes eindeutige Funktionen zweier unabhängigen Variablen u und v,

$$x = x(u, v)$$
(I) $$y = y(u, v)$$
$$z = z(u, v).$$

Diese drei Funktionen sollen inbezug auf ihre Argumente dieselben wesentlichen Eigenschaften haben wie die Funktionen einer einzigen Variablen in der Theorie der Raumkurven (§ 1). Sie sollen also namentlich, ebenso wie die Argumente selbst, reell sein, so lange nicht ausdrücklich etwas Anderes bemerkt wird, und den Anforderungen der ein- oder mehrmaligen Differentiierbarkeit genügen, soweit diese für eine bestimmte Untersuchung notwendig oder nützlich sind. Entsprechende Voraussetzungen gelten für die Funktion auf der linken Seite der Gleichung

(II) $$F(x, y, z) = 0,$$

die durch Elimination der beiden Parameter u, v aus den Gleichungen (I) entstanden sein möge und umgekehrt auf unendlichviele Weisen durch drei Gleichungen der Form (I) vertreten werden kann. Freilich hat man auch hier, wie in der Theorie der Raumkurven, im gegebenen Falle genau zuzusehen, ob die beiden Darstellungen (I) und (II) einander vollständig ersetzen oder nicht. Dies richtet sich unter anderem nach dem für die Veränderlichkeit des Paares (u, v) vorgeschriebenen Bereiche. So geben die Gleichungen

$$x = a \cos u \cos v$$
(1) $$y = b \cos u \sin v$$
$$z = c \sin u,$$

wenn u und v unabhängig von einander das Wertintervall $\left(0 \cdots \frac{\pi}{2}\right)$ durchlaufen, nur den achten Teil der durch die Gleichung

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

vollständig dargestellten Ellipsoidfläche wieder. In solchen Fällen hätte man also von einem Flächenstück zu sprechen. Doch soll dies nur ausnahmsweise geschehen, wenn es, wie für das vorliegende Beispiel, des Gegensatzes wegen nötig ist. Sonst soll auch ein Flächenstück kurz als Fläche bezeichnet werden.

Denkt man sich die Gleichung (II) nach einer der Koordinaten, etwa z, aufgelöst, oder setzt man in (I) $x(u, v) = u$, $y(u, v) = v$, so erhält man übereinstimmend

$$(\text{III}) \qquad z = z(x, y)$$

als Gleichung der Fläche. Trotz des Mangels an Symmetrie ist diese Darstellung für manche Untersuchungen von Nutzen, z. B. beim Beweise bestimmter Sätze, wenn es auf deren Stellung im organischen Zusammenhange der Theorie nicht ankommt, sowie bei der Beurteilung des Charakters partieller Differentialgleichungen, auf die man durch flächentheoretische Aufgaben geführt wird.

Im besonderen ergibt sich aus der Gleichung (2) des Ellipsoids

$$(3) \qquad z = \pm c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Um die Funktion rechts zu einer eindeutigen zu machen, muß man das Zeichen der Quadratwurzel fixieren. Die beiden möglichen Annahmen liefern die Punkte je einer Hälfte der Fläche.

§ 9.

Koordinatenlinien. Linienelement. Fundamentalgrößen erster Ordnung.

Gibt man in den Gleichungen (I) des vorigen Paragraphen dem einen der beiden Parameter, etwa v, einen konstanten Wert v_0, sodaß x, y, z Funktionen nur einer Variablen werden, so stellen die Gleichungen eine auf der Fläche liegende Kurve dar. Insofern für diese noch u veränderlich ist, soll sie als eine u-Linie bezeichnet werden. Läßt man v_0 das für v vorgeschriebene Intervall stetig durchlaufen, so erhält man eine ganze Schar solcher Kurven. Ebenso liefert die Annahme $u = u_0$, wenn man u_0 alle möglichen Werte erteilt, eine zweite Schar von Kurven, die v-Linien. Ein beliebiger Punkt der

Fläche, der einem Wertepaar (u_0, v_0) entspricht, kann also als Durchschnitt einer v-Linie mit einer u-Linie aufgefaßt werden. Infolgedessen werden diese Kurven auch als Koordinatenlinien der Fläche, u und v selbst als die krummlinigen Koordinaten der Flächenpunkte bezeichnet. Wenn im Folgenden von Koordinaten ohne weiteren Zusatz die Rede ist, so wird immer aus dem Zusammenhange hervorgehen, ob u, v oder x, y, z gemeint sind. Kommen beide Größensysteme gleichzeitig vor, so werden nötigenfalls x, y, z als kartesische Koordinaten von den krummlinigen unterschieden werden.

Zunächst ist nicht ausgeschlossen, daß verschiedenen Wertepaaren (u, v) derselbe Flächenpunkt entspricht, wie z. B. die Gleichungen § 8 (1) bei einer Vermehrung von u oder v um 2π nichts Neues geben. Es erscheint angemessen, den Bereich der Veränderlichkeit der Parameter so zu beschränken, daß die gegenseitige Beziehung der Flächenpunkte und der Wertepaare (u, v) eine eindeutige wird, und ihn für das obige Beispiel etwa durch die Bedingungen

$$0 \leqq u \leqq \pi$$

$$0 \leqq v < 2\pi$$

zu definieren.

Setzt man zwischen u und v eine funktionale Beziehung fest, z. B. so, daß beide Variablen Funktionen einer Unabhängigen t werden, so werden vermöge (I) auch x, y, z Funktionen von t und stellen wiederum eine auf der Fläche liegende Kurve dar. Daß auch die neu eingeführten Funktionen analoge Eigenschaften haben müssen wie $x(u, v), \ldots$, versteht sich von selbst.

Wenn kein Mißverständnis möglich ist, soll für u_0 und v_0 einfach u und v geschrieben werden. $A \equiv (u, v)$ ist dann ein willkürlich gewählter, aber bestimmter Punkt des betrachteten Flächenstücks. Zieht man durch ihn eine beliebige Kurve auf der Fläche, so soll deren Bogenelement ds, also der unendlichkleine Abstand des Punktes A vom Punkte $B \equiv (u + du, v + dv)$, das Linienelement der Fläche heißen. Es wird als absolute Größe betrachtet. Sind $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die kartesischen Koordinaten von B, also

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{1}$$

so ist hiernach

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}. \tag{2}$$

Nun gehen die Ausdrücke der kartesischen Koordinaten von B aus den Formeln (I) durch Einführung von $u + du$ und $v + dv$ statt u und v hervor. Demnach gelten für die Inkremente von x, y, z, wenn

für keine der drei darstellenden Funktionen die beiden ersten partiellen Ableitungen gleichzeitig verschwinden, die Ausdrücke

$$(3)\qquad \begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv. \end{aligned}$$

Setzt man nun bleibend

$$(4)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 &= E \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} &= F \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 &= G, \end{aligned}$$

so wird nach (1)

$$(5)\qquad ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2.$$

Das Quadrat des Linienelements erscheint also als homogene Funktion zweiter Dimension der beiden Differentiale du und dv, mit Koeffizienten E, F, G, die Funktionen von u und v sind. Ein solcher Ausdruck wird als eine binäre quadratische Differentialform bezeichnet

Die durch die Gleichungen (4) erklärten Größen E, F, G heißen die Fundamentalgrößen erster Ordnung der Fläche.

§ 10.

Der Koordinatenwinkel.

Die durch A gehende Flächenkurve sei jetzt eine der Koordinatenlinien, z. B. die, längs deren v konstant ist, $v = v_0$, während u veränderlich bleibt. Wegen $dv = 0$ wird die Bestimmungsgleichung für das Bogenelement einfach

$$ds^2 = E du^2,$$

$$ds = \pm \sqrt{E}\, du,$$

wo das Vorzeichen sich nach dem von du richtet. Das Prinzip des Fortganges (S. 4) möge nun für die u-Linie durch die Annahme $du > 0$ definiert sein, d. h. die positive Richtung der Linie soll dem Wachsen des Parameters u entsprechen. Und ebenso soll die positive Richtung der v-Linie, für die $u = u_0$, $du = 0$ ist, vom Punkte (u, v) nach dem-

jenigen Punkte $(u, v + dv)$ gehen, für welchen dv positiv ist. Setzt man nun in die Kosinus der von A nach B gehenden Richtung,

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds},$$

die aus (3) und (5) des vorigen Paragraphen hervorgehenden Ausdrücke ein, macht zuerst $dv = 0$, dann $du = 0$ und nimmt im ersten Falle

$$ds = \sqrt{E}\,du$$

und entsprechend im zweiten

$$ds = \sqrt{G}\,dv,$$

so erhält man für die Richtungskosinus der positiven u- und v-Linie die Werte

(1) $$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}$$

und

(2) $$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Der Kosinus des Winkels ϑ der positiven Koordinatenlinien hat hiernach den Ausdruck

$$\cos\vartheta = \sum\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right) = \frac{1}{\sqrt{E}\sqrt{G}}\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v},$$

oder, unter Benutzung der zweiten Formel (4) auf vorhergehender Seite:

(3) $$\cos\vartheta = \frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Der **Koordinatenwinkel** ϑ kann und soll als Winkel zweier Richtungen im Raume stets $\leqq \pi$ vorausgesetzt werden. Dann folgt aus (3)

(4) $$\sin\vartheta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}$$

oder, wenn bleibend

(5) $$\sqrt{EG - F^2} = T$$

gesetzt wird,

(6) $$\sin\vartheta = \frac{T}{\sqrt{EG}},$$

und weiter

(7) $$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{T}{F}.$$

Sind die Parameter so gewählt, daß die Gleichung

(8) $$F = 0$$

identisch besteht, so ist dies nach (3) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Koordinatenlinien sich überall senkrecht schneiden. Dies trifft z. B. bei der Darstellung des Ellipsoides

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

durch die Formeln

$$(9) \qquad \begin{aligned} x^2 &= \frac{a^2(a^2-u)(a^2-v)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \\ y^2 &= \frac{b^2(b^2-u)(b^2-v)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)} \\ z^2 &= \frac{c^2(c^2-u)(c^2-v)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &(a^2 > u > b^2) \\ &(b^2 > v > c^2) \end{aligned}$$

zu, wie durch Ausführung der Differentiationen leicht geprüft werden kann. Wie man auf diese Formeln geführt wird, kann freilich erst später, in der Theorie der Krümmungslinien (§ 65), gezeigt werden.

Wir fügen über die Fundamentalgrößen erster Ordnung noch folgende Voraussetzungen hinzu. Die Größen E und G, die im allgemeinen > 0 sind, sollen niemals $= 0$ werden. Nach den im Anfange des § 8 eingeführten Voraussetzungen kann E als Summe dreier Quadrate nur dann verschwinden, wenn $\frac{\partial x}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$ ist; das gleichzeitige Bestehen dieser Gleichungen, sowie der entsprechenden für v, wird also ausgeschlossen. Die Größe T, deren Quadrat sich in der Form

$$(10) \qquad T^2 = \sum \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2,$$

also ebenfalls als Summe von drei Quadraten darstellen läßt, soll ebensowenig Null werden können wie E und G.

Bestünde die Gleichung $T = 0$ für alle Wertepaare (u, v) eines gewissen Bereiches, so würde man es nicht mehr mit einer Fläche, sondern mit einer Kurve zu tun haben. Denn die Gleichung $\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} = 0$ und die beiden entsprechenden besagen, daß zwischen x, y, z zwei Relationen stattfinden, die u und v nicht explizite enthalten.

Wegen $T > 0$ ist nun $\sin \vartheta$ von Null verschieden, ϑ selbst niemals $= 0$ oder $= \pi$, d. h. die Kurven $u =$ const. und $v =$ const. berühren sich nirgends. Es sei noch $C \equiv (u, v + dv)$ ein dem Punkte $A \equiv (u, v)$ benachbarter Punkt auf der durch ihn gehenden v-Linie. Wir betrachten die beiden durch A und C gehenden u-Linien. Auf der ersten von ihnen werde der Schnittpunkt mit einer zu ihr senk-

rechten, durch C gehenden Ebene mit B bezeichnet. In dem unendlichkleinen, als geradlinig zu betrachtenden, bei B rechtwinkligen Dreieck ABC (Fig. 3) ist

$$C\hat{A}B = \vartheta \quad \text{oder} \quad = \pi - \vartheta,$$
$$BC = AC \sin\vartheta = \pm \sqrt{G} \sin\vartheta\, dv.$$

Der Abstand BC der beiden u-Linien ist, da G und $\sin\vartheta$ nicht Null sind, von derselben Ordnung wie dv; d. h die aufeinanderfolgenden Kurven der Schar $v =$ const. laufen einander unendlichnahe, ohne sich jemals zu schneiden oder zu berühren. Dasselbe gilt von den v-Linien.

Von zwei Kurvenscharen, die diese Eigenschaften haben, sagt man, daß sie zusammen ein Kurvennetz auf der Fläche bilden. Wie wir sehen, können die Flächenpunkte mittels eines Netzes von Koordinatenlinien in ähnlicher Weise bestimmt werden wie die Punkte einer Ebene durch zwei Scharen gerader Linien, die zwei, im allgemeinen schiefwinkligen Achsen parallel laufen.

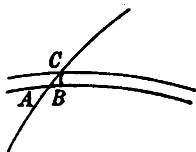


Fig. 3.

Die bisher eingeführten Voraussetzungen beziehen sich teils auf bestimmte Eigenschaften der darstellenden Funktionen $x(u,v), \ldots,$ $F(x, y, z)$, teils bedingen sie eine Beschränkung der Veränderlichkeit der Parameter. Hierzu sei noch bemerkt, daß Punkte oder Kurven, für welche die Ergebnisse einer speziellen Untersuchung ihrer Natur nach ungültig werden würden, als von dem Flächenstück ausgeschlossen betrachtet werden sollen, auch ohne daß dies jedesmal besonders hervorgehoben wird.

§ 11.

Die Tangentialebene für die erste Flächendarstellung. Winkel zweier Tangenten.

Der Punkt $B \equiv (u + du,\ v + dv)$, der im § 10 eine spezielle Lage hatte, sei nunmehr wieder ein beliebiger, dem A benachbarter; d. h. er werde dadurch erhalten, daß von A aus auf der Fläche in beliebiger Richtung um ein unendlichkleines Stück ds fortgegangen wird. Diese Richtung wird durch drei Kosinus gekennzeichnet, deren erster ist

$$(1) \qquad \frac{dx}{ds} = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv}{\sqrt{E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2}}.$$

Ein solcher Ausdruck hat, wie im § 2 für eine beliebige Kurve und im vorigen Paragraphen speziell für die Koordinatenlinien erörtert,

zwei entgegengesetzt gleiche Werte, die hier von den Vorzeichen von du und dv abhängen. Von vornherein ist zu beachten, daß diese Differentiale nur in ihrem Verhältnis

$$\frac{dv}{du} = \lambda$$

vorkommen. Die Gleichungen der unbegrenzten Geraden AB, die als eine Tangente der Fläche im Punkte A aufgefaßt werden kann, heißen

$$(2) \qquad \frac{\mathfrak{x} - x}{\frac{dx}{ds}} = \frac{\mathfrak{y} - y}{\frac{dy}{ds}} = \frac{\mathfrak{z} - z}{\frac{dz}{ds}}.$$

Für sie ist das Vorzeichen der Richtungskosinus naturgemäß ohne Bedeutung. Zu jedem Werte von λ gehört eine bestimmte Tangente der Fläche im Punkte A, und den geometrischen Ort aller Tangenten findet man durch Elimination von λ aus (2). Bezeichnet man der Symmetrie wegen den gemeinsamen Wert der drei in diesen Gleichungen einander gleich gesetzten Quotienten mit μ, so kann man die Gleichungen selbst in der Form

$$\mathfrak{x} = x + \mu\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{ds}\right)$$

$$\mathfrak{y} = y + \mu\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{ds}\right)$$

$$\mathfrak{z} = z + \mu\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{ds} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{ds}\right)$$

schreiben und dann die beiden Größen $\mu\frac{du}{ds}$ und $\mu\frac{dv}{ds}$ linear eliminieren. So ergibt sich

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x} - x & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \mathfrak{y} - y & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \mathfrak{z} - z & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

eine in $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ lineare Gleichung, die demnach eine Ebene darstellt. Sie heißt die Tangentialebene der Fläche in dem betrachteten Punkte.

Wird die linke Seite von (3) nach den laufenden Koordinaten geordnet, so erscheinen als deren Koeffizienten die Funktionaldeterminanten je zweier der kartesischen Koordinaten der Fläche inbezug auf die beiden krummlinigen Koordinaten. Für irgend zwei Funktionen $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ werde die Funktionaldeterminante mit

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}$$

bezeichnet, sodaß

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} = \frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}$$

ist. Dann lautet die Gleichung der Tangentialebene

$$(5)\qquad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(\mathfrak{x}-x) + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(\mathfrak{y}-y) + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(\mathfrak{z}-z) = 0.$$

Wir kommen auf diese Ebene im § 14 zurück. Zunächst aber soll der Winkel zweier Flächentangenten berechnet werden.

Es sei

$$C \equiv (u+\delta u,\ v+\delta v) \equiv (x+\delta x,\ y+\delta y,\ z+\delta z)$$

ebenso wie B ein beliebiger, dem A benachbarter Punkt, jedoch so gewählt, daß die Fortgangsrichtung AC nicht mit AB zusammenfällt. Das Linienelement AC werde mit δs bezeichnet. Für den Kosinus des Winkels w, den AB und AC mit einander bilden, gilt die Formel

$$(6)\qquad \cos w = \frac{dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z}{ds\,\delta s},$$

woraus

$$ds^2\,\delta s^2 \sin^2 w = (\Sigma dx^2)(\Sigma \delta x^2) - (\Sigma dx\,\delta x)^2,$$

d. h.

$$(7)\qquad \sin^2 w = \frac{1}{ds^2\,\delta s^2}\,\Sigma \begin{vmatrix} dy & dz \\ \delta y & \delta z \end{vmatrix}^2$$

folgt. Führt man in (6) die Ausdrücke für dx, dy, dz (§ 9 (3)) ein, so erhält man

$$(8)\qquad \cos w = \frac{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\ \sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}.$$

Ausdrücke wie der hier auftretende

$$(E\,du + F\,dv)\,\delta u + (F\,du + G\,dv)\,\delta v,$$

die in zwei Paaren von Differentialen linear sind, heißen **bilineare Differentialformen**.

Man hat ferner

$$\begin{vmatrix} dy & dz \\ \delta y & \delta z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv, & \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv \\ \frac{\partial y}{\partial u}\delta u + \frac{\partial y}{\partial v}\delta v, & \frac{\partial z}{\partial u}\delta u + \frac{\partial z}{\partial v}\delta v \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} du & dv \\ \delta u & \delta v \end{vmatrix}$$

$$\Sigma \begin{vmatrix} dy & dz \\ \delta y & \delta z \end{vmatrix}^2 = (du\delta v - dv\delta u)^2 \, \Sigma \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2$$

$$= (du\delta v - dv\delta u)^2 (EG - F^2),$$

also

$$(9) \qquad \sin^2 w = \frac{T^2 (du\delta v - dv\delta u)^2}{(Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2)(E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2)}.$$

Um diese Gleichung direkt aus (8) herzuleiten, hätte man für

$$du = \xi_1, \qquad dv = \xi_2$$

$$\delta u = \eta_1, \qquad \delta v = \eta_2$$

folgende Reduktion anzustellen:

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} E\xi_1^2 + 2F\xi_1\xi_2 + G\xi_2^2, & E\xi_1\eta_1 + F(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + G\xi_2\eta_2 \\ E\xi_1\eta_1 + F(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + G\xi_2\eta_2, & E\eta_1^2 + 2F\eta_1\eta_2 + G\eta_2^2 \end{vmatrix}$$

$$\equiv \begin{vmatrix} (E\xi_1 + F\xi_2)\xi_1 + (F\xi_1 + G\xi_2)\xi_2, & (E\xi_1 + F\xi_2)\eta_1 + (F\xi_1 + G\xi_2)\eta_2 \\ (E\eta_1 + F\eta_2)\xi_1 + (F\eta_1 + G\eta_2)\xi_2, & (E\eta_1 + F\eta_2)\eta_1 + (F\eta_1 + G\eta_2)\eta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} E\xi_1 + F\xi_2, & F\xi_1 + G\xi_2 \\ E\eta_1 + F\eta_2, & F\eta_1 + G\eta_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix}^2.$$

Es handelt sich noch um die Bestimmung des Vorzeichens $\varepsilon \equiv \pm 1$ in der aus (9) folgenden Formel

$$\sin w = \frac{\varepsilon T (du\,\delta v - dv\,\delta u)}{ds\,\delta s}.$$

Das Zeichen richtet sich nach der Definition von w. Nun ist aus der analytischen Geometrie bekannt, daß es nicht immer zweckmäßig ist, den Winkel zweier Richtungen als zwischen 0 und π gelegen anzunehmen, also so, wie es für den Koordinatenwinkel ϑ geschehen ist (§ 10). Vielmehr werden bei Betrachtung mehrerer Richtungen in einer und derselben Ebene die Formeln und Sätze meist dadurch übersichtlicher, daß man die Winkelgrößen durch Drehung entstanden denkt, also für sie das Intervall $(0 \ldots 2\pi)$ zuläßt.

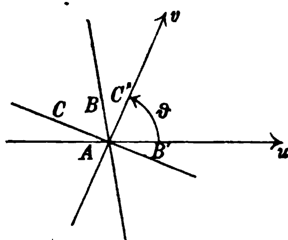


Fig. 4.

Es seien B' und C' zwei dem Punkte A benachbarte auf der positiven u- und v-Linie (Fig. 4). Dann soll die Drehung, durch welche AB' auf dem kürzesten Wege in AC' übergeführt wird, also die durch

den Koordinatenwinkel ϑ ($< \pi$) hindurch, als **Drehung in positivem Sinne** bezeichnet werden. Denken wir uns ferner um A eine beliebig kleine geschlossene Kurve beschrieben, die durch die u-Linie in zwei Teile zerlegt wird, so wollen wir sagen, daß der Teil des von der Kurve begrenzten Flächenstücks, durch den die positive v-Linie geht, auf der **positiven Seite** der u-Linie liegt. Ist dann α der Winkel von AC mit AB', entstanden durch Drehung von AB' in positivem Sinne bis zum Zusammenfallen mit AC, so hat man weil für den Punkt B' $dv = 0$, $du > 0$, also $AB' = \sqrt{E}\,du$ ist,

$$\cos\alpha = \frac{E\,\delta u + F\,\delta v}{\sqrt{E}\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{EG - F^2}\,\delta v}{\sqrt{E}\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}}.$$

Hier gilt auch in dem Ausdruck des Sinus überall das positive Zeichen der Quadratwurzeln. Denn liegt C auf der positiven Seite der u-Linie, ist also $\delta v > 0$, so ist $\alpha < \pi$, und die Formel liefert einen positiven Wert des Sinus, wie es sein muß; dagegen wird der Ausdruck negativ für $\delta v < 0$, der Tatsache entsprechend, daß dann α den Wert π übersteigt. In gleicher Weise erhält man für den Winkel $B\hat{A}B' = a$, der ebenfalls durch positive Drehung von AB' aus erzeugt sein möge, die Gleichungen

(11)
$$\cos a = \frac{E\,du + F\,dv}{\sqrt{E}\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}}$$
$$\sin a = \frac{\sqrt{EG - F^2}\,dv}{\sqrt{E}\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}}.$$

Es sei nun $a < \alpha$, so ist der durch positive Drehung von ds bis zum Zusammenfallen mit δs entstandene Winkel w gleich $\alpha - a$. Ist dagegen $a > \alpha$, so ergibt sich der in derselben Weise gezählte Winkel gleich $2\pi - (a - \alpha)$. Mithin ist in beiden Fällen

$$\cos w = \cos(\alpha - a), \qquad \sin w = \sin(\alpha - a),$$

und es folgt für $\cos w$ der Ausdruck (8), ferner

(12) $$\sin w = \frac{\sqrt{EG - F^2}\,(du\,\delta v - dv\,\delta u)}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\sqrt{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2}},$$

endlich durch Division

(13) $$\operatorname{tg} w = \frac{\sqrt{EG - F^2}\,(du\,\delta v - dv\,\delta u)}{E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v}.$$

Faßt man die unendlichkleinen Strecken $AC = \delta s$ und $AB = ds$ als Bogenelemente zweier durch A gehenden Kurven

$$(14) \qquad \varphi(u, v) = C, \qquad \psi(u, v) = C'$$

auf, so gelten die Gleichungen

$$(15) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\delta v = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv = 0,$$

aus denen die Verhältnisse $\frac{\delta v}{\delta u}$ und $\frac{dv}{du}$ zu entnehmen und in (8, 12, 13) einzusetzen sind. Um auch hierbei wieder zu eindeutigen Ausdrücken zu kommen, muß man auf jeder der beiden Kurven eine bestimmte, im allgemeinen willkürlich anzunehmende Richtung bevorzugen und die dann auftretenden Vorzeichen der Differentiale $du, \ldots$ beachten. Im Hinblick auf die Theorie der Kurvennetze ist es außerdem zweckmäßig, die beiden Kurven nicht für sich allein, sondern als Glieder zweier Scharen zu denken, also unter den Größen C und C' in (14) Parameter zu verstehen, deren jeder fähig ist, eine Reihe verschiedener Werte anzunehmen. Geschieht dies, so ist es natürlich, die positiven Richtungen der beiden Linien (14) den positiven Richtungen der Koordinatenlinien entsprechend zu wählen. Der Übergang von A nach B auf der Kurve $\psi(u, v) = C'$ entspreche demnach einem Wachsen der Funktion $\varphi(u, v)$; und ebenso der von A nach C längs der anderen Kurve einer Zunahme von $\psi(u, v)$. Das heißt: Die beiden Gleichungen (15) sollen mit den Ungleichheitsbedingungen

$$(16) \qquad \begin{aligned} \delta\psi &\equiv \frac{\partial \psi}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \psi}{\partial v}\delta v > 0 \\ d\varphi &\equiv \frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv > 0 \end{aligned}$$

zusammen gelten. Ersetzt man (15) durch die beiden Gleichungspaare

$$(17) \qquad \begin{aligned} \delta u &= -\mu\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \qquad & \delta v &= \mu\frac{\partial \varphi}{\partial u} \\ du &= \nu\frac{\partial \psi}{\partial v}, \qquad & dv &= -\nu\frac{\partial \psi}{\partial u}, \end{aligned}$$

wo μ und ν Proportionalitätsfaktoren sind, so liefern die Ungleichungen (16):

$$\mu\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) > 0$$
$$\nu\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) > 0;$$

d. h. μ und ν haben dasselbe Vorzeichen wie die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}.$$

Wird dieses Vorzeichen mit ε bezeichnet, so ist demnach

$$\varepsilon\mu > 0, \qquad \varepsilon\nu > 0,$$

$$ds \equiv \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} = \varepsilon\nu \sqrt{G\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2}$$

$$\delta s \equiv \sqrt{E \delta u^2 + 2F \delta u \delta v + G \delta v^2} = \varepsilon\mu \sqrt{G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}.$$

Ferner hat man

$$E du\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + G dv\delta v =$$
$$- \mu\nu\left[G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right]$$

$$du\,\delta v - dv\,\delta u = \mu\nu\,\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)}.$$

Beim Einsetzen dieser Ausdrücke fällt in (8) und (12) außer $\mu\nu$ auch ε weg, weil nur $\varepsilon^2 = +1$ auftritt, und es wird

$$(18)\quad \cos w = -\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}}{\sqrt{G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}\sqrt{G\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2}}$$

$$(19)\quad \sin w = \frac{T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)}{\sqrt{G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}\sqrt{G\left(\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)^2}}$$

$$(20)\quad \operatorname{tg} w = \frac{-T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)}{G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}}.$$

§ 12.

Transformation der krummlinigen Koordinaten. Differentialparameter erster Ordnung, Zwischenparameter.

Da man sich jede Fläche auf unendlichviele Weisen mit einem Netz von Koordinatenlinien überzogen denken kann, so ist es wichtig zu wissen, durch was für Formeln der Übergang von einem solchen Netz zu einem anderen vermittelt wird. Es handelt sich bei dieser Frage um eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Koordinatentransformation in der Ebene.

Die kartesischen Koordinaten seien einmal durch die Parameter u, v, dann durch ein zweites Paar krummliniger Koordinaten u', v' dargestellt:

(1) $$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

und

(2) $$x = \bar{x}(u', v'), \qquad y = \bar{y}(u', v'), \qquad z = \bar{z}(u', v').$$

Zwischen den beiden Systemen von Variablen müssen Beziehungen der Art bestehen, daß für jeden Punkt der Fläche die rechten Seiten der Gleichungen (1) und (2) paarweise übereinstimmen. Die drei entstehenden Relationen sind zwei unabhängigen

(3) $$\begin{aligned} \Phi(u, v, u', v') &= 0 \\ \Psi(u, v, u', v') &= 0 \end{aligned}$$

äquivalent, weil $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ einerseits und $\bar{x}(u', v')$, $\bar{y}(u', v')$, $\bar{z}(u', v')$ andererseits durch eine und dieselbe Gleichung $F(x, y, z) = 0$ oder $z = f(x, y)$ verbunden sind.

Solche Gleichungen (3) bestehen z. B. für ein dreiachsiges Ellipsoid zwischen den beiden Größen u, v, die in der Darstellung

$$x^2 = \frac{a^2(a^2 - u)(a^2 - v)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \ldots$$

(§ 10 (9)) vorkommen, und den Größen u', v' in den Formeln

$$x = a \cos u' \cos v', \ldots$$

(vgl. § 8 (1)).

Ist bloß das Gleichungssystem (1) gegeben, so kann man zu irgend einer zweiten Darstellung der Fläche dadurch übergehen, daß man die funktionalen Beziehungen (3) willkürlich annimmt. Nur müssen sie vor allem so beschaffen sein, daß sich u' und v' aus ihnen als eindeutige und eindeutig-umkehrbare Funktionen von u und v ergeben. Das heißt: Wenn man

(4) $$\begin{aligned} u' &= \varphi(u, v) \\ v' &= \psi(u, v) \end{aligned}$$

setzt, wo die Funktionen φ und ψ innerhalb eines gewissen Bereiches der Größen u, v den Bedingungen der Eindeutigkeit, Endlichkeit und Stetigkeit genügen, so soll sich diesem Bereich ein anderer für die Größen u', v' so zuordnen lassen, daß auch umgekehrt die aus (4) oder (3) folgenden Ausdrücke

(5) $$\begin{aligned} u &= \varphi_1(u', v') \\ v &= \psi_1(u', v') \end{aligned}$$

innerhalb des zweiten Bereiches dieselben Bedingungen erfüllen. Die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Funktionen φ, ψ, φ_1, ψ_1

seien ebenfalls eindeutig, endlich und stetig, und es sollen endlich für keine Stelle die beiden partiellen Ableitungen einer und derselben Funktion gleichzeitig verschwinden oder auch nur die Funktionaldeterminante von u' und v' nach u und v gleich Null sein.

Da vermöge (4) die Gleichungen

$$x(u, v) = \bar{x}(u', v'), \quad y(u, v) = \bar{y}(u', v'), \quad z(u, v) = \bar{z}(u', v')$$

in Identitäten übergehen, so hat man

$$(6) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial u}, \ldots \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial v}, \ldots \end{aligned}$$

und entsprechend

$$(7) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u'} &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u'}, \ldots \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v'} &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v'}, \ldots . \end{aligned}$$

Aus (6) folgt, wenn die Fundamentalgrößen erster Ordnung für die Parameter u', v' mit E', F', G' bezeichnet werden, nach § 9 (4):

$$(8) \qquad \begin{aligned} E &= E'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + 2F'\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u} + G'\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2 \\ F &= E'\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + F'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v}\right) + G'\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} \\ G &= E'\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + 2F'\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial v} + G'\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2, \end{aligned}$$

und aus (7) ergibt sich eine zweite Form der Transformationsgleichungen:

$$(9) \qquad \begin{aligned} E' &= E\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\right)^2 + 2F\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial u'} + G\left(\frac{\partial v}{\partial u'}\right)^2 \\ F' &= E\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial u}{\partial v'} + F\left(\frac{\partial u}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} + \frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial u}{\partial v'}\right) + G\frac{\partial v}{\partial u'}\frac{\partial v}{\partial v'} \\ G' &= E\left(\frac{\partial u}{\partial v'}\right)^2 + 2F\frac{\partial u}{\partial v'}\frac{\partial v}{\partial v'} + G\left(\frac{\partial v}{\partial v'}\right)^2. \end{aligned}$$

Diese Formeln gehen aus (8) durch Vertauschung von u, v, E, F, G mit u', v', E', F', G' hervor.

Aus der ersten von ihnen kann man, unabhängig von der Definition der Größe E' mittels der Ableitungen der kartesischen Koordinaten, leicht erkennen, daß E' positiv ist. Denn die quadratische

Form der Größen $\frac{\partial u}{\partial u'}$, $\frac{\partial v}{\partial u'}$, durch welche diese Fundamentalgröße dargestellt wird, läßt sich in der Gestalt

$$\frac{1}{E}\left[\left(E\frac{\partial u}{\partial u'}+F\frac{\partial v}{\partial u'}\right)^2+(EG-F^2)\left(\frac{\partial v}{\partial u'}\right)^2\right]$$

schreiben und ist definit, weil E und $EG-F^2$ positiv sind. Ebenso ist $G'>0$. Ferner wird

$$(10)\qquad E'G'-F'^2=\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial u'} \\ \frac{\partial u}{\partial v'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{vmatrix}^2.$$

Dies folgt ohne neue Rechnung sofort aus der Identität § 11 (10), wenn darin

$$\xi_1=\frac{\partial u}{\partial u'},\quad \xi_2=\frac{\partial v}{\partial u'},\quad \eta_1=\frac{\partial u}{\partial v'},\quad \eta_2=\frac{\partial v}{\partial v'}$$

gesetzt wird. Da hiernach auch $E'G'-F'^2$ positiv ist, so erfüllen E', F', G' auf Grund der Transformationsgleichungen (9) dieselben Bedingungen, die im § 10 für E, F, G festgesetzt worden sind.

Zwischen den vier partiellen Ableitungen, die in (9) vorkommen, und ihren inversen $\frac{\partial u'}{\partial u}$, $\frac{\partial u'}{\partial v}$, $\frac{\partial v'}{\partial u}$, $\frac{\partial v'}{\partial v}$ bestehen vier Relationen, die aus der Differentialrechnung bekannt sind, übrigens im Rahmen der vorliegenden Untersuchung leicht aus dem simultanen System (6, 7) abgelesen werden könnten. Diese sogenannten Umkehrungsformeln lauten, wenn

$$(11)\qquad \frac{\partial(u',v')}{\partial(u,v)}=\Delta'$$

gesetzt wird:

$$(12)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial u'}&=\frac{1}{\Delta'}\frac{\partial v'}{\partial v}, & \frac{\partial u}{\partial v'}&=-\frac{1}{\Delta'}\frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial v}{\partial u'}&=-\frac{1}{\Delta'}\frac{\partial v'}{\partial u}, & \frac{\partial v}{\partial v'}&=\frac{1}{\Delta'}\frac{\partial u'}{\partial u}. \end{aligned}$$

Mit ihrer Hilfe kann man den Transformationsgleichungen noch eine andere Gestalt geben. Man erhält nämlich zunächst

$$E'=\frac{1}{\Delta'^2}\left[E\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2-2F\frac{\partial v'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}+G\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2\right],\ldots;$$

und da

$$(13)\qquad \frac{\partial(u,v)}{\partial(u',v')}=\frac{1}{\Delta'},$$

also nach (10)

$$(14)\qquad E'G'-F'^2=\frac{1}{\Delta'^2}(EG-F^2)$$

wird:

$$(15)\qquad \begin{aligned} \frac{E'}{E'G'-F'^2} &= \frac{E\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial v'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u} + G\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2}{EG-F^2} \\ \frac{-F'}{E'G'-F'^2} &= \frac{E\frac{\partial v'}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial v} - F\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}\right) + G\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial u}}{EG-F^2} \\ \frac{G'}{E'G'-F'^2} &= \frac{E\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial u} + G\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2}{EG-F^2}. \end{aligned}$$

Ohne Benutzung der Umkehrungsformeln würden diese Ausdrücke aus (8) durch Auflösung gefolgt sein.

Die Gleichungen (15) liefern nun die neuen Fundamentalgrößen, allerdings mit dem Nenner $E'G'-F'^2$, dargestellt durch die alten, sowie durch die Ableitungen der neuen Parameter nach den alten. Diese Form der Transformationsgleichungen ist deshalb am brauchbarsten, weil in den Anwendungen gewöhnlich die neuen krummlinigen Koordinaten als Funktionen der alten erscheinen, nicht umgekehrt.

Die Gleichungen (8) oder (9) hätten noch auf einem anderen Wege abgeleitet werden können als durch Berechnung der Fundamentalgrößen mittels der Einzelausdrücke, die zu ihrer Definition dienen. Denn E, F, G erscheinen, wie schon am Schlusse des § 9 erwähnt, als Koeffizienten einer binären quadratischen Differentialform, und diese hat, als Quadrat des Linienelements zwischen zwei bestimmten Flächenpunkten, eine von der Wahl der krummlinigen Koordinaten unabhängige Bedeutung. Drückt man demnach ds^2 auch in den neuen Parametern aus, so erhält man die Beziehung

$$(16)\qquad E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2,$$

in die man nur

$$(17)\qquad \begin{aligned} du' &= \frac{\partial u'}{\partial u}du + \frac{\partial u'}{\partial v}dv \\ dv' &= \frac{\partial v'}{\partial u}du + \frac{\partial v'}{\partial v}dv \end{aligned}$$

einzuführen hat, um dann durch Koeffizientenvergleichung die Relationen zwischen E, F, G; E', F', G' wieder zu erhalten.

Verbindungen zwischen Fundamentalgrößen der Fläche und partiellen Ableitungen von Funktionen der Parameter, wie sie auf den rechten Seiten der Gleichungen (15) stehen, kommen in der Flächentheorie so häufig vor, daß es zweckmäßig ist, die Gesamtheit der Operationen, die zur Bildung der einzelnen Ausdrücke gebraucht

werden, jedesmal durch ein einziges Zeichen zu charakterisieren. Für irgend zwei Funktionen $\varphi(u,v)$ und $\psi(u,v)$ werde

$$\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u}-F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}}{EG-F^2}=\Delta(\varphi,\psi) \tag{18}$$

und, für $\psi=\varphi$ hieraus hervorgehend,

$$\frac{G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2-2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}{EG-F^2}=\Delta^1\varphi \tag{19}$$

gesetzt. $\Delta(\varphi,\psi)$ heißt der Zwischenparameter der beiden Funktionen, $\Delta^1\varphi$ der Differentialparameter der Funktion φ, und zwar, weil nur erste Ableitungen vorkommen, Differentialparameter erster Ordnung. Unter Anwendung dieser Bezeichnungen erhalten die Gleichungen (15) die Form:

$$\begin{aligned}\frac{E'}{E'G'-F'^2}&=\Delta^1v'\\ \frac{-F'}{E'G'-F'^2}&=\Delta(u',v')\\ \frac{G'}{E'G'-F'^2}&=\Delta^1u'.\end{aligned} \tag{20}$$

§ 13.

Weitere Formeln für die Winkel in der Tangentialebene.

Wenn man von der im § 11 ausgeführten Bestimmung des Winkels zweier Kurven auf der Fläche absieht, so kann man diese Bestimmung auch an die Theorie der Koordinatentransformation knüpfen. Zu dem Ende betrachte man die beiden Linien $\varphi(u,v)=C$, $\psi(u,v)=C'$ als einem Netz von Kurven angehörig und wähle diese zu Koordinatenlinien. Und zwar werde

$$\varphi(u,v)=u',\qquad \psi(u,v)=v'$$

angenommen. Für die trigonometrischen Funktionen des neuen Koordinatenwinkels ϑ' gelten nach § 10 (3, 6) die Formeln

$$\cos\vartheta'=\frac{F'}{\sqrt{E'G'}}$$

$$\sin\vartheta'=\frac{T'}{\sqrt{E'G'}},$$

in denen T' die positive Quadratwurzel aus $E'G'-F'^2$ bedeutet. Nun ist (S. 40 (14))

(1) $$T' = \frac{\varepsilon'}{\Delta'} T.$$

Zusammen mit den obigen Transformationsgleichungen (20) liefern diese Formeln die Ausdrücke

(2) $$\cos\vartheta' = \frac{-\Delta(u', v')}{\sqrt{\Delta^1 u'}\cdot\sqrt{\Delta^1 v'}}$$

(3) $$\sin\vartheta' = \frac{\varepsilon'\Delta'}{T\sqrt{\Delta^1 u'}\cdot\sqrt{\Delta^1 v'}}.$$

Der erste wird mit § 11 (18) identisch, wenn man ϑ' gleich w oder $2\pi - w$ setzt, der zweite aber kann sich von dem entsprechenden (§ 11 (19)) durch ein Vorzeichen unterscheiden. Dies rührt daher, daß ϑ' als zwischen 0 und π gelegen definiert worden ist, während für w das Intervall $(0 \ldots 2\pi)$ zugelassen war. Ist nun $w < \pi$, also $\Delta' > 0$, $\varepsilon' = +1$, so bedeutet das, die positiven Richtungen der beiden Linien $u =$ const. und $u' =$ const. liegen auf derselben Seite der u-Linie, wenn man sich die u'-Linie ($v' =$ const.) auch der positiven Richtung nach mit dieser zusammenfallend denkt (Fig. 5); dagegen verlaufen jene Richtungen unter derselben Annahme auf entgegengesetzten Seiten der u-Linie, wenn $w > \pi$, $\Delta' < 0$, $\varepsilon' = -1$ ist (Fig. 6). Oder: Die Tangenten der alten und der neuen Koordinatenlinien, deren positive Richtungen durch die Festsetzungen in den Paragraphen 10 und 11 bestimmt sind, bilden in der Tangentialebene der Fläche zwei äquivalente oder nicht-äquivalente Achsenpaare, je nachdem die Funktionaldeterminante $\Delta' \equiv \frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v}$ positiv oder negativ ist. Man kann, von besonderen Fällen abgesehen, über das Vorzeichen dieser Determinante verfügen, indem man nötigenfalls das Vorzeichen eines Parameters umkehrt, wodurch die zu diesem Parameter gehörige Kurvenschar als solche nicht geändert wird. Für allgemeine flächentheoretische Untersuchungen ist die Festlegung des Zeichens zweckmäßig, und zwar soll

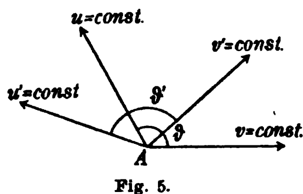


Fig. 5.

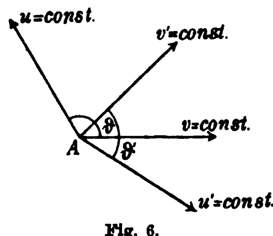


Fig. 6.

(4) $$\Delta' > 0$$

angenommen werden. Die Gleichung (1) heißt dann

(5) $$T' = \frac{T}{\Delta'}.$$

Setzt man noch

$$\frac{\Delta'}{T} = D(u', v'),$$

d. h.

$$(6)\qquad \frac{1}{T}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) = D(\varphi, \psi),$$

so nehmen die Gleichungen (2, 3) oder die etwas allgemeineren § 11(18, 19) die Form an

$$(7)\qquad \cos w = \frac{-\Delta(\varphi, \psi)}{\sqrt{\Delta^1\varphi}\sqrt{\Delta^1\psi}}$$

$$(8)\qquad \sin w = \frac{D(\varphi, \psi)}{\sqrt{\Delta^1\varphi}\sqrt{\Delta^1\psi}}.$$

Die durch (6) erklärte Funktion von u und v ist mit den am Schlusse des vorigen Paragraphen eingeführten durch die Identität

$$(9)\qquad \Delta^1\varphi\,.\,\Delta^1\psi - \Delta(\varphi, \psi)^2 = D(\varphi, \psi)^2$$

verbunden.

Aus (7) folgt als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Kurven $\varphi = C$, $\psi = C'$ aufeinander senkrecht stehen:

$$(10)\qquad \Delta(\varphi, \psi) = 0,$$

d. h., jetzt wieder unter Weglassung des Nenners T^2,

$$(11)\qquad G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v} = 0.$$

Die beiden Bestimmungsgrößen

$$(12)\qquad \frac{dv}{du} = \lambda_1,\quad \frac{\delta v}{\delta u} = \lambda_2$$

zweier Flächentangenten brauchen nicht immer einzeln als explizite Funktionen von u und v gegeben zu sein. Es kommt vielmehr häufig vor, daß sie als Wurzeln einer quadratischen Gleichung

$$(13)\qquad l_{11} + 2l_{12}\lambda + l_{22}\lambda^2 = 0$$

definiert sind; oder, wenn gleich wieder auf die Theorie der Kurvennetze ausgegangen wird: daß die Bestimmungsgleichungen $\varphi(u, v) = C$, $\psi(u, v) = C'$ der beiden Scharen des Netzes als Integrale einer Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades

$$(14)\qquad l_{11}\,du^2 + 2l_{12}\,du\,dv + l_{22}\,dv^2 = 0$$

erscheinen. l_{11}, l_{12}, l_{22} sind gegebene reelle Funktionen von u und v. Spezielle solche Netze, deren Bedeutung aber weit über die von bloßen

Beispielen hinausreicht, werden später, im VII. Abschnitt, behandelt werden.

Die linke Seite der Gleichung (14) ist eine binäre quadratische Differentialform,

(15) $$l_{11}\,du^2 + 2l_{12}\,du\,dv + l_{22}\,dv^2 \equiv \Lambda.$$

Ihre Determinante

(16) $$l_{11}\,l_{22} - l_{12}^2 \equiv l$$

darf nicht Null sein, weil sonst die beiden durch (13) bestimmten Tangenten zusammenfallen würden. Die Voraussetzungen über Realität erfordern aber ferner, der Determinante ein bestimmtes Vorzeichen, das negative, beizulegen.

Setzt man nun die beiden Ausdrücke (12) in § 11 (8) ein, so ergibt sich

$$\cos w = \pm \frac{E + F(\lambda_1 + \lambda_2) + G\lambda_1\lambda_2}{\sqrt{(E + 2F\lambda_1 + G\lambda_1^2)(E + 2F\lambda_2 + G\lambda_2^2)}},$$

und nach Durchführung der Rechnung, wobei die Relationen

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2l_{12}}{l_{22}}, \quad \lambda_1\lambda_2 = \frac{l_{11}}{l_{22}}$$

zu benutzen sind:

(17) $$\cos w = \varepsilon \frac{Gl_{11} - 2Fl_{12} + El_{22}}{\sqrt{(Gl_{11} - 2Fl_{12} + El_{22})^2 - 4(EG - F^2)(l_{11}l_{22} - l_{12}^2)}}$$

(18) $$\sin w = \varepsilon' \frac{2T\sqrt{-(l_{11}l_{22} - l_{12}^2)}}{\sqrt{(Gl_{11} - 2Fl_{12} + El_{22})^2 - 4(EG - F^2)(l_{11}l_{22} - l_{12}^2)}}.$$

Über die Vorzeichen ε, ε' läßt sich hier nur sagen, daß ihre Wahl im gegebenen Falle von Zweckmäßigkeitsgründen abhängt. Man könnte z. B. den Winkel w dadurch genauer definieren, daß man die Zeichen einfach wegläßt.

Wie leicht zu sehen, bleiben die gefundenen Ausdrücke gültig, wenn l_{11} oder l_{22} verschwindet. Sind diese Größen beide Null, also l_{12} von Null verschieden, so sind $v = C$, $u = C'$ die beiden Integrale der Differentialgleichung $2l_{12}\,du\,dv = 0$, die betrachteten Flächentangenten also die der Koordinatenlinien. Die Formeln gehen, abgesehen vom Vorzeichen, in die speziellen des § 10 über.

Um die Ausdrücke (17, 18) den Formeln (7, 8) möglichst anzupassen, dividieren wir noch im Zähler und Nenner durch T^2. Die sechs Größen E, F, G; l_{11}, l_{12}, l_{22} kommen dann nur in zwei Verbindungen vor. Es sei, der Gleichförmigkeit mit dem Ansatze (15) wegen,

(19) $$E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2 \equiv \mathsf{A},$$

und es werde außerdem

(20) $$\frac{Gl_{11} - 2Fl_{12} + El_{22}}{EG - F^2} = H(\mathsf{A}, \Lambda)$$

(21) $$\frac{l_{11} l_{22} - l_{12}^2}{EG - F^2} = K(\mathsf{A}, \Lambda)$$

gesetzt. Die Gleichungen (17, 18) heißen

(22) $$\cos w = \varepsilon \frac{H(\mathsf{A}, \Lambda)}{\sqrt{H(\mathsf{A}, \Lambda)^2 - 4K(\mathsf{A}, \Lambda)}}$$

(23) $$\sin w = \varepsilon' \frac{2\sqrt{-K(\mathsf{A}, \Lambda)}}{\sqrt{H(\mathsf{A}, \Lambda)^2 - 4K(\mathsf{A}, \Lambda)}}.$$

Für die Orthogonalität der beiden durch $\Lambda = 0$ definierten Tangenten ergibt sich aus (22) die Bedingung

(24) $$H(\mathsf{A}, \Lambda) = 0,$$

das heißt

(25) $$Gl_{11} - 2Fl_{12} + El_{22} = 0.$$

§ 14.

Die Tangentialebene für die II. und III. Flächendarstellung. Singuläre Punkte.

Im § 11 ist die Tangentialebene einer Fläche definiert und ihre Gleichung für die Flächendarstellung (I) (§ 8) gegeben worden. Geht man zu der Darstellung

$$\text{(III)} \quad z = z(x, y)$$

über, indem man $u = x$, $v = y$ annimmt, also

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 1$$

setzt, so erhält man unter Annahme der Bezeichnungen

(1) $$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q$$

für die Koeffizienten der Gleichung § 11 (5) die Werte

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = -p, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} = -q, \quad \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = 1.$$

Die Gleichung der Tangentialebene selbst wird

(2) $$\mathfrak{z} - z = p(\mathfrak{x} - x) + q(\mathfrak{y} - y).$$

Man kann aber die Darstellung (III) auch zu

$$\text{(II)} \quad F(x, y, z) = 0$$

in Beziehung bringen, indem man (III) als Auflösung von (II) betrachtet. Dann ist, für $\frac{\partial F}{\partial z} \gtrless 0$,

$$(3) \qquad p = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad q = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

und (2) wird durch

$$(4) \qquad \frac{\partial F}{\partial x}(\mathfrak{x} - x) + \frac{\partial F}{\partial y}(\mathfrak{y} - y) + \frac{\partial F}{\partial z}(\mathfrak{z} - z) = 0$$

ersetzt.

Vermöge der Darstellung § 2 (6) erscheint hiernach die Tangente einer Raumkurve, die als Schnitt zweier Flächen gegeben ist, als Durchschnittslinie der beiden Tangentialebenen dieser Flächen.

Für das dreiachsige Ellipsoid (§ 8 (2)) wird die Gleichung (4)

$$\frac{x\mathfrak{x}}{a^2} + \frac{y\mathfrak{y}}{b^2} + \frac{z\mathfrak{z}}{c^2} = 1.$$

Die Form (4) ergibt sich auf direktem Wege durch Elimination der Differentialverhältnisse $dx : dy : dz$ aus den beiden Gleichungen einer Flächentangente (§ 11 (2))

$$(5) \qquad \frac{\mathfrak{x} - x}{dx} = \frac{\mathfrak{y} - y}{dy} = \frac{\mathfrak{z} - z}{dz}$$

und der für die Differentiale geltenden Bedingung

$$(6) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0.$$

Man kann dann umgekehrt, wenn man nicht auf den inneren Zusammenhang von (II) und (III), sondern nur auf einen formalen Übergang von der einen Darstellung zu der anderen Gewicht legt, (2) aus (4) durch die Annahme

$$F(x, y, z) = z - z(x, y)$$

herleiten.

Die Gleichung (4) bleibt auch dann bestehen, wenn für den betrachteten Punkt eine oder zwei der drei ersten partiellen Ableitungen von $F(x, y, z)$ verschwinden. Nur wenn die drei Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

gleichzeitig stattfinden, hört sie auf zu gelten. Da aber dann, die Gleichung (II) eingerechnet, vier Relationen zwischen den drei kartesischen Koordinaten vorliegen, so können solche Punkte nur unter besonderen Voraussetzungen über die Funktion $F(x, y, z)$ existieren. Sie werden als singuläre Punkte bezeichnet und sind hier von der Betrachtung ausgeschlossen. Nur sei bemerkt, daß man, um jetzt den Ort der Tangenten zu ermitteln, die Differentiale aus (5) und der an die Stelle von (6) tretenden Bedingung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} dy\, dz + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} dz\, dx + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx\, dy = 0$$

zu eliminieren hätte. Man überblickt sofort, daß sich dabei wieder eine in $\mathfrak{x} - x$, $\mathfrak{y} - y$, $\mathfrak{z} - z$ homogene Gleichung ergibt, die aber nun von der zweiten Dimension ist und demnach einen Kegel mit der Spitze $(xyz) \equiv A$ darstellt. Treten bestimmte neue Bedingungen unter den zweiten partiellen Ableitungen von $F(x, y, z)$ hinzu, so kann der Kegel in zwei getrennte oder zusammenfallende Ebenen ausarten.

§ 15.

Normale der Fläche.

Eine gerade Linie, die auf der Tangentialebene im Berührungspunkte A senkrecht steht, heißt Normale der Fläche für diesen Punkt. Ihre Gleichungen für die Flächendarstellungen (I), (II) und (III) sind nach § 11 (5), § 14 (4) und (2):

(1) $$\mathfrak{x} - x : \mathfrak{y} - y : \mathfrak{z} - z = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} : \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} : \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

(2) $$\frac{\mathfrak{x} - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\mathfrak{y} - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{\mathfrak{z} - z}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

(3) $$\mathfrak{x} - x + p(\mathfrak{z} - z) = 0$$
$$\mathfrak{y} - y + q(\mathfrak{z} - z) = 0.$$

Für die Richtungskosinus X, Y, Z der Normale folgen hieraus die Proportionen

(4) $$X : Y : Z = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} : \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} : \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

(5) $$X : Y : Z = \frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}$$

(6) $$X : Y : Z = -p : -q : 1,$$

zu denen die Identität

(7) $$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

und eine Vorzeichenbestimmung hinzuzunehmen ist. Wird (4) durch

$$\mu X = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \quad \mu Y = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \quad \mu Z = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$$

ersetzt, so liefert (7) für den Proportionalitätsfaktor μ die Gleichung

$$\mu^2 = \Sigma\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 = T^2$$

(§ 10 (10)), also $\mu = \pm T$. Die positive Richtung der Normale möge nun durch die Annahme

$$\mu = + T$$

erklärt werden, so daß für die Richtungskosinus die Definitionsgleichungen

(8) $$X = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)$$
$$Y = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$
$$Z = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

oder (§ 13 (6))

(9) $$X = D(y, z), \qquad Y = D(z, x), \qquad Z = D(x, y)$$

gelten. Aus ihnen oder schon aus den Proportionen (4) folgen die häufig gebrauchten Identitäten

(10) $$X\frac{\partial x}{\partial u} + Y\frac{\partial y}{\partial u} + Z\frac{\partial z}{\partial u} = 0$$
$$X\frac{\partial x}{\partial v} + Y\frac{\partial y}{\partial v} + Z\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

die nach Multiplikation mit du, dv und Addition auf die Gleichung

(11) $$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

führen und umgekehrt durch sie ersetzt werden können. Diese Gleichung, die übrigens von der Art der Flächendarstellung unabhängig ist, besagt nichts weiter, als daß die Normale auf jeder Flächentangente senkrecht steht. Insbesondere kennzeichnen die Relationen (10), in der Form

$$\Sigma X\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right) = 0, \qquad \Sigma X\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0$$

geschrieben, nach § 10 (1, 2) die Orthogonalität der Normale zu den Tangenten der Koordinatenlinien.

Bildet man noch die Determinante der Richtungskosinus der Koordinatenlinien und der Normale, so erhält man

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial z}{\partial v} \\ X, & Y, & Z \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{EG}}\Sigma(X.TX) = \frac{T}{\sqrt{EG}} = \sin\vartheta.$$

Da dieser Ausdruck positiv ist, so kann die durch die Gleichungen (9) zunächst nur analytisch definierte positive Richtung der Flächennormale dadurch gekennzeichnet werden, daß das durch die Tangenten der Kurven $v = \text{const.}$ und $u = \text{const.}$ zusammen mit der Normale gebildete Achsensystem dem System x, y, z äquivalent ist. Denkt man sich also die positive x-Achse mit der positiven Tangente der ersten Koordinatenlinie zusammenfallend und die beiden positiven Richtungen der y-Achse und der Tangente der zweiten Koordinatenlinie auf derselben Seite der x-Achse gelegen, so fallen die positiven Richtungen der z-Achse und der Flächennormale zusammen. Oder, wenn B und C auf der positiven ersten und zweiten Koordinatenlinie dem Punkte A benachbart sind (vgl. Fig. 3, S. 31), D einen Punkt auf der positiven Flächennormale bezeichnet, so ist die durch die Punktfolge $ABCD$ bestimmte Windung positiv.

Für die Flächendarstellung (II) soll das Vorzeichen des nach (5) auftretenden Proportionalitätsfaktors so gewählt werden, daß

$$X = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

(12)
$$Y = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

$$Z = \frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}},$$

wird. Auch die Bedeutung dieser Annahme läßt sich in einfacher Weise geometrisch kennzeichnen. Durch die Fläche $F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0$ werden in der Nähe von A die Punkte des Raumes, deren Koordinaten der Ungleichung

(13) $$F(x', y', z') > 0$$

genügen, von denen geschieden, für welche

(14) $$F(x', y', z') < 0$$

ist. Sagt man von den Punkten, die die erste oder zweite dieser Ungleichungen befriedigen, daß sie außerhalb oder innerhalb der Fläche $F = 0$ liegen, so hat es einen Sinn, von einer nach außen gerichteten Normale im Punkte A zu sprechen. Liegt nun $A' \equiv (x'y'z')$ außerhalb der Fläche (Fig. 7), und wird

$$x' = x + \delta x, \quad y' = y + \delta y, \quad z + \delta z$$

gesetzt, so ist

$$F(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) > 0,$$

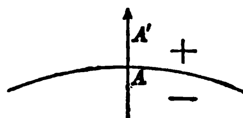


Fig. 7.

und bei hinreichender Kleinheit der Inkremente entscheidet über das Vorzeichen der linken Seite dieser Ungleichung im allgemeinen das von

$$\frac{\partial F}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial z}\delta z \equiv \delta F.$$

F selbst verschwindet für den Punkt A, aber nicht gleichzeitig die drei partiellen Ableitungen erster Ordnung von F (S. 47—48). Wird insbesondere A' auf der Normale von A angenommen und der unendlichkleine Abstand der beiden Punkte mit δr bezeichnet, so sind

$$\frac{\delta x}{\delta r}, \quad \frac{\delta y}{\delta r}, \quad \frac{\delta z}{\delta r}$$

die Richtungskosinus der nach außen gehenden Normale. Sie müssen, von einem Vorzeichen ε abgesehen, der Reihe nach mit den drei Ausdrücken (12) übereinstimmen. Setzt man nun, für

(15) $$\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2} = W,$$

die Werte

$$\delta x = \varepsilon \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\delta r}{W}, \cdots$$

in die Bedingung $\delta F > 0$ ein, so findet man

$$\varepsilon \frac{\delta r}{W}\sum\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 \equiv \varepsilon W \delta r > 0.$$

Wegen $W > 0$, $\delta r > 0$ ist diese Ungleichung mit

$$\varepsilon = +1$$

gleichbedeutend, d. h. die Formeln (12) geben, ohne weiteres Vorzeichen, die Kosinus der nach außen gerichteten Normale.

Daß übrigens die hier benutzten Bezeichnungen innen und außen sich nicht immer mit der geometrischen Anschauung zu decken brauchen, kann nicht überraschen, wenn man bedenkt, daß bei einer Umkehrung des Vorzeichens der Funktion F Inneres und Äußeres sich vertauschen, während die Flächengleichung selbst ungeändert bleibt.

Für die dritte Darstellung der Fläche erhält man als Richtungskosinus der Normale:

$$(16)\qquad X = \frac{-\varepsilon p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad Y = \frac{-\varepsilon q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad Z = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p^2+q^2+1}}.$$

Da bei dieser Darstellung die z-Koordinate bevorzugt ist, so könnte man etwa festsetzen, daß die positive Flächennormale mit der positiven z-Achse einen spitzen Winkel bilden solle, was auf die Annahme $\varepsilon = +1$ hinauskommt. Dann würde aber z. B. für die Kugel

$$z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

die Normale auf der positiven Seite der (xy)-Ebene nach außen, auf der negativen nach innen (im geometrischen Sinne) gerichtet sein, während es sich bei einer so einfachen Fläche offenbar empfiehlt, die positive Normale in allen Punkten entweder nach außen oder nach innen gehen zu lassen. Es ist also für die Darstellung $z = z(x, y)$ zweckmäßiger, das Zeichen ε in den Formeln mitzuführen, als es ein für allemal festzulegen.

§ 16.

Tangentialnormale einer Flächenkurve. Die allgemeinen Frenetschen Formeln.

Die krummen Linien auf gegebener Fläche sind bis jetzt nur unter zwei speziellen Gesichtspunkten in Betracht gezogen worden: einmal insofern sie Koordinatenlinien sein können, und zweitens hinsichtlich der Lage ihrer Tangenten in der Berührungsebene der Fläche. Will man nun eine Flächenkurve c in der Nähe eines Punktes A genauer untersuchen, so hat man die analytischen und geometrischen Eigenschaften von c zu denen der Fläche, die c enthalten soll, in Beziehung zu setzen. Und zwar ist diese Verknüpfung so einzurichten, daß man sicher sein darf, nicht nur neue Formeln aufzuhäufen, sondern auch übersichtliche geometrische Resultate zu erzielen.

Nun tritt für eine Flächenkurve zu den drei geraden Linien, die in der allgemeinen Theorie der Raumkurven das Hauptdreikant der Kurve bilden, noch eine vierte ausgezeichnete Gerade hinzu, die Flächennormale. Diese Linie wird also irgendwie, und so früh wie

möglich, in die Theorie der Kurven auf den Flächen eingeführt werden müssen. Tangente und Flächennormale können durch Hinzunahme einer weiteren Kurvennormale, nämlich des Schnittes der Normalebene der Kurve mit der Tangentialebene der Fläche, zu einem rechtwinkligen Dreikant ergänzt werden. Als Berührungslinie der Fläche soll die neue Normale die Tangentialnormale der Kurve heißen. Nach Festlegung positiver Richtungen auch für die Achsen des zweiten Dreikants kann dessen Lage gegen das erste durch eine Winkelgröße bestimmt werden, weil die beiden Achsensysteme die Tangente gemein haben. Nun war die positive Richtung t dieser Geraden willkürlich; sie hing von dem Prinzip des Fortganges auf der Kurve ab. Für die Flächennormale ist die positive Richtung n im vorigen Paragraphen erklärt worden. Die positive Richtung t' der Tangentialnormale soll jetzt durch die Bestimmung

$$t, t', n \sim x, y, z$$

oder, weil

$$t, b, h \sim x, y, z$$

war, durch

$$t', n \sim b, h$$

fixiert werden. Da b vom Fortgangsprinzip abhängt, so gilt dasselbe auch von t'.

Bei der Untersuchung, welche geometrischen Größen man ferner zu benutzen hat, um die Theorie der Flächenkurven weiterzuführen, können die Frenetschen Formeln als Leitfaden dienen. Man kann nämlich fragen, ob sich für das Dreikant t, t', n ein Gleichungssystem aufstellen läßt, das dem Frenetschen für das Dreikant t, b, h entspricht. Um aber mit dieser Frage einen genauen Sinn zu verbinden, muß man sich klar machen, aus welchen Ansätzen die Frenetschen Formeln eigentlich entspringen. Dabei kommt es nur auf das erste und zweite System an, denn das dritte war aus diesen in sehr einfacher Weise abzuleiten (S. 15). Die Systeme (I) und (II) nun sind in den Paragraphen 4 und 5 durch Differentiation von a und a' und Zusammenstellung der gefundenen Ausdrücke mit denen von a'', k und k' gebildet worden. Für die Krümmung und die Windung folgten noch aus den Frenetschen Formeln die Darstellungen (§ 6 (2, 3))

$$k = \Sigma a'' \Theta a \tag{1}$$

$$k' = \Sigma a'' \Theta a'. \tag{2}$$

Man kann nun umgekehrt diese in Θa, Θb, Θc; $\Theta a'$, $\Theta b'$, $\Theta c'$ linearen Ausdrücke an die Spitze stellen, durch geometrische Differentiation der Relationen

(3) $$\Sigma a^2 = 1, \quad \Sigma a'^2 = 1, \quad \Sigma a a' = 0$$

weitere lineare Gleichungen zwischen jenen sechs Größen bilden, nämlich

(4) $$\Sigma a\, \Theta a = 0$$

(5) $$\Sigma a'\, \Theta a' = 0$$

(6) $$\Sigma a\, \Theta a' + \Sigma a'\, \Theta a = 0,$$

und dann die für die Binormale charakteristische Eigenschaft

(7) $$\Sigma a'\, \Theta a = 0,$$

mittels deren (6) in

(8) $$\Sigma a\, \Theta a' = 0$$

übergeführt wird, hinzunehmen. Dann erhält man zwei Gruppen von Gleichungen (4, 7, 1) und (8, 5, 2), aus denen durch Auflösung nach $\Theta a, \ldots$, und zwar am einfachsten durch das im § 6 (S. 18) angegebene Verfahren, die Frenetschen Formeln (I) und (II) wieder hervorgehen.

Soll diese Anschauungsweise für das Dreikant t, t', n nutzbar gemacht werden, so bedarf es der Einführung einer Reihe von Bezeichnungen. Für die Richtungskosinus der Flächennormale n sollen die Zeichen X, Y, Z dauernd beibehalten, die Richtungskosinus von t aber jetzt der Gleichförmigkeit wegen mit A, B, C bezeichnet werden. D. h. es treten $A, \ldots$ immer dann an die Stelle von $a, \ldots$, wenn die Kurve c ausdrücklich als Flächenkurve gekennzeichnet werden soll. Ferner sei

$$t' \equiv (A'B'C'),$$

also

(9) $$\begin{aligned} A' &= CY - BZ \\ B' &= AZ - CX \\ C' &= BX - AY. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (3) werden durch

$$\Sigma A^2 = 1, \quad \Sigma A'^2 = 1, \quad \Sigma A A' = 0,$$

und demnach (4, 5, 6) durch

(10) $$\Sigma A\, \Theta A = 0$$

(11) $$\Sigma A'\, \Theta A' = 0$$

(12) $$\Sigma A\, \Theta A' + \Sigma A'\, \Theta A = 0$$

ersetzt. Den Formeln (1) und (2) entsprechen die folgenden:

(13) $$\Sigma X\, \Theta A = n$$

(14) $$\Sigma X\, \Theta A' = t.$$

Die durch sie definierten Größen n und t können mit den ebenso bezeichneten Richtungen nicht verwechselt werden. Auf Grund der Frenetschen Formeln steht zu erwarten, daß diese Größen für die Theorie der Flächenkurven eine mehr als bloß formale Bedeutung haben werden.

Die der Summe $\Sigma a' \Theta a$ entsprechende $\Sigma A' \Theta A$ muß hier im allgemeinen als von Null verschieden angenommen werden, weil sonst t' mit b zusammenfallen würde. Es sei

$$\Sigma A' \Theta A = g \tag{15}$$

oder auch, nach (12),

$$\Sigma A \Theta A' = -g. \tag{16}$$

Dann kann man ΘA, ΘB, ΘC; $\Theta A'$, $\Theta B'$, $\Theta C'$ aus den beiden Gleichungssystemen (10, 15, 13)

$$\begin{aligned} A\Theta A + B\Theta B + C\Theta C &= 0 \\ A'\Theta A + B'\Theta B + C'\Theta C &= g \\ X\Theta A + Y\Theta B + Z\Theta C &= n \end{aligned}$$

und (16, 11, 14)

$$\begin{aligned} A\Theta A' + B\Theta B' + C\Theta C' &= -g \\ A'\Theta A' + B'\Theta B' + C'\Theta C' &= 0 \\ X\Theta A' + Y\Theta B' + Z\Theta C' &= t \end{aligned}$$

dadurch berechnen, daß man die drei Gleichungen jedes Systems der Reihe nach mit A, A', X; B, B', Y; C, C', Z multipliziert und addiert. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \Theta A &= gA' + nX \\ \Theta B &= gB' + nY \\ \Theta C &= gC' + nZ \end{aligned} \tag{a}$$

$$\begin{aligned} \Theta A' &= -gA + tX \\ \Theta B' &= -gB + tY \\ \Theta C' &= -gC + tZ. \end{aligned} \tag{b}$$

Hierzu treten noch die unter Benutzung von (a) und (b) aus

$$A^2 + A'^2 + X^2 = 1, \ldots$$

durch geometrische Differentiation hervorgehenden Formeln

$$\begin{aligned} \Theta X &= -nA - tA' \\ \Theta Y &= -nB - tB' \\ \Theta Z &= -nC - tC'. \end{aligned} \tag{c}$$

Sämtliche 3 . 3 Gleichungen (*a*), (*b*), (*c*) lassen sich symbolisch in die eine zusammenziehen:

$$(17)\quad \begin{pmatrix} \Theta A, & \Theta B, & \Theta C \\ \Theta A', & \Theta B', & \Theta C' \\ \Theta X, & \Theta Y, & \Theta Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g & n \\ -g & 0 & t \\ -n & -t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A' & X \\ B & B' & Y \\ C & C' & Z \end{pmatrix}.$$

Sie sollen als die allgemeinen Frenetschen Formeln der Theorie der Flächenkurven bezeichnet werden.

Die Systeme (a), (b), (c) geben zu einer Fülle von Aufgaben Veranlassung. Sie liefern, wie ersichtlich ist, die geometrische Ableitung jedes Kosinus einer der drei Richtungen t, t', n als homogene lineare Funktion der entsprechenden Kosinus der beiden anderen Richtungen; aber die Koeffizienten der Funktionen sind nur durch die Gleichungen (13), (14), (15) erklärt, in denen die geometrischen Ableitungen der Richtungskosinus selbst vorkommen. Man wird also die Definitionsgleichungen für n, t und g in eine andere Gestalt setzen, namentlich aber auch nach der geometrischen Bedeutung dieser drei Größen fragen müssen. Würden doch schon die speziellen Frenetschen Formeln ihr Hauptinteresse einbüßen, wenn man nicht wüßte, daß die durch (1) und (2) erklärten Größen mit der Krümmung und der Windung der Kurve identisch sind.

Es wird ferner die Aufgabe sein, sowohl für n, t und g wie auch für die auf den linken Seiten der Gleichungen (a, b, c) stehenden geometrischen Ableitungen explizite Ausdrücke aufzustellen, die mit der, längs der Kurve c geltenden funktionalen Beziehung zwischen u und v in einem einfachen und übersichtlichen Zusammenhange stehen.

§ 17.

Normalkrümmung, Tangentialkrümmung und geodätische Windung.

Zur Erreichung des ersten Zieles betrachtet man zweckmäßig die beiden Dreikante t, b, h und t, t', n gleichzeitig, weil die geometrische Bedeutung der in den Frenetschen Formeln vorkommenden Größen k und k' bereits bekannt ist. Dabei ist es nötig, den Winkel genau zu definieren, von dem, wie erwähnt, die gegenseitige Lage der Dreikante abhängt.

Um überhaupt die Beziehungen zwischen den verschiedenen Winkelgrößen, die in die Theorie der Flächenkurven eingeführt werden können, von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus zu überblicken, tut man gut, sich bestimmte Formeln der elementaren analytischen Geometrie gegenwärtig zu halten. Es seien t_1, t_2, t_3 drei Richtungen,

die zu einer und derselben Geraden t senkrecht sind und in Folge dessen durch Strahlen veranschaulicht werden können, die von einem Punkte ausgehen und in einer und derselben Ebene liegen. Zwischen den Systemen ihrer Richtungskosinus $(a_1\, b_1\, c_1)$, $(a_2\, b_2\, c_2)$, $(a_3\, b_3\, c_3)$ gilt die Relation

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Sie kann als Bedingung für die Existenz zweier Größen p, q aufgefaßt werden, die den drei Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} p a_1 + q a_2 &= a_3 \\ p b_1 + q b_2 &= b_3 \\ p c_1 + q c_2 &= c_3 \end{aligned}$$

gleichzeitig genügen. Multipliziert man diese zuerst mit a_1, b_1, c_1, dann mit a_2, b_2, c_2 und addiert jedesmal, setzt ferner

$$\begin{aligned} \sum a_1 a_2 &= \cos(t_1, t_2) = \cos w \\ \sum a_1 a_3 &= \cos(t_1, t_3) = \cos w_1 \\ \sum a_2 a_3 &= \cos(t_2, t_3) = \cos w_2, \end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} p + q \cos w &= \cos w_1 \\ p \cos w + q &= \cos w_2, \end{aligned}$$

also

$$(2)\qquad \begin{aligned} p &= \frac{1}{\sin^2 w}(\cos w_1 - \cos w \cos w_2) \\ q &= \frac{1}{\sin^2 w}(\cos w_2 - \cos w \cos w_1). \end{aligned}$$

Sind die Richtungen t_1 und t_2 aufeinander senkrecht, ist also $\cos w = 0$, $\sin^2 w = 1$, so heißen die Relationen (1):

$$(3)\qquad \begin{aligned} a_3 &= a_1 \cos w_1 + a_2 \cos w_2 \\ b_3 &= b_1 \cos w_1 + b_2 \cos w_2 \\ c_3 &= c_1 \cos w_1 + c_2 \cos w_2. \end{aligned}$$

Diese speziellen Formeln ergeben sich selbstverständlich auch aus dem elementaren Ausdruck für den Kosinus des Winkels zweier Richtungen, wenn man t_3 und außerdem der Reihe nach x, y, z auf das Achsensystem t, t_1, t_2 bezieht.

Es sei nun

$$t_4 \equiv (a_4\, b_4\, c_4)$$

eine vierte Richtung, die derselben Ebene angehört oder wenigstens parallel ist wie die drei bisher eingeführten, außerdem auf t_3 senkrecht steht und der Äquivalenz

$$t_3, t_4 \sim t_1, t_2$$

genügt. Setzt man in der Ebene die Drehung von t_1 nach t_2 durch den rechten Winkel hindurch als positiv fest, läßt die Winkel (t_1, t_3) und (t_2, t_3) durch positive Drehung von t_1 und t_2 nach t_3 entstehen und definiert (t_1, t_4) und (t_2, t_4) genau entsprechend, so hat man immer

$$(t_2, t_4) = (t_1, t_3),$$

und ferner, je nach der Lage von t_3 und t_4 zu den beiden anderen Geraden,

$$(t_2, t_3) = \frac{3\pi}{2} + (t_1, t_3) \qquad \text{(Fig. 8a)}$$

$$(t_2, t_3) = (t_1, t_3) - \frac{\pi}{2}, \qquad \text{(Fig. 8b und 8c)}$$

$$(t_1, t_4) = (t_1, t_3) + \frac{\pi}{2} \qquad \text{(Fig. 8a und 8b)}$$

$$(t_1, t_4) = (t_1, t_3) - \frac{3\pi}{2}, \qquad \text{(Fig. 8c)}$$

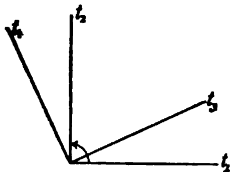


Fig. 8a.

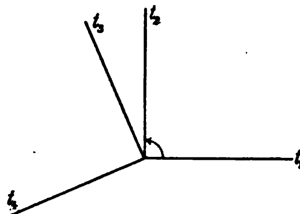


Fig. 8b.

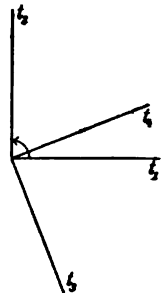


Fig. 8c.

also in allen Fällen

$$(4) \quad \begin{aligned} \cos(t_2, t_3) &= \sin(t_1, t_3) = \sin(t_2, t_4) \\ \cos(t_1, t_4) &= -\sin(t_1, t_3) = -\sin(t_2, t_4). \end{aligned}$$

Die erste Gleichung (3), die ursprünglich

$$a_3 = a_1 \cos(t_1, t_3) + a_2 \cos(t_2, t_3)$$

lautet, wird, wenn man jetzt den Winkel (t_2, t_4) bevorzugt:

$$(5) \qquad a_3 = a_1 \cos(t_2, t_4) + a_2 \sin(t_2, t_4),$$

und ihr entspricht für die vierte Richtung:

$$(6) \qquad a_4 = -a_1 \sin(t_2, t_4) + a_2 \cos(t_2, t_4).$$

Diese Formeln können auf die Normalebene einer Flächenkurve angewendet werden. Rechnet man in ihr die Drehung von der Binormale zur Hauptnormale, oder was dasselbe ist (S. 53), von der Tangentialnormale zur Flächennormale als positiv, so kann man für

der Reihe nach
$$\begin{matrix} t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t' & n & b & h \end{matrix}$$

annehmen, und es möge noch

$$(t_2, t_4) \equiv (n, h) = \varphi \tag{7}$$

gesetzt werden. Dann bedeutet also φ den durch positive Drehung der Flächennormale bis zum Zusammenfallen mit der Hauptnormale der Kurve entstandenen Winkel. Die Relationen (5) und (6), denen jedesmal zwei entsprechende für die beiden anderen kartesischen Koordinatenachsen an die Seite treten, nehmen die Form an

$$a' = \quad A' \cos\varphi + X \sin\varphi \tag{8}$$

$$a'' = -A' \sin\varphi + X \cos\varphi. \tag{9}$$

Entnimmt man nun, um die Definitionsgleichung für die Größe n (§ 16 (13)) umzugestalten, aus dem I. System Frenetscher Formeln die Werte von Θa, Θb, Θc, d. h. von ΘA, ΘB, ΘC, so erhält man

$$n = k \Sigma X a'' = k \cos(n, h),$$

$$n = k \cos\varphi. \tag{10}$$

Denkt man sich also auf der positiven Hauptnormale vom Kurvenpunkte aus eine Strecke abgetragen, die die Maßzahl der Krümmung darstellt, so ist n, vom Vorzeichen abgesehen, die Projektion der Krümmung auf die Normale der Fläche. Die durch die Gleichung (10) bestimmte Größe heißt die Normalkrümmung der Kurve c.

Von den beiden anderen, im vorigen Paragraphen eingeführten Größen möge zuerst die durch die Gleichung (15) definierte betrachtet werden, weil in ihrem Ausdruck ebenfalls die geometrischen Ableitungen der Richtungskosinus von t vorkommen, das I. System Frenetscher Formeln also wieder angewendet werden kann. Es ergibt sich

$$g = k \Sigma A' a'' = k \cos(t', h). \tag{11}$$

Diese Größe wird als Tangentialkrümmung von c bezeichnet. Nach der obigen Hilfskonstruktion erscheint sie, abgesehen vom Vorzeichen, als Projektion der Krümmung auf die Tangentialnormale der Kurve, d. h. auf die Tangentialebene der Fläche. Wie erst im Anschluß an

die Theorie der geodätischen Linien (§ 92) bewiesen werden kann, ist die Tangentialkrümmung auch mit der sogenannten geodätischen Krümmung identisch. Das Zeichen g ist hiervon hergenommen.

Aus (10) und (11) folgt

$$k^2 = n^2 + g^2; \tag{12}$$

das Quadrat der Krümmung einer Flächenkurve ist gleich der Summe der Quadrate der Normalkrümmung und der Tangentialkrümmung.

Bei dem Ausdruck (11) von g kann man stehen bleiben, wenn man den Winkel (t', h) beibehält. Solange nur der Kosinus vorkommt, bedarf es sogar keiner genaueren Definition dieses Winkels zweier Richtungen. Will man aber alles durch φ darstellen, so hat man nach einer der in (4) enthaltenen Formeln

$$\cos(t', h) = -\sin(n, h),$$

also

$$g = -k \sin\varphi \tag{13}$$

zu setzen.

Andererseits ergibt sich aus (11) durch Einführung der Werte von $A', \ldots$ (§ 16 (9)):

$$g = k\Sigma(CY - BZ)a''$$

$$= k \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

$$= k\Sigma X(bc'' - cb''),$$

$$g = -k\Sigma Xa', \tag{14}$$

$$g = -k\cos(n, b). \tag{15}$$

Diese Formel erhält man, wie sich von selbst versteht, auch dadurch, daß man direkt die Beziehung zwischen den Winkeln (t', h) und (n, b) oder allgemeiner (t_1, t_4) und (t_2, t_3) in Betracht zieht, nämlich

$$(t_1, t_4) = (t_2, t_3) - \pi \qquad \text{(Fig. 8a und 8c)}$$

$$(t_1, t_4) = (t_2, t_3) + \pi \qquad \text{(Fig. 8b)}.$$

Um die noch fehlende Größe t (§ 16 (14)) darzustellen, die aus einem später (§ 97) anzugebenden Grunde die **geodätische Windung** (geodätische Torsion) der Kurve c genannt wird, braucht man die Relationen (8, 9), aus denen

(16) $$A' = a' \cos\varphi - a'' \sin\varphi,$$

also

$$\Theta A' = \cos\varphi\ \Theta a' - \sin\varphi\ \Theta a'' - (a' \sin\varphi + a'' \cos\varphi)\ \Theta\varphi$$

hervorgeht. Benutzt man das II. und III. System Frenetscher Formeln, sowie die ebenfalls aus (8, 9) folgende Gleichung

(17) $$X = a' \sin\varphi + a'' \cos\varphi,$$

so wird

$$\Theta A' = kA \sin\varphi + (k' - \Theta\varphi)\, X,$$

und demnach

$$\Sigma X\, \Theta A' = k \sin\varphi\ \Sigma X A + (k' - \Theta\varphi)\, \Sigma X^2,$$

d. h.

(18) $$t = k' - \Theta\varphi.$$

Hiernach ist umgekehrt die Windung der Kurve gleich der Summe aus der geodätischen Windung und der geometrischen Ableitung des Winkels zwischen Hauptnormale und Flächennormale.

III. Abschnitt.

Die Normalkrümmung und das Krümmungsmaß.

§ 18.

Ausdruck der Normalkrümmung. Fundamentalgrößen zweiter Ordnung.

Von den drei Größen, die in den allgemeinen Frenetschen Formeln als Koeffizienten aufgetreten waren und deren geometrische Bedeutung nunmehr festgestellt ist, soll zuerst die Normalkrümmung in der am Schlusse des § 16 verlangten Form ausgedrückt werden. Dabei ist von der Gleichung § 17 (10)

$$n = k \cos \varphi$$

auszugehen. Auf das Produkt der Krümmung mit dem Kosinus des Winkels zwischen Hauptnormale und Flächennormale kommt man auch unabhängig von den Frenetschen Formeln, wenn man den allgemeinen Ausdruck

$$k = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}{ds^3}$$

(§ 4 (2)) auf eine Flächenkurve anwendet und die Irrationalität $\sqrt{\Sigma P^2}$ zu entfernen sucht. Aus

$$a'' = \frac{Q\,dz - R\,dy}{ds\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \ldots$$

(§ 3 (10)) folgt nämlich

$$k \cos \varphi = \frac{\Sigma X(Q\,dz - R\,dy)}{ds^4}.$$

Setzt man dann nach § 3 (12)

$$Q\,dz - R\,dy = d^2x\,\Sigma dx^2 - dx\,\Sigma dx\,d^2x,$$

so reduziert sich wegen

$$\Sigma X dx = 0$$

der Zähler des vorhergehenden Ausdruckes auf $(\Sigma dx^2)(\Sigma X\,d^2x)$, und es wird

(1) $$n = \frac{\Sigma X d^2x}{\Sigma dx^2}.$$

Diese von der Art der Flächendarstellung unabhängige Formel läßt sich in mannigfacher Weise umgestalten. Wird die Darstellung (I) bevorzugt, so sind für die ersten und zweiten Differentiale der kartesischen Koordinaten ihre entwickelten Ausdrücke

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

$$d^2x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} du\, dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial x}{\partial u} d^2u + \frac{\partial x}{\partial v} d^2v$$

. . . .

einzusetzen. Die beiden in $\Sigma X dx = 0$ enthaltenen Identitäten

$$\Sigma X \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \Sigma X \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

(§ 15 (10)) bewirken dann den Wegfall der Differentiale d^2u und d^2v. Während also die allgemeine Theorie der Krümmung ein Aufsteigen zu den zweiten Differentialen nötig macht, kommen in der Normalkrümmung nur die Differentiale erster Ordnung vor.

Für die auftretenden Koeffizienten von du^2, $2\,du\,dv$, dv^2 sollen folgende bleibenden Bezeichnungen eingeführt werden:

(2)
$$\begin{aligned} X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + Y \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + Z \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= L \\ X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + Y \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + Z \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} &= M \\ X \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + Y \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + Z \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} &= N. \end{aligned}$$

L, M, N heißen die **Fundamentalgrößen zweiter Ordnung** der Fläche. Bei Benutzung der Werte § 15 (8) für X, Y, Z kann man schreiben

(3)
$$L = \frac{1}{T} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$M = \frac{1}{T} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$N = \frac{1}{T} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Nun wird

(4)
$$\Sigma X d^2x = L du^2 + 2 M du\, dv + N dv^2,$$

und demnach

(5) $$n = \frac{L du^2 + 2M du\, dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2}.$$

Die Normalkrümmung erscheint durch einen Quotienten zweier binären quadratischen Differentialformen dargestellt. Die im Nenner stehende, $E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2 \equiv ds^2$, ist (§ 13 (19)) mit A bezeichnet worden; es sei noch

(6) $$L du^2 + 2M du\, dv + N dv^2 = \mathsf{B}.$$

Dann hat man schließlich

(7) $$n = \frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}}.$$

Der Ausdruck (5) ist ohne weiteres anwendbar, wenn längs der Flächenkurve, die man betrachtet, u und v als Funktionen einer unabhängigen Variablen gegeben sind. Ist ferner

(8) $$\varphi(u, v) = C$$

die analytische Darstellung der Kurve, also das Differentialverhältnis $\frac{dv}{du}$ durch die Bedingung

(9) $$\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv = 0$$

bestimmt, so wird

(10) $$n = \frac{N\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - 2M \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + L\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}{G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}.$$

Denkt man sich endlich die Kurve als einer Schar angehörig, versteht also unter der rechten Seite der Gleichung (8) eine willkürliche Konstante und betrachtet die Gleichung selbst als Integral der Differentialgleichung

(11) $$\mathfrak{M}_0 \equiv m_1 du + m_2 dv = 0,$$

wo das Verhältnis $m_1 : m_2$ als Funktion von u und v gegeben ist, so kann man die Formel (10) durch die allgemeinere

(12) $$n = \frac{N m_1^2 - 2M m_1 m_2 + L m_2^2}{G m_1^2 - 2F m_1 m_2 + E m_2^2}$$

ersetzen.

§ 19.

Ebene Schnitte einer Fläche. Deren Krümmung für die II. Darstellung der Fläche.

Bei der Beurteilung der Krümmung einer Raumkurve c in einem gegebenen Punkte $A \equiv (xyz)$ kam es nur auf die ersten und zweiten

Differentiale von x, y, z an; oder, wie man sagen darf, es werden nur die beiden dem A unendlichnahen Punkte $B \equiv (x + dx, \ldots)$ und $C \equiv (x + 2dx + d^2x, \ldots)$ gebraucht. Darüber hinaus ist der Verlauf der Kurve völlig gleichgültig. Nun bestimmen A, B und C die Schmiegungsebene von c in A; liegt also die krumme Linie auf einer gegebenen Fläche, so kann man ihre Krümmung k als die einer ebenen Kurve auffassen, in der die Fläche von der Schmiegungsebene geschnitten wird. Solange c willkürlich angenommen wird, ist diese Ebene als eine beliebige, durch A hindurchgehende Ebene anzusehen. Ihre Gleichung

(1) $$\alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y} + \gamma\mathfrak{z} + \delta = 0$$

definiert mit

(2) $$F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0$$

zusammen einen ebenen Schnitt der Fläche. Man kann die Forderung stellen, die Krümmung eines solchen unabhängig von den bisherigen Ergebnissen zu berechnen, nämlich durch die Konstanten in der Gleichung (1) und die partiellen Ableitungen der Funktion $F(x, y, z)$ auszudrücken; eine Aufgabe, die deshalb berechtigt ist, weil die Eigenschaft der Raumkurve, eben zu sein, in der analytischen Darstellung nicht einfacher wiedergegeben werden kann als durch eine lineare Gleichung (1) zwischen den kartesischen Koordinaten. Die Einführung eines Parameters würde höchstens dann in Erwägung zu ziehen sein, wenn der ebene Schnitt in einer der Koordinatenebenen läge. Sonst aber wird man, wie schon im § 1 bemerkt, die Gleichungen (1, 2) beibehalten, also von der Darstellung (II) (S. 2) für den Flächenschnitt ausgehen.

Die Bedingungsgleichungen, aus denen man alles für die Krümmungstheorie Erforderliche zu entnehmen hat, sind

(3) $$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

(4) $$\alpha dx + \beta dy + \gamma dz = 0$$

(5) $$\alpha d^2x + \beta d^2y + \gamma d^2z = 0$$

(6) $$F(x, y, z) = 0$$

(7) $$\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0$$

(8) $$\frac{\partial F}{\partial x} d^2x + \frac{\partial F}{\partial y} d^2y + \frac{\partial F}{\partial z} d^2z + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} dz^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} dy dz + 2\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} dz dx + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} dx dy = 0.$$

Von der ersten von ihnen, (3), hätte man absehen können, wenn man die Gleichung der Schnittebene von vornherein in der Form

(9) $$\alpha(\mathfrak{x} - x) + \beta(\mathfrak{y} - y) + \gamma(\mathfrak{z} - z) = 0$$

geschrieben hätte.

Wir gehen auf die Formeln für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes (§ 3 (5))

(10) $$\mathfrak{x} - x = \frac{(Q dz - R dy)\, ds^2}{P^2 + Q^2 + R^2}, \ldots$$

zurück, aus denen der Ausdruck des Krümmungsradius und damit auch der der Krümmung unmittelbar abgeleitet werden konnte. Nach der Natur der Aufgabe kann es keinem Zweifel unterliegen, daß sich die sechs Differentiale dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z mittels der vier Bedingungen (4), (5), (7), (8) aus (10) eliminieren lassen müssen. Um dem genauer nachzugehen, so erscheint es nach der Form der Gleichung (8), die nämlich in d^2x, d^2y, d^2z linear, in dx, dy, dz quadratisch ist, als zweckmäßig, mit der Wegschaffung der zweiten Differentiale zu beginnen. Ist diese Elimination vollzogen, so müssen Zähler und Nenner der Ausdrücke von $\mathfrak{x} - x, \ldots$ homogene Funktionen gleicher Dimension von dx, dy, dz geworden sein. Die Verhältnisse dieser Größen können aber aus (4) und (7) entnommen werden.

Daß die Gleichungen (5) und (8) zur Elimination der zweiten Differentiale ausreichen, hat seinen eigentlichen Grund darin, daß diese in den Formeln der Krümmungstheorie nur in den Verbindungen P, Q, R auftreten, die durch die Identität

(11) $$\Sigma P dx = 0$$

verknüpft sind. Es kommt also in erster Linie darauf an, die Bedingungen (5) und (8) in solche zwischen zweien dieser Verbindungen etwa Q und R, umzusetzen. Sind diese dann durch bekannte Größen und außerdem durch die ersten Differentiale dargestellt, so ergibt sich P mittels der Identität von selbst.

Drückt man nun z. B. d^2y und d^2z aus den beiden Formeln

$$dz\, d^2x - dx\, d^2z = Q, \quad dx\, d^2y - dy\, d^2x = R$$

aus und setzt zur Abkürzung

(12) $$\Sigma \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dx^2 + 2 \Sigma \frac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial z} dy\, dz = \Phi,$$

so erhält man aus (8) und (7)

$$\frac{\partial F}{\partial z} Q - \frac{\partial F}{\partial y} R = \Phi dx.$$

Ferner ist nach (4) und (5)

$$\gamma Q - \beta R = 0,$$

mithin

$$\left(\beta \frac{\partial F}{\partial z} - \gamma \frac{\partial F}{\partial y}\right) Q = \beta \Phi dx, \quad \left(\beta \frac{\partial F}{\partial z} - \gamma \frac{\partial F}{\partial y}\right) R = \gamma \Phi dx,$$

und weiter nach (11)

$$\left(\beta \frac{\partial F}{\partial z} - \gamma \frac{\partial F}{\partial y}\right) P = \alpha \Phi dx.$$

Die aus diesen Formeln oder unmittelbar aus (4) und (5) ersichtliche Proportion

$$P : Q : R = \alpha : \beta : \gamma$$

besagt nichts weiter, als daß die Ebene des Schnittes zugleich seine Schmiegungsebene ist.

Zur Transformation der Ausdrücke (10) werden nun die Gleichungen

$$\left(\beta \frac{\partial F}{\partial z} - \gamma \frac{\partial F}{\partial y}\right)(Q dz - R dy) = (\beta dz - \gamma dy)\, \Phi dx$$

$$\left(\beta \frac{\partial F}{\partial z} - \gamma \frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \Sigma P^2 = \Phi^2 dx^2 \Sigma \alpha^2$$

gebraucht, deren erste wegen der, auch direkt aus (4) und (7) folgenden Proportion

$$(13) \qquad dx : dy : dz = \beta \frac{\partial F}{\partial z} - \gamma \frac{\partial F}{\partial y} : \gamma \frac{\partial F}{\partial x} - \alpha \frac{\partial F}{\partial z} : \alpha \frac{\partial F}{\partial y} - \beta \frac{\partial F}{\partial x}$$

in der Gestalt

$$\left(\beta \frac{\partial F}{\partial z} - \gamma \frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 (Q dz - R dy) = \left[\beta\left(\alpha \frac{\partial F}{\partial y} - \beta \frac{\partial F}{\partial x}\right) - \gamma\left(\gamma \frac{\partial F}{\partial x} - \alpha \frac{\partial F}{\partial z}\right)\right] \Phi dx^2$$

$$= \left(\alpha \Sigma \alpha \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \Sigma \alpha^2\right) \Phi dx^2$$

geschrieben werden kann. Die Formeln für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes werden

$$(14) \qquad \xi - x = \frac{\left(\alpha \Sigma \alpha \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x} \Sigma \alpha^2\right) ds^2}{\Phi \Sigma \alpha^2}, \ldots .$$

Sie sind nur durch den ersten Faktor im Zähler von einander unterschieden.

Eliminiert man nun aus den homogenen Funktionen zweiter Dimension ds^2 und Φ auch die ersten Differentiale, indem man die Ausdrücke auf der rechten Seite von (13) für sie einsetzt, so erhält man

$$\xi - x =$$

(15)
$$\frac{\left(\alpha\Sigma\alpha\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\Sigma\alpha^2\right)\Sigma\left(\beta\frac{\partial F}{\partial z} - \gamma\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}{(\Sigma\alpha^2)\left[\Sigma\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\beta\frac{\partial F}{\partial z} - \gamma\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + 2\Sigma\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\left(\gamma\frac{\partial F}{\partial x} - \alpha\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\alpha\frac{\partial F}{\partial y} - \beta\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right]}$$

. . . .

Damit sind die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes eines beliebigen ebenen Schnitts durch die in der Gleichung der Schnittebene vorkommenden Konstanten und die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der linken Seite der Flächengleichung dargestellt.

Für den Krümmungsradius r ergeben sich mittels

$$\Sigma(\xi - x)^2 = r^2$$

Ausdrücke, die noch die Bestimmung von

$$\Sigma\left(\alpha\Sigma\alpha\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial x}\Sigma\alpha^2\right)^2$$

erfordern. Es werde zur Abkürzung

(16)
$$\Sigma\alpha\frac{\partial F}{\partial x} = U, \quad \Sigma\alpha^2 = V$$

gesetzt, so ist

$$\Sigma\left(\alpha U - \frac{\partial F}{\partial x}V\right)^2 = U^2\Sigma\alpha^2 - 2UV\Sigma\alpha\frac{\partial F}{\partial x} + V^2\Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2.$$

Nun war (S. 51)

(17)
$$\sqrt{\Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2} = W$$

bezeichnet worden. Der gesuchte Ausdruck heißt demnach

$$U^2.V - 2UV.U + V^2.W^2 = V(VW^2 - U^2)$$
$$= V\left[(\Sigma\alpha^2)\left(\Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right) - \left(\Sigma\alpha\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right]$$
$$= V\Sigma\left(\beta\frac{\partial F}{\partial z} - \gamma\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2,$$

und es folgt aus (14):

(18)
$$r = \frac{ds^2\left[\Sigma\left(\beta\frac{\partial F}{\partial z} - \gamma\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon_0\Phi(\Sigma\alpha^2)^{\frac{1}{2}}},$$

oder nach (13):

$$(19)\qquad r = \frac{\left[\Sigma\left(\beta\frac{\partial F}{\partial z}-\gamma\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\varepsilon_0(\Sigma\alpha^2)^{\frac{1}{2}}\Sigma\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\beta\frac{\partial F}{\partial z}-\gamma\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}\left(\gamma\frac{\partial F}{\partial x}-\alpha\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\alpha\frac{\partial F}{\partial y}-\beta\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right]}.$$

Das Vorzeichen $\varepsilon_0 = \pm 1$ ist so zu wählen, daß die Ausdrücke positiv werden. Es ist also nach (18) das Vorzeichen der Größe Φ.

Die Formeln (14), (15), (18), (19) enthalten die Koeffizienten α, β, γ, die schon in der Gleichung (9) bloß in ihren Quotienten vorkommen, naturgemäß auch nur den Verhältnissen nach. In Folge dessen darf man, der Allgemeinheit unbeschadet, diese den Richtungskosinus der Schnittebene proportionalen Größen gleich den Kosinus selbst setzen, also die Relation

$$\Sigma\alpha^2 = 1$$

hinzunehmen, wodurch die Ausdrücke eine äußerliche Vereinfachung erfahren.

§ 20.

Normalschnitte und schiefe Schnitte. Der Meusniersche Satz.

Werden die Verhältnisse $\alpha:\beta:\gamma$ als veränderlich angenommen, so repräsentiert die Gleichung

$$(1)\qquad \alpha(\mathfrak{x}-x)+\beta(\mathfrak{y}-y)+\gamma(\mathfrak{z}-z)=0$$

einen Ebenenbündel mit dem Mittelpunkt A. Aus diesem Bündel werde der Büschel aller Ebenen ausgeschieden, die durch eine beliebige, aber dann bestimmte Flächentangente t hindurchgehen. Da t von den Differentialen erster Ordnung abhängt, so sind diese jetzt beizubehalten, und die Gleichung § 19 (4) erscheint nicht mehr als Bedingung unter dx, dy, dz, sondern als Relation zwischen α, β, γ. Die Verhältnisse $\alpha:\beta:\gamma$ werden von einem Parameter abhängig, dessen Werte die einzelnen Ebenen des Büschels kennzeichnen. Man kann dafür eine Funktion des Winkels nehmen, den die Schnittebene mit der durch t und die Flächennormale gehenden Ebene bildet. Eine solche Ebene trifft die Fläche in einem Normalschnitt.

Nun genügen die Koeffizienten der Gleichung (1), wenn die durch sie dargestellte Ebene die Flächennormale enthalten soll, der Bedingung

$$(2)\qquad \alpha\frac{\partial F}{\partial x}+\beta\frac{\partial F}{\partial y}+\gamma\frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

Führt man sie in § 19 (14) ein, so erhält man für die Koordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 des Krümmungsmittelpunktes und weiter für den Krümmungshalbmesser r_0 des Normalschnitts die Formeln

(3) $$\xi_0 - x = -\frac{\partial F}{\partial x}\frac{ds^2}{\Phi}, \quad \eta_0 - y = -\frac{\partial F}{\partial y}\frac{ds^2}{\Phi}, \quad \zeta_0 - z = -\frac{\partial F}{\partial z}\frac{ds^2}{\Phi}.$$

(4) $$r_0 = \frac{W ds^2}{\varepsilon_0 \Phi}.$$

Den Winkel, den ein von der Flächentangente t berührter schiefer Schnitt mit dem zugehörigen Normalschnitt bildet, definieren wir als den Richtungsunterschied der beiden positiven Hauptnormalen dieser Schnitte. Er werde mit φ_0 bezeichnet und als zwischen 0 und π gelegen angenommen. Die Größe

$$\cos\varphi_0 = \Sigma \frac{\xi - x}{r}\frac{\xi_0 - x}{r_0}$$

ergibt sich unmittelbar aus (3), (4) und den Formeln (14) und (18) des vorigen Paragraphen, von denen die ersten unter Benutzung von (16) sich schreiben lassen:

$$\xi - x = \frac{\left(\alpha U - \frac{\partial F}{\partial x} V\right) ds^2}{\Phi V}, \ldots.$$

Es folgt

$$V^{\frac{1}{2}}\left[\Sigma\left(\beta\frac{\partial F}{\partial z} - \gamma\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} W \cos\varphi_0 = \Sigma\varepsilon_0\left(\alpha U - \frac{\partial F}{\partial x} V\right)\left(-\varepsilon_0\frac{\partial F}{\partial x}\right)$$

$$= W^2 V - U^2$$

$$= \Sigma\left(\beta\frac{\partial F}{\partial z} - \gamma\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2,$$

(5) $$\cos\varphi_0 = \frac{\sqrt{\Sigma\left(\beta\frac{\partial F}{\partial z} - \gamma\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}{\sqrt{\Sigma\alpha^2}\sqrt{\Sigma\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2}},$$

d. h.

(6) $$\cos\varphi_0 > 0;$$

φ_0 ist ein spitzer Winkel. Führt man $\cos\varphi_0$ in den Ausdruck von r ein, so erhält man

$$r = \frac{W ds^2}{\varepsilon_0 \Phi}\cos\varphi_0,$$

und durch Zusammenstellung mit (4)

(7) $$r = r_0 \cos\varphi_0$$

oder auch, wenn man, der Gleichung $\frac{1}{r} = k$ entsprechend

(8) $$\frac{1}{r_0} = k_0$$

setzt,

(9) $$k\cos\varphi_0 = k_0.$$

Diese Relation gibt das Gesetz wieder, nach dem sich die Krümmung eines ebenen Schnittes der Fläche bei einer Drehung der Schnittebene um eine bestimmte Flächentangente ändert. In der Form (7) enthält sie den **Meusnierschen Satz**: Werden ein Normalschnitt und ein schiefer Schnitt von derselben Flächentangente berührt, so ist die Projektion des Krümmungshalbmessers des Normalschnitts auf die Ebene des schiefen Schnitts gleich dem Krümmungsradius dieses Schnittes. (Vgl. Fig. 13, § 42.)

Unter allen ebenen Schnitten mit derselben Tangente hat also der Normalschnitt den größten Krümmungsradius oder die kleinste Krümmung.

§ 21.

Die Krümmung eines schiefen Schnittes für die III. Flächendarstellung.

Von der Flächendarstellung (II) konnte zu

$$\text{(III)} \qquad z = z(x, y)$$

vermittelst des Ansatzes

$$F(x, y, z) = z - z(x, y)$$

ein formaler Übergang gemacht werden. Dabei sind (S. 46) für die ersten partiellen Ableitungen von $z(x, y)$ nach x und y die Zeichen p und q eingeführt worden. Wird noch

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

geschrieben, so sind in den Formeln der Paragraphen 19 und 20

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{\partial F}{\partial y}, \quad \frac{\partial F}{\partial z}$$

durch

$$-p, \quad -q, \quad 1$$

und

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

durch

$$-r, \quad -t, \quad 0, \quad 0, \quad 0, \quad -s$$

zu ersetzen. Der in den drei Gleichungen § 19 (15) übereinstimmend vorkommende Ausdruck

$$\frac{\Sigma\left(\beta \frac{\partial F}{\partial z} - \gamma \frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}{(\Sigma \alpha^2)\left[\Sigma \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\beta \frac{\partial F}{\partial z} - \gamma \frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + 2\Sigma \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\left(\gamma \frac{\partial F}{\partial x} - \alpha \frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\alpha \frac{\partial F}{\partial y} - \beta \frac{\partial F}{\partial x}\right)\right]}$$

wird gleich

$$-\frac{(\alpha+\gamma p)^2+(\beta+\gamma q)^2+(\alpha q-\beta p)^2}{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)[r(\beta+\gamma q)^2-2s(\beta+\gamma q)(\alpha+\gamma p)+t(\alpha+\gamma p)^2]}.$$

Aus ihm gehen der Reihe nach die Werte von $\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$ durch Multiplikation mit

$$\alpha(-\alpha p-\beta q+\gamma)+p(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),$$
$$\beta(-\alpha p-\beta q+\gamma)+q(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2),$$
$$\gamma(-\alpha p-\beta q+\gamma)-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$$

hervor. Um das gleichzeitige Auftreten von r in zwei verschiedenen Bedeutungen zu vermeiden, rechnen wir jetzt mit den Krümmungen, nicht mit den Krümmungsradien. Die Krümmung eines beliebigen ebenen Schnittes wird

$$(2)\quad k=-\varepsilon_0\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^{\frac{1}{2}}[r(\beta+\gamma q)^2-2s(\beta+\gamma q)(\alpha+\gamma p)+t(\alpha+\gamma p)^2]}{[(\alpha+\gamma p)^2+(\beta+\gamma q)^2+(\alpha q-\beta p)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Für einen Normalschnitt ergibt sich aus § 20 (3) in Verbindung mit § 19 (12)

$$\zeta_0 - z = \frac{(1+p^2)dx^2+2pq\,dx\,dy+(1+q^2)dy^2}{r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2};$$

$\xi_0 - x$ und $\eta_0 - y$ folgen hieraus durch Multiplikation mit $-p$ und $-q$. Die Krümmung des Normalschnitts ist nach § 20 (4) durch

$$(3)\qquad k_0=\frac{-\varepsilon_0}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\,\frac{r\,dx^2+2s\,dx\,dy+t\,dy^2}{(1+p^2)dx^2+2pq\,dx\,dy+(1+q^2)dy^2}$$

bestimmt.

§ 22.

Zusammenhang der Normalkrümmung einer Flächenkurve mit der Krümmung eines Normalschnitts.

Betrachtet man jetzt die Ebene des schiefen Schnittes wieder als die Schmiegungsebene einer beliebigen Flächenkurve c, so ist k mit der Krümmung dieser Kurve identisch (S. 65), hat mithin in der Gleichung § 17 (10)

$$k\cos\varphi = n$$

und der des Meusnierschen Satzes (§ 20 (9))

$$(1)\qquad k\cos\varphi_0 = k_0$$

dieselbe Bedeutung. Was die in diesen Formeln vorkommenden Winkelgrößen angeht, so bezeichnete φ den Winkel der positiven Hauptnormale der Kurve mit der positiven Flächennormale, die unabhängig von der Kurve c definiert ist. Um dagegen φ_0 zu erklären, hat man

sich durch die Tangente der krummen Linie einen Normalschnitt gelegt zu denken und die von der Fläche aus nach dessen Krümmungsmittelpunkt gehende Richtung der Flächennormale ins Auge zu fassen. Fällt diese mit der positiven Richtung zusammen (Fig. 9a) so ist

$$\cos\varphi_0 = \cos\varphi,$$

sonst

$$\cos\varphi_0 = -\cos\varphi$$

(Fig. 9b), also jedenfalls

$$n = \pm k_0.$$

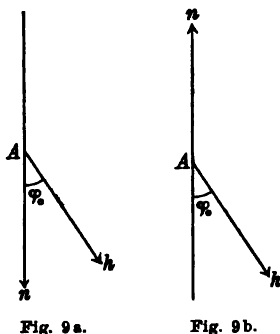


Fig. 9a. Fig. 9b.

Das heißt: Die Normalkrümmung einer Kurve ist, abgesehen vom Vorzeichen, gleich der Krümmung des durch die Kurventangente gehenden Normalschnitts; und zwar gilt das positive oder das negative Zeichen, je nachdem der Krümmungsmittelpunkt dieses Schnittes auf der positiven oder auf der negativen Flächennormale liegt.

Dieses Ergebnis verleiht nicht nur der Normalkrümmung einer beliebigen Flächenkurve eine sehr anschauliche Bedeutung, sondern führt auch darauf, den Krümmungshalbmessern der Normalschnitte Vorzeichen beizufügen, welche die Lage der zugehörigen Krümmungsmittelpunkte auf einer bestimmten oder der entgegengesetzten Seite der Fläche kennzeichnen. Es werde also

(2) $$n = \frac{1}{\varrho}$$

gesetzt, der Gleichung

$$k_0 = \frac{1}{r_0}$$

(§ 20 (8)) entsprechend. Bedeuten a_0'', b_0'', c_0'' die Kosinus der positiven Hauptnormale des betrachteten Normalschnittes, so ist

(3) $$\frac{\xi_0 - x}{r_0} = a_0'', \ldots .$$

Fällt nun die Richtung vom Flächenpunkte nach dem Krümmungsmittelpunkt $M_0 \equiv (\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ mit der positiven Flächennormale zusammen, sind also a_0'', b_0'', c_0'' den Größen X, Y, Z entsprechend gleich, so ist $\varrho_0 = r_0$, und die Gleichungen (3) geben

(4) $$\begin{aligned} \xi_0 - x &= \varrho X \\ \eta_0 - y &= \varrho Y \\ \zeta_0 - z &= \varrho Z. \end{aligned}$$

Sind dagegen die positive Hauptnormale und die positive Flächennormale einander entgegengerichtet, also $a_0'' = -X$, $b_0'' = -Y$,

$c_0'' = -Z$, so wird $\varrho = -r_0$, $\xi_0 - x = (-\varrho)(-X) \ldots\ldots$ Die Gleichungen (4) bleiben bestehen.

Im folgenden soll nun immer, wenn nichts Anderes bemerkt wird, mit der Normalkrümmung n, nicht mit ihrem absoluten Werte k_0, gerechnet werden.

§ 23.

Zweite Darstellung der Normalkrümmung und der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung.

Der Parameter, von welchem die Lage einer durch die Flächennormale gehenden Ebene abhängt, ist je nach der Darstellung der Fläche selbst und demnach auch des Normalschnittes in verschiedener Weise zu wählen. Bedient man sich krummliniger Koordinaten, so kann man das Differentialverhältnis $\frac{dv}{du} = \lambda$ dafür nehmen und hat insbesondere nach § 18 (5)

$$(1) \qquad n = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2}.$$

Man kann nun fragen, ob sich diese Formel in ähnlicher Weise geometrisch deuten läßt wie die für die Krümmung eines schiefen Schnitts mittels des Meusnierschen Satzes; und namentlich, ob auch die Normalkrümmung bei einer Änderung des Parameters λ größter oder kleinster Werte fähig ist. Bevor aber dieser Frage näher getreten wird, soll der Ausdruck von n noch etwas umgestaltet werden.

Die Formel (1) war aus

$$n = \frac{Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

(§ 18 (1)) entstanden. In Folge der Identität

$$\Sigma X dx = 0$$

kann man nun

$$\Sigma X d^2x + \Sigma dX dx = 0$$

setzen und demnach die Normalkrümmung auch durch die Gleichung

$$(2) \qquad n = -\frac{dx dX + dy dY + dz dZ}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

definieren. Für den Zähler allein ergibt sich in Folge von § 18 (4) die Darstellung

$$(3) \qquad -(dx dX + dy dY + dz dZ) = L du^2 + 2M du dv + N dv^2,$$

aus der nach Einführung von

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \cdots$$

$$dX = \frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial v} dv, \cdots$$

veränderte Ausdrücke für die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung L, M, N entnommen werden können. Die Vergleichung der Koeffizienten von $du^2, \ldots$ in (3) ist gleichbedeutend mit der Differentiation der Identitäten

$$X\frac{\partial x}{\partial u} + Y\frac{\partial y}{\partial u} + Z\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \quad X\frac{\partial x}{\partial v} + Y\frac{\partial y}{\partial v} + Z\frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

nach u und v und Benutzung der Definitionsgleichungen für L, M, N (§ 18 (2)). Die neuen Formeln lauten:

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial u} &= -L \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} &= -M \\ \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u} &= -M \\ \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial v} &= -N. \end{aligned}$$

§ 24.

Haupttangenten, Hauptschnitte und Hauptkrümmungen. Kreispunkte.

Um nun die zu Anfang des vorigen Paragraphen aufgeworfene Frage nach den größten und kleinsten Werten von n wieder aufzunehmen, so hat man zu ihrer Beantwortung in der Formel

$$(1) \qquad n = \frac{L + 2M\lambda + N\lambda^2}{E + 2F\lambda + G\lambda^2}$$

λ als veränderlich, die Koordinaten des betrachteten Punktes aber, und demnach auch die Fundamentalgrößen E, F, G, L, M, N, als konstant anzusehen und

$$\frac{\partial n}{\partial \lambda} = 0$$

zu setzen. Das Verschwinden der rationalen Funktion von λ, welcher $\frac{\partial n}{\partial \lambda}$ gleich ist, könnte einerseits durch das Unendlichwerden des Nenners $(E + 2F\lambda + G\lambda^2)^2$ herbeigeführt werden. Da E, F, G infolge der Voraussetzungen über die darstellenden Funktionen der Fläche endliche Werte haben, so kann dies nur für $\lambda = \infty$, d. h. $du = 0$ eintreten, also für die Kurve $u = u_0$. Aber offenbar kann die Normalkrümmung einer Koordinatenlinie nicht bei einer beliebigen Wahl des Koordinatennetzes ein Maximum oder Minimum sein. Demnach muß der Zähler von $\frac{\partial n}{\partial \lambda}$ gleich Null gesetzt werden, was

$$(E + 2F\lambda + G\lambda^2)(M + N\lambda) - (L + 2M\lambda + N\lambda^2)(F + G\lambda) = 0$$

oder

(2) $$\frac{E+2F\lambda+G\lambda^2}{F+G\lambda}=\frac{L+2M\lambda+N\lambda^2}{M+N\lambda},$$

(3) $$\frac{E+F\lambda}{F+G\lambda}=\frac{L+M\lambda}{M+N\lambda},$$

d. h.

(4) $$(EM-FL)+(EN-GL)\lambda+(FN-GM)\lambda^2=0$$

oder in Determinantenform, nach Multiplikation mit du^2,

(5) $$\begin{vmatrix} Edu+Fdv, & Fdu+Gdv \\ Ldu+Mdv, & Mdu+Ndv \end{vmatrix}=0$$

liefert. Die beiden durch die Wurzeln $\lambda=\lambda_1$ und $\lambda=\lambda_2$ dieser quadratischen Gleichung bestimmten Tangenten in dem gegebenen Punkte heißen die Haupttangenten, die durch sie hindurchgehenden Normalebenen die Hauptebenen, die zugehörigen Schnitte die Hauptschnitte der Fläche.

Die Entstehung der linken Seite von (5) aus den beiden Fundamentalformen A und B ist leicht zu beschreiben. Setzt man, wie S. 34,

(6) $$du=\xi_1,\quad dv=\xi_2,$$

also, nach § 13 (19) und § 18 (6),

(7) $$\mathsf{A}=E\xi_1^2+2F\xi_1\xi_2+G\xi_2^2$$

(8) $$\mathsf{B}=L\xi_1^2+2M\xi_1\xi_2+N\xi_2^2,$$

so ist

(9) $$\begin{vmatrix} E\xi_1+F\xi_2, & F\xi_1+G\xi_2 \\ L\xi_1+M\xi_2, & M\xi_1+N\xi_2 \end{vmatrix}=\frac{1}{4}\frac{\partial(\mathsf{A},\mathsf{B})}{\partial(\xi_1,\xi_2)}.$$

Die Bestimmungsgleichung der Haupttangenten ergibt sich also durch Nullsetzung der Funktionaldeterminante von A und B inbezug auf die Differentiale du und dv.

Aus (1) und (2) folgt für die Krümmung eines Hauptschnitts:

(10) $$n_i=\frac{M+N\lambda_i}{F+G\lambda_i},\qquad (i=1,2)$$

und bei Hinzunahme von (3):

(11) $$n_i=\frac{L+M\lambda_i}{E+F\lambda_i}\qquad (i=1,2).$$

Eliminiert man λ_i, indem man die beiden Werte aus (11) und (10),

(12) $$\lambda_i=-\frac{En_i-L}{Fn_i-M},\quad \lambda_i=-\frac{Fn_i-M}{Gn_i-N}$$

einander gleich setzt, so erhält man für n_1 und n_2 die quadratische Gleichung

$$(En - L)(Gn - N) - (Fn - M)^2 = 0 \tag{13}$$

oder

$$(EG - F^2)n^2 - (GL - 2FM + EN)n + LN - M^2 = 0 \tag{14}$$

oder auch, die linke Seite wieder als Determinante geschrieben,

$$\begin{vmatrix} En - L, & Fn - M \\ Fn - M, & Gn - N \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Die Größen n_1 und n_2 heißen die Hauptkrümmungen der Fläche, ihre reziproken Werte

$$\frac{1}{n_1} = \varrho_1, \quad \frac{1}{n_2} = \varrho_2, \tag{16}$$

die demnach Wurzeln der Gleichung

$$(LN - M^2)\varrho^2 - (GL - 2FM + EN)\varrho + EG - F^2 = 0 \tag{17}$$

sind, die Hauptkrümmungsradien; wobei man sich jedoch zu erinnern hat, daß diese Radien, der im § 22 getroffenen Festsetzung gemäß, auch negative Werte haben können.

Zu jedem Hauptkrümmungshalbmesser gehört ein Hauptkrümmungsmittelpunkt der Fläche, nämlich der Krümmungsmittelpunkt des entsprechenden Hauptschnitts. Die Koordinaten dieser Punkte folgen aus § 22 (4) für $\varrho = \varrho_1$ und $\varrho = \varrho_2$.

Die beiden elementaren symmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen sollen mit H und K bezeichnet werden,

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 &= H \\ n_1 n_2 &= K. \end{aligned} \tag{18}$$

Durch die Fundamentalgrößen dargestellt, haben sie die Werte

$$H = \frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2} \tag{19}$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \tag{20}$$

Die Haupttangenten und Hauptkrümmungen würden reell oder imaginär sein, je nachdem die gemeinsame Determinante D der in (4) und (14) auftretenden ganzen Funktionen zweiten Grades negativ oder positiv wäre. Für die Untersuchung des Vorzeichens werde

$$\begin{aligned} EM - FL &= a \\ EN - GL &= 2b \\ FN - GM &= c \end{aligned} \tag{21}$$

gesetzt. Führt man

$$M = \frac{a + FL}{E}, \quad N = \frac{2b + GL}{E}$$

in c ein, sodaß

$$c = \frac{2Fb - Ga}{E}$$

wird, und substituiert diesen Ausdruck in

(22) $$D \equiv ac - b^2,$$

so findet man

$$D = \frac{1}{E}[a(2Fb - Ga) - Eb^2]$$

(23) $$D = -\frac{1}{E^2}[(Eb - Fa)^2 + (EG - F^2)a^2].$$

Da E und $EG - F^2$ positiv sind, so ist

$$D < 0,$$

λ_1, λ_2 und n_1, n_2 reell. Also:

Unter den für die Variablen u, v und deren Funktionen x, y, z gemachten Annahmen sind die Haupttangenten und die Hauptkrümmungen stets reell.

Der Grenzfall

$$D = 0,$$

für den

$$n_1 = n_2$$

wird, kann, wie aus dem Ausdruck (23) ersichtlich, nur dann eintreten, wenn $a = 0$, $b = 0$ und demnach auch $c = 0$ ist. Diese Bedingungen sind mit

(24) $$\frac{L}{E} = \frac{M}{F} = \frac{N}{G}$$

gleichbedeutend. Bestehen sie, so ist die Bestimmung der Haupttangenten mittels der Gleichung (4) unmöglich, weil diese identisch erfüllt wird. Das kann nur für besondere Punkte eintreten, deren Koordinaten, die Realität vorausgesetzt, durch Zusammenstellung der Gleichungen (24) mit der Flächendarstellung (I) erhalten werden. Sie heißen Kreispunkte der Fläche; eine Benennung, deren Grund im § 33 ersichtlich werden wird. Aus (24) und (1) folgt

$$n = \frac{L}{E},$$

d. h. in einem Kreispunkte sind die Krümmungen aller Normalschnitte einander gleich.

Sind die beiden Gleichungen (24) noch voneinander abhängig, so gibt es im allgemeinen auf der Fläche eine Kurve von Kreispunkten, die als Linie sphärischer Krümmung bezeichnet wird.

Von solchen Punkten abgesehen, gilt für die Lage der Haupttangenten ein einfacher und wichtiger Satz. Setzt man nämlich, um den Winkel dieser beiden Tangenten zu berechnen, in die Formeln des § 13

$$l_{11} = a, \quad l_{12} = b, \quad l_{22} = c$$

ein, so findet man

(25) $$Ga - 2Fb + Ec = 0,$$

d. h. (§ 13 (25)):

Die Haupttangenten, und demnach auch die Hauptebenen, schneiden sich unter rechten Winkeln.

§ 25.

Die Hauptkrümmungen für die III. Flächendarstellung. Beispiel der Flächen zweiten Grades.

Für die spezielle Flächendarstellung

(III) $$z = z(x, y)$$

hätte man, um die Theorie der Hauptkrümmungen zu begründen, mit dem Ausdruck § 21 (3) ebenso zu operieren wie oben mit dem allgemeinen Ausdruck § 24 (1) von $\varkappa$. Soweit es sich nur um die Nullsetzung der partiellen Ableitung nach λ, das jetzt gleich $\frac{dy}{dx}$ ist, handelt, darf dabei von dem Faktor $\frac{-\varepsilon_0}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$ abgesehen werden. Man kann aber auch von vornherein die Resultate selbst aus denen des § 24, wie immer, dadurch ablesen, daß man

(1) $$u = x, \quad v = y$$

(2) $$dz = p\,dx + q\,dy$$

und demnach

(3) $$ds^2 = (1 + p^2)dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)dy^2,$$

d. h.

(4) $$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2,$$

$$T^2 \equiv EG - F^2 = p^2 + q^2 + 1,$$

und ferner (§ 15 (16))

(5) $$X = \frac{-\varepsilon p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad Y = \frac{-\varepsilon q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad Z = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

setzt. Da für die Annahme (1) sämtliche Ableitungen zweiter Ordnung von x und y verschwinden und nach den Bezeichnungen § 21 (1)

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t$$

wird, so reduzieren sich die dreigliedrigen Formeln für L, M, N (§ 18 (2)) auf folgende eingliedrigen Ausdrücke:

$$(7) \qquad L = \frac{\varepsilon r}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad M = \frac{\varepsilon s}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}, \quad N = \frac{\varepsilon t}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}.$$

Die Bestimmungsgleichung für die Haupttangenten und Hauptebenen wird nach § 24 (4)

$$(8) \qquad ((1 + p^2)s - pqr) + ((1 + p^2)t - (1 + q^2)r)\frac{dy}{dx} + (pqt - (1 + q^2)s)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

oder

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} (1 + p^2)\,dx + pq\,dy, & pq\,dx + (1 + q^2)\,dy \\ r\,dx + s\,dy, & s\,dx + t\,dy \end{vmatrix} = 0.$$

Die Hauptkrümmungen sind Wurzeln der Gleichung § 24 (14)

$$(10) \qquad n^2 - \varepsilon\frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{(p^2 + q^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}\,n + \frac{rt - s^2}{(p^2 + p^2 + 1)^2} = 0,$$

und die Beziehung dieser Größen zu den Wurzeln von (8) wird vermittelt durch § 24 (11, 10):

$$(11) \qquad \begin{aligned} n_i &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}\,\frac{r + s\lambda_i}{1 + p^2 + pq\lambda_i} \\ n_i &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}}\,\frac{s + t\lambda_i}{pq + (1 + q^2)\lambda_i}. \end{aligned} \qquad (i = 1, 2)$$

Für die Summe und das Produkt der Hauptkrümmungen folgen aus (10) die Werte

$$(12) \qquad H = \varepsilon\frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{(p^2 + q^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(13) \qquad K = \frac{rt - s^2}{(p^2 + q^2 + 1)^2}.$$

Endlich werden die Kreispunkte, wenn sie existieren, durch § 24 (24)

$$(14) \qquad \frac{r}{1 + p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1 + q^2}$$

zusammen mit der Flächengleichung bestimmt.

Beispiel der Flächen zweiten Grades, zunächst nur zur Erläuterung der eingeführten Bezeichnungen, und unter Weglassung der Zylinderflächen:

1) Die Mittelpunktsflächen werden durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \varepsilon$$

dargestellt, in der $\varepsilon = 1$ oder $\varepsilon = 0$ ist. Zur Bestimmung der partiellen Ableitungen von z nach x und y dienen die Formeln

$$\frac{x}{A} + \frac{zp}{C} = 0, \quad \frac{y}{B} + \frac{zq}{C} = 0,$$

$$\frac{1}{A} + \frac{zr}{C} + \frac{p^2}{C} = 0, \quad \frac{zs}{C} + \frac{pq}{C} = 0, \quad \frac{1}{B} + \frac{zt}{C} + \frac{q^2}{C} = 0,$$

woraus

(15) $$p = -\frac{C}{z}\frac{x}{A}, \quad q = -\frac{C}{z}\frac{y}{B},$$

(16) $$r = -\frac{C^2}{Az^3}\left(\varepsilon - \frac{y^2}{B}\right), \quad s = -\frac{C^2}{z^3}\frac{xy}{AB}, \quad t = -\frac{C^2}{Bz^3}\left(\varepsilon - \frac{x^2}{A}\right).$$

Von den beiden elementaren symmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen, aus denen, als Koeffizienten, die quadratische Gleichung (10) zusammengesetzt werden kann, ist K insofern die wichtigere, als ihr Vorzeichen über die gegenseitige Lage der Hauptkrümmungsmittelpunkte entscheidet. Dieses Zeichen ist nach (13) mit dem der Determinante $rt - s^2$ identisch. Nun wird

(17) $$rt - s^2 = \frac{C^4}{ABz^6}\left[\left(\varepsilon - \frac{x^2}{A}\right)\left(\varepsilon - \frac{y^2}{B}\right) - \frac{x^2y^2}{AB}\right] = \frac{C^4}{z^4}\frac{\varepsilon}{ABC}.$$

Bei passender Wahl des Achsensystems ist zu setzen:

für das Ellipsoid

$$\varepsilon = 1, \quad A > 0, \quad B > 0, \quad C > 0, \quad rt - s^2 > 0;$$

für das einschalige Hyperboloid

$$\varepsilon = 1, \quad A > 0, \quad B > 0, \quad C < 0, \quad rt - s^2 < 0;$$

für das zweischalige Hyperboloid

$$\varepsilon = 1, \quad A > 0, \quad B < 0, \quad C < 0, \quad rt - s^2 > 0;$$

für den Kegel:

$$\varepsilon = 0, \quad A > 0, \quad B > 0, \quad C < 0, \quad rt - s^2 = 0.$$

2) Die Flächen ohne Mittelpunkt sind in der Gleichung

$$2z = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B}$$

enthalten, aus welcher folgt:

$$p = \frac{x}{A}, \quad q = \frac{y}{B}, \quad r = \frac{1}{A}, \quad s = 0, \quad t = \frac{1}{B},$$

$$rt - s^2 = \frac{1}{AB}.$$

Nimmt man $A > 0$ an, so ist
für das elliptische Paraboloid

$$B > 0, \quad rt - s^2 > 0;$$

für das hyperbolische Paraboloid

$$B < 0, \quad rt - s^2 < 0.$$

Hiernach liegen die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte für das Ellipsoid, das zweischalige Hyperboloid und das elliptische Paraboloid auf derselben, für das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid auf entgegengesetzten Seiten der Fläche. Für den Kegel ist überall einer der Hauptkrümmungsradien unendlich groß.

Das Beispiel der Mittelpunktsflächen lehrt zugleich, wie man zu verfahren hätte, um bei der Aufsuchung der Haupttangenten und der Hauptkrümmungen zu der Flächendarstellung (II)

$$F(x, y, z) = 0$$

überzugehen. Denn die Gleichungen zwischen p, q, r, s, t sind besondere Fälle der folgenden:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} q = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} p + p \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} p \right) + \frac{\partial F}{\partial z} r = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

aus denen für die zweiten partiellen Ableitungen von z Bestimmungen der Form

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^3 r = -\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^3 s = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

hervorgehen. Durch ihre Einführung kommt man jedoch zu ziemlich verwickelten Ausdrücken, aus denen nicht ohne weiteres ersichtlich ist, wie in den gesuchten Formeln die durch die Darstellung (II) gegebene, bei der Bevorzugung der z-Koordinate aber verloren gegangene Symmetrie zwischen x, y und z wiederhergestellt werden kann. Infolge dessen ist es zweckmäßiger, das Problem der Hauptkrümmungen für diese Darstellung besonders zu behandeln und schon von einem veränderten Ausdruck der Normalkrümmung auszugehen.

§ 26.

Der Eulersche Satz.

Zunächst aber bedürfen die Ergebnisse der Paragraphen 24 und 25 noch in wesentlichen Punkten der Ergänzung, da sie nur an die notwendige Bedingung für die Existenz extremer Werte der Normalkrümmung angeschlossen worden sind. Eine Entscheidung darüber, ob den Hauptkrümmungen die Eigenschaft des Maximums oder Minimums wirklich zukommt, steht noch aus, und ferner ist auch die Frage unerledigt geblieben, ob und wie man den Ausdruck für die Krümmung eines Normalschnitts geometrisch deuten kann. Eine solche Deutung muß darauf ausgehen, das Differentialverhältnis λ durch einen Parameter von größerer Anschaulichkeit zu ersetzen. Es liegt nahe, wie beim Meusnierschen Satze, also wie in der Theorie der schiefen Schnitte, einen Winkel einzuführen, und zwar den des betrachteten Normalschnitts mit einem der beiden Hauptschnitte. Um sich von der Form der dabei entstehenden Relationen eine Vorstellung zu bilden, kann man folgende spezielle Methode anwenden.

Man wähle den betrachteten Flächenpunkt zum Anfangspunkt der Koordinaten und lasse die Tangentialebene mit der (xy)-Ebene, also die Normale mit der z-Achse zusammenfallen. Dann ist

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$$

und nach S. 52 (16)

(1) $$p = 0, \quad q = 0.$$

Die Bestimmungsgleichung für die Haupttangenten (§ 25 (8)) wird

(2) $$s + (t - r)\frac{dy}{dx} - s\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0.$$

Setzt man noch

(3) $$s = 0,$$

so wird die eine ihrer Wurzeln Null, die andere unendlichgroß, d. h. die beiden Haupttangenten fallen mit der x- und y-Achse des Koordinatensystems zusammen. Denn λ_1 und λ_2 sind die trigonometrischen Tangenten der Winkel, die, wie man es ausdrücken kann, die beiden Hauptebenen mit der (xz)-Ebene bilden, und speziell die Orthogonalität der Hauptebenen geht aus der Gleichung

$$\lambda_1 \lambda_2 = -1$$

unmittelbar wieder hervor.

Führt man $p = 0$, $q = 0$, $s = 0$ in § 25 (10) ein, so erhält man

$$n^2 - \varepsilon(r + t)n + rt = 0,$$

$$(n - \varepsilon r)(n - \varepsilon t) = 0.$$

Es sei

(4) $$\varepsilon = +1,$$

sodaß die Flächennormale und die z-Achse auch der positiven Richtung nach übereinstimmen. Außerdem sei die Bezeichnung so gewählt, daß

(5) $$n_1 = r, \quad n_2 = t$$

wird. Die Formel

(6) $$n = \frac{\varepsilon}{\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} \frac{r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2}{(1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2}$$

geht für die Annahmen (1, 3, 4) in

$$n = \frac{r\,dx^2 + t\,dy^2}{dx^2 + dy^2}$$

über, und wenn noch

(7) $$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} w$$

gesetzt und für r und t nach (5) ihre geometrischen Ausdrücke eingeführt werden, in

$$n = \frac{n_1 + n_2 \operatorname{tg}^2 w}{1 + \operatorname{tg}^2 w}.$$

Diese Gleichung, d. h.

(8) $$n = n_1 \cos^2 w + n_2 \sin^2 w$$

oder

(9) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 w}{\varrho_1} + \frac{\sin^2 w}{\varrho_2}$$

enthält den Eulerschen Satz der Theorie der Normalschnitte. Er liefert die Krümmung eines beliebigen solchen Schnittes dargestellt durch die beiden Hauptkrümmungen und den Winkel, den seine Ebene mit der zu $n = n_1$ gehörigen Hauptebene bildet.

Es sei ausdrücklich hervorgehoben, daß w für diese Untersuchung eine speziellere Bedeutung hat als im § 11.

§ 27.

Folgerungen aus dem Eulerschen Satze. Wendetangenten.

Die Gleichung, deren Inhalt eben als der Satz von Euler bezeichnet worden ist, beantwortet die im vorigen Paragraphen aufgeworfenen Fragen. Erstens gibt sie einen einfachen geometrischen Ausdruck für n, und zweitens liefert sie, in der Form

(1) $$n = n_2 + (n_1 - n_2) \cos^2 w$$

geschrieben, einen größten und einen kleinsten Wert von n. Nimmt man nämlich, immer unter Ausschluß der Kreispunkte,

(2) $$n_1 > n_2$$

an, so sieht man, daß zu $\cos^2 w = 1$ ein Maximum der Normalkrümmung, und zwar n_1, zu $\cos w = 0$ ein Minimum, n_2, gehört.

Aber der Eulersche Satz gibt zu einer großen Anzahl weiterer Folgerungen Veranlassung. Es sei n' die Krümmung eines zweiten Normalschnitts, der den Winkel w' mit der ersten Hauptebene bildet, für den also

(3) $$n' = n_1 \cos^2 w' + n_2 \sin^2 w'$$

ist. Sind die beiden Schnitte auf einander senkrecht, so hat man

$$\cos^2 w' = \sin^2 w, \quad \sin^2 w' = \cos^2 w,$$

also

(4) $$n + n' = n_1 + n_2;$$

die Summe der Krümmungen zweier orthogonalen Normalschnitte ist konstant und gleich der Summe der Hauptkrümmungen.

Derselbe Satz gilt für zwei Normalschnitte, die die Winkel w und $\frac{\pi}{2} - w$ mit einem Hauptschnitt bilden. Aus beiden Sätzen zusammen oder ebenso einfach auf direktem Wege findet man, daß zwei Normalschnitte gleiche Krümmung haben, wenn sie gegen einen Hauptschnitt gleich geneigt sind.

Von Sätzen dieser Art kann eine ganze Anzahl sofort hingeschrieben werden, wenn man das Eulersche Theorem in Beziehung zu der Theorie der Kegelschnitte setzt, eine Beziehung, deren innerer Grund sich im § 33 (S. 107) herausstellen wird. Zunächst seien ϱ_1 und ϱ_2 von demselben Vorzeichen. Es genügt, die Diskussion unter der Voraussetzung

$$\varrho_1 > 0, \qquad \varrho_2 > 0$$

anzustellen. Dann ist nach der Gleichung

(5) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{\cos^2 w}{\varrho_1} + \frac{\sin^2 w}{\varrho_1}$$

auch ϱ eine positive Größe. Es sei nun wieder der betrachtete Flächenpunkt Anfangspunkt eines Koordinatensystems in der Tangentialebene, dessen Achsen mit den Haupttangenten zusammenfallen. Auf dieses System sei die Ellipse

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{\varrho_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{\varrho_2} = 1$$

bezogen. Geht man zu Polarkoordinaten mit dem Radiusvektor r und dem Richtungswinkel w über, so erhält man

$$\frac{r^2 \cos^2 w}{\varrho_1} + \frac{r^2 \sin^2 w}{\varrho_2} = 1,$$

eine Gleichung, die auch aus (5) durch die Annahme

$$\varrho = r^2$$

entsteht. Dies gibt folgenden Ausspruch des Eulerschen Satzes: Konstruiert man, unter der Voraussetzung, daß die Hauptkrümmungsradien positiv sind, in der Tangentialebene eine Ellipse, für welche die Hauptachsen mit den Haupttangenten, die Quadrate der Längen der Halbachsen mit den Hauptkrümmungsradien übereinstimmen, so ist der Krümmungsradius irgend eines Normalschnittes gleich dem Quadrate desjenigen Halbmessers der Ellipse, der in die Tangente des Normalschnitts fällt.

Zweitens seien ϱ_1 und ϱ_2 von verschiedenem Zeichen,

$$\varrho_1 > 0, \qquad \varrho_2 = -\varrho_2' < 0.$$

ϱ nimmt positive und negative Werte an. Im ersten Falle ist dann ϱ gleich dem Quadrat eines, entsprechend wie vorher zu definierenden Halbmessers der Hyperbel

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{\varrho_1} - \frac{\mathfrak{y}^2}{\varrho_2'} = 1.$$

Im zweiten Fall wird die Bestimmung des absoluten Betrages von ϱ in derselben Art mittels der konjugierten Hyperbel

$$-\frac{\mathfrak{x}^2}{\varrho_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{\varrho_2'} = 1$$

geleistet.

Den gemeinsamen Asymptoten beider Hyperbeln entsprechen die durch

(6) $$\operatorname{tg} w = \pm\sqrt{-\frac{\varrho_2}{\varrho_1}}$$

gekennzeichneten Richtungen. Für jede von ihnen ist die Krümmung des zugehörigen Normalschnitts gleich Null; und da ein Punkt einer ebenen Kurve, in welchem dies eintritt, im allgemeinen ein Wendepunkt ist, so werden die beiden Tangenten als Wendetangenten bezeichnet. Der allgemeine Ausdruck von n lehrt, daß sie der Gleichung

(7) $$L + 2M\lambda + N\lambda^2 = 0$$

genügen.

§ 28.

Der Eulersche Satz für die I. Flächendarstellung.

Der im § 26 geführte Beweis des Eulerschen Satzes ist zwar sehr einfach, und die besonderen Annahmen, durch die diese Einfachheit herbeigeführt wird, sind auch sonst von Nutzen, solange es sich nur um die Betrachtung einer Fläche in der unmittelbaren Umgebung eines bestimmten Punktes handelt. Aber für weitergehende allgemeine Untersuchungen sind sie nicht brauchbar, und es ist deshalb wünschenswert, schon für die Herstellung einer Relation zwischen n, n_1, n_2 und w ein Verfahren zu haben, bei dem man auf das Bildungsgesetz der allgemeinen Formeln nicht zu verzichten braucht.

Ein solches Verfahren ist übrigens leicht angebbar. Setzt man in der Formel S. 35 (13)

$$\frac{dv}{du} = \lambda_1, \quad \frac{\delta v}{\delta u} = \lambda,$$

so erhält man

$$\operatorname{tg} w = \frac{T(\lambda - \lambda_1)}{E + F(\lambda + \lambda_1) + G\lambda\lambda_1}$$

oder, da wegen der Orthogonalität der Hauptebenen

$$E + F(\lambda_1 + \lambda_2) + G\lambda_1\lambda_2 = 0,$$

also

$$E + F(\lambda + \lambda_1) + G\lambda\lambda_1 = (F + G\lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$$

ist,

$$\operatorname{tg} w = \frac{T(\lambda - \lambda_1)}{(F + G\lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}.$$

In diese Gleichung kann man mittels § 24 (12) (S. 76) n_1 und n_2 statt λ_1 und λ_2 einführen, und hat dann λ aus ihr und der Formel für n (§ 24 (1), S. 75) zu eliminieren. Diese Rechnung bietet keinerlei Schwierigkeiten, wird aber in der Durchführung umständlich; und wenn man sie durch symmetrische Behandlung von n_1 und n_2 übersichtlicher machen will, so muß man den Eulerschen Satz als schon bekannt voraussetzen.

Eine andere Methode, die in Rede stehende Relation herzuleiten, beruht auf der einfachen Bemerkung, daß die Größe, die gleich Null gesetzt nach § 24 (15) (S. 77) die Hauptkrümmungen liefert, die Determinante der quadratischen Differentialform

$$(En - L)\,du^2 + 2(Fn - M)\,du\,dv + (Gn - N)\,dv^2 \equiv \mathsf{A}n - \mathsf{B}$$

ist. Da nun eine binäre quadratische Form von verschwindender Determinante als Quadrat einer linearen Form dargestellt werden

kann, so müssen $\mathsf{A}n_1 - \mathsf{B}$ und $\mathsf{A}n_2 - \mathsf{B}$ als Quadrate linearer Differentialformen erscheinen. Umgekehrt werden A und B algebraische Summen solcher Quadrate, sodaß man setzen darf:

$$\mathsf{A} = \mathfrak{P}_1^2 + \mathfrak{P}_2^2$$
$$\mathsf{B} = \nu_1 \mathfrak{P}_1^2 + \nu_2 \mathfrak{P}_2^2 .$$

Bei dieser Schreibweise kommt zum Ausdruck, daß A, als definite Form, der Summe (nicht Differenz) der Quadrate zweier reellen linearen Formen gleich wird. Die Größen $\mathfrak{P}_1^2$ und $\mathfrak{P}_2^2$ auch in der ersten Gleichung noch mit Faktoren zu versehen, würde zwecklos sein, weil die Quadratwurzeln aus diesen Faktoren in die Koeffizienten der linearen Formen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ aufgenommen werden könnten. So, wie die Gleichungen aufgeschrieben sind, enthalten sie bei gegebenen Koeffizienten von A und B die Aufgabe, sechs Größen, nämlich ν_1, ν_2 und die Werte von $p_{11}, \ldots p_{22}$ in

$$(1) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{P}_1 &\equiv p_{11}\, du + p_{12}\, dv \\ \mathfrak{P}_2 &\equiv p_{21}\, du + p_{22}\, dv \end{aligned}$$

aus ebensovielen Bedingungen zu berechnen, die aus der Vergleichung der Koeffizienten von du^2, $du\,dv$ und dv^2 auf den linken und rechten Seiten hervorgehen.

In Folge des Ansatzes für A und B lassen sich, wie unmittelbar ersichtlich, $\mathsf{A}\nu_1 - \mathsf{B}$ und $\mathsf{B} - \mathsf{A}\nu_2$ als Quadrate von $\sqrt{\nu_1 - \nu_2}\,\mathfrak{P}_2$ und $\sqrt{\nu_1 - \nu_2}\,\mathfrak{P}_1$ darstellen. ν_1 und ν_2 müssen also Wurzeln der Gleichung sein, die durch Nullsetzung der Determinante

$$\begin{vmatrix} E\nu - L, & F\nu - M \\ F\nu - M, & G\nu - N \end{vmatrix}$$

entsteht. Und da sich diese Gleichung von § 24 (15) nur durch die Bezeichnung der Unbekannten unterscheidet, so sind ν_1, ν_2 mit n_1, n_2 identisch.

Die beiden Gleichungen für A und B nehmen hiernach die Form an:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \mathsf{A} &= \mathfrak{P}_1^2 + \mathfrak{P}_2^2 \\ \mathsf{B} &= n_1 \mathfrak{P}_1^2 + n_2 \mathfrak{P}_2^2 . \end{aligned}$$

Aus ihnen folgt

$$(3) \qquad n = \frac{n_1 \mathfrak{P}_1^2 + n_2 \mathfrak{P}_2^2}{\mathfrak{P}_1^2 + \mathfrak{P}_2^2} .$$

Für $\mathfrak{P}_2 = 0$ wird $n = n_1$, für $\mathfrak{P}_1 = 0$ $n = n_2$. Die durch

$$p_{21} + p_{22}\lambda = 0 \quad \text{und} \quad p_{11} + p_{12}\lambda = 0$$

bestimmten Werte von λ müssen also mit λ_1 und λ_2 übereinstimmen.

Was nun die Größen p_{ik} angeht, so gelten für sie in Folge von (2) die Bedingungen

$$(4)\qquad \begin{aligned} p_{11}^2 + p_{21}^2 &= E \\ p_{11} p_{12} + p_{21} p_{22} &= F \\ p_{12}^2 + p_{22}^2 &= G, \end{aligned}$$

$$(5)\qquad \begin{aligned} n_1 p_{11}^2 + n_2 p_{21}^2 &= L \\ n_1 p_{11} p_{12} + n_2 p_{21} p_{22} &= M \\ n_1 p_{12}^2 + n_2 p_{22}^2 &= N. \end{aligned}$$

Das erste dieser Systeme kann man dazu benutzen, auch die bilineare Form, die den Zähler von $\cos w$ bildet (S. 33 (8)), durch die in (2) auftretenden linearen Formen darzustellen. Setzt man nämlich

$$(6)\qquad \begin{aligned} p_{11}\delta u + p_{12}\delta v &= \overline{\mathfrak{P}}_1 \\ p_{21}\delta u + p_{22}\delta v &= \overline{\mathfrak{P}}_2, \end{aligned}$$

so wird

$$(7)\qquad E\,du\,\delta u + F(du\,\delta v + dv\,\delta u) + G\,dv\,\delta v = \mathfrak{P}_1\overline{\mathfrak{P}}_1 + \mathfrak{P}_2\overline{\mathfrak{P}}_2,$$

also ferner

$$(8)\qquad \cos w = \frac{\mathfrak{P}_1\overline{\mathfrak{P}}_1 + \mathfrak{P}_2\overline{\mathfrak{P}}_2}{\sqrt{\mathfrak{P}_1^2 + \mathfrak{P}_2^2}\,\sqrt{\overline{\mathfrak{P}}_1^2 + \overline{\mathfrak{P}}_2^2}}.$$

Den speziellen, im § 26 definierten Wert von w erhält man für $\overline{\mathfrak{P}}_2 = 0$. Schreibt man dann für $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ wieder $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$, um einen beliebigen Normalschnitt, wie in den vorhergehenden Paragraphen, durch $\frac{dv}{du}$ $\left(\text{nicht } \frac{\delta v}{\delta u}\right)$ zu kennzeichnen, so erhält man

$$(9)\qquad \cos^2 w = \frac{\mathfrak{P}_1^2}{\mathfrak{P}_1^2 + \mathfrak{P}_2^2}$$

und demnach

$$(10)\qquad \sin^2 w = \frac{\mathfrak{P}_2^2}{\mathfrak{P}_1^2 + \mathfrak{P}_2^2}.$$

Die Zusammenstellung dieser Ausdrücke mit (3) liefert unmittelbar die Eulersche Formel

$$n = n_1 \cos^2 w + n_2 \sin^2 w$$

wieder. Der Eulersche Satz steht hiernach im engsten Zusammenhange mit der simultanen Transformation der beiden Grundformen A und B der Flächentheorie in algebraische Summen von Quadraten linearer Differentialformen.

§ 29.

Hauptkrümmungen und Haupttangenten für die II. Flächendarstellung.

Zur Bestimmung der Haupttangenten und der Hauptkrümmungen einer Fläche, die durch die Gleichung

$$(\text{II})\qquad F(x, y, z) = 0$$

gegeben ist, gehen wir auf den zuerst gefundenen Ausdruck der Normalkrümmung (§ 18 (1))

$$(1) \qquad n = \frac{\Sigma X d^2 x}{\Sigma d x^2}$$

zurück, in welchem über die Art der Flächendarstellung noch nicht verfügt war.

Unter der jetzigen Annahme gelten für die Richtungskosinus der Normale nach § 15 (12, 15) (S. 50, 51) die Formeln

$$(2) \qquad X = \frac{1}{W}\frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{1}{W}\frac{\partial F}{\partial y}, \quad Z = \frac{1}{W}\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Wo es zweckmäßig erscheint, sollen statt

$$x, \quad y, \quad z$$

als Zeichen für die kartesischen Koordinaten auch

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3$$

gebraucht werden. Setzt man dann

$$(3) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = F_1, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = F_2, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = F_3,$$

also

$$(4) \qquad W = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2},$$

so wird

$$(5) \qquad n = \frac{1}{W}\frac{\sum_i F_i d^2 x_i}{\sum_i d x_i^2}.$$

Die Summationen erstrecken sich hier immer auf die Werte 1, 2, 3.

Nun genügen die Differentiale dx_1, dx_2, dx_3 der Bedingung

$$(6) \qquad \sum_i F_i dx_i = 0,$$

aus der weiter

$$(7) \qquad \sum_i F_i d^2 x_i + \sum_i dF_i dx_i = 0$$

hervorgeht. Für die zweiten partiellen Ableitungen der Funktion $F(x, y, z)$ oder $F(x_1, x_2, x_3)$ sollen die abkürzenden Bezeichnungen

$$(8) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= F_{11}, & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= F_{22}, & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} &= F_{33}, \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y\,\partial z} &= F_{23}, & \frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial x} &= F_{31}, & \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} &= F_{12} \end{aligned}$$

gelten. Dann ist

$$dF_i \equiv \sum_k \frac{\partial F_i}{\partial x_k} dx_k = \sum_k F_{ik} dx_k,$$

und nach (7)

$$\sum_i F_i d^2 x_i = - \sum_{i,k} F_{ik} dx_i dx_k.$$

Der Ausdruck der Normalkrümmung wird

$$(9) \qquad n = - \frac{1}{W} \cdot \frac{\sum_{i,k} F_{ik} dx_i dx_k}{\sum_i dx_i^2}.$$

Er hätte aus der Theorie der Normalschnitte (§ 19—22) entnommen werden können. Für die in ihm auftretenden Richtungskosinus der Tangente

$$\frac{dx_1}{\sqrt{\sum_i dx_i^2}}, \quad \frac{dx_2}{\sqrt{\sum_i dx_i^2}}, \quad \frac{dx_3}{\sqrt{\sum_i dx_i^2}}$$

mögen die Zeichen a, b, c beibehalten werden, weil die Tangentialnormale in dieser Untersuchung nicht vorkommt (vgl. S. 54). Es ist dann

$$(10) \quad n = - \frac{1}{W} (F_{11}a^2 + F_{22}b^2 + F_{33}c^2 + 2F_{23}bc + 2F_{31}ca + 2F_{12}ab),$$

d. h. n erscheint als eine ternäre quadratische Form. Ihre Argumente a, b, c können nur von einem Parameter abhängen, und in der Tat erfüllen sie als Richtungskosinus die Identität

$$(11) \qquad a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0,$$

und speziell für eine Flächentangente die Bedingung (6), d. h.

$$(12) \qquad F_1 a + F_2 b + F_3 c = 0.$$

Um nun die extremen Werte der Normalkrümmung oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Größe $-nW$ zu suchen, hat man das aus der Theorie der relativen Maxima und Minima bekannte Verfahren anzuwenden. Man multipliziere die linken Seiten der Bedingungsgleichungen (11) und (12) mit vorläufig unbestimmten Größen $-\mu$ und -2ν und füge die Produkte zu $-nW$ hinzu. Alsdann gehe man auf das absolute Maximum und Minimum der Größe

$$-nW - \mu(a^2 + b^2 + c^2 - 1) - 2\nu(F_1 a + F_2 b + F_3 c)$$

aus, indem man ihre partiellen Ableitungen nach a, b, c einzeln gleich Null setzt. Dies liefert

$$(13) \qquad \begin{aligned} (F_{11} - \mu)a + F_{12}b + F_{13}c - \nu F_1 &= 0 \\ F_{21}a + (F_{22} - \mu)b + F_{23}c - \nu F_2 &= 0 \\ F_{31}a + F_{32}b + (F_{33} - \mu)c - \nu F_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (11, 12, 13) enthalten fünf Bestimmungen für ebensoviele unbekannte Größen, nämlich a, b, c, μ und ν. Von diesen

sind μ und ν nur hilfsweise eingeführt worden; dagegen kommt es auf die Werte von a, b, c wesentlich an, denn diese müssen, in (10) eingesetzt, die gesuchten ausgezeichneten Werte von n geben.

Eliminiert man nun ν, indem man, zum Zweck der Benutzung von (12), die drei Gleichungen (13) der Reihe nach mit a, b, c multipliziert und addiert, so erhält man

$$-nW - \mu(a^2 + b^2 + c^2) = 0,$$

also weiter bei Hinzuziehung von (11):

$$\mu = -nW. \tag{14}$$

Das heißt: Wenn die Hilfsgröße μ aus dem vorliegenden Gleichungssystem mit bestimmt wäre, so würde es der Berechnung von n in der oben angedeuteten Weise nicht mehr bedürfen.

Es ist aber leicht, eine Gleichung für μ allein herzustellen. Das System (13, 12) kann als linear und homogen in a, b, c und μ betrachtet werden. Da nun diese Größen wegen der Relation (11) nicht gleichzeitig Null sein können, so muß die Determinante des Systems verschwinden, also

$$\begin{vmatrix} F_{11}-\mu, & F_{12}, & F_{13}, & F_1 \\ F_{21}, & F_{22}-\mu, & F_{23}, & F_2 \\ F_{31}, & F_{32}, & F_{33}-\mu, & F_3 \\ F_1, & F_2, & F_3, & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{15}$$

sein. Für μ sein Wert aus (14) eingesetzt und die partiellen Ableitungen ausgeschrieben:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + nW, & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}, & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + nW, & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}, & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}, & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}, & \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + nW, & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial F}{\partial x}, & \frac{\partial F}{\partial y}, & \frac{\partial F}{\partial z}, & 0 \end{vmatrix} = 0. \tag{16}$$

Dies ist für die Flächendarstellung (II) die quadratische Gleichung der Hauptkrümmungen. Aus ihr ergibt sich im besonderen für das Produkt $n_1 n_2$ der übersichtliche Ausdruck

$$K = \frac{-1}{(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^2} \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 & 0 \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Nach Bestimmung von μ lassen sich die Richtungskosinus a, b, c ihren Verhältnissen nach aus dem homogenen System in bekannter Weise darstellen und dann mittels der Gleichung (11) bis auf ein Vorzeichen vollständig berechnen. Zu jeder der beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung (15) gehört dabei ein System von Kosinus; jeder Hauptkrümmung wird also, wie es sein muß, eine Haupttangente eindeutig zugeordnet.

Kommt es hierauf nicht an, sondern soll nur die quadratische Gleichung der Haupttangenten, die wir für die Flächendarstellungen (I) und (III) bereits kennen, auch für die Darstellung (II) gebildet werden, so ist aus dem Gleichungssystem (13) außer ν auch μ zu eliminieren. Dann ergibt sich

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} F_{11}a + F_{12}b + F_{13}c, & a, & F_1 \\ F_{21}a + F_{22}b + F_{23}c, & b, & F_2 \\ F_{31}a + F_{32}b + F_{33}c, & c, & F_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder nach Multiplikation mit ds^2

$$(19)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}dy + \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}dz, & dx, & \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}dx + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}dy + \frac{\partial^2 F}{\partial y\partial z}dz, & dy, & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z\partial x}dx + \frac{\partial^2 F}{\partial z\partial y}dy + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}dz, & dz, & \frac{\partial F}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Bei dieser Schreibweise kommt die Relation (11) nicht mehr in Betracht. Die Differentiale sind nur der Bedingung (6) unterworfen, aus der man, freilich unter Verzicht auf die Symmetrie, eines der beiden Differentialverhältnisse entnehmen könnte, um eine quadratische Gleichung für das andere zu erhalten. Ist dieses etwa $\frac{dy}{dx}$, so geht die Gleichung, wenn man $F(x, y, z) = z - z(x, y)$ annimmt, in § 25 (8) (S. 80) über.

Schreibt man (19) in der Form

$$(20)\qquad \begin{vmatrix} dF_1, & dx, & F_1 \\ dF_2, & dy, & F_2 \\ dF_3, & dz, & F_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder kürzer

$$[dF_1, \quad dx, \quad F_1] = 0,$$

und führt statt der ersten partiellen Ableitungen von F die Richtungskosinus der Normale mittels der Gleichungen (2)

$$F_1 = WX, \qquad F_2 = WY, \qquad F_3 = WZ$$

wieder ein, so kommt

$$[WdX + XdW,\quad dx,\quad WX] = 0$$

und nach einigen unmittelbar ersichtlichen Umformungen

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ X & Y & Z \\ dX & dY & dZ \end{vmatrix} = 0. \tag{21}$$

Diese Form der Bestimmungsgleichung der Haupttangenten hat mit der speziellen Darstellung der Fläche nichts zu tun. Man muß also aus ihr z. B. die Gleichung § 24 (5) (S. 76) wieder herleiten können.

§ 30.

Umformung der vorhergehenden Gleichungen durch Einführung der Richtungskosinus der Normale.

Die im vorigen Paragraphen durchgeführte Untersuchung hatte den Zweck, die beiden quadratischen Gleichungen, von denen die Hauptkrümmungen und die Haupttangenten abhängen, so darzustellen, daß ihre Koeffizienten unmittelbar aus der linken Seite der Flächengleichung (II) gebildet werden können. Außerdem ist das Auftreten von Quotienten möglichst vermieden worden. Legt man speziell auf diesen Umstand kein Gewicht, so wird man grundsätzlich, statt mit den Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, mit den Größen X, Y, Z operieren, schon ihrer anschaulichen Bedeutung wegen. Es versteht sich von selbst, daß jene Größen nicht in jeder beliebigen Rechnung durch diese vertreten werden können, weil X, Y, Z nur von den Verhältnissen $F_1 : F_2 : F_3$ abhängen; aber in dem Ausdruck der Normalkrümmung, der hier überall die Grundlage der Untersuchung bildet, kommen eben die ersten Ableitungen bloß in den Verbindungen X, Y, Z vor.

In allen auf die Flächendarstellung (II) bezüglichen Formeln sollen, wie bisher, unter den partiellen Ableitungen solche im eigentlichen Sinne verstanden sein, bei deren Bildung also x, y, z als voneinander unabhängig angesehen werden. Die Größen X, Y, Z gelten als definiert durch die Gleichungen § 29 (2).

Als Ausgangsformel werde jetzt

$$n = -\frac{dx\,dX + dy\,dY + dz\,dZ}{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

(S. 74 (2)) angenommen. Setzt man darin

$$dX = \frac{\partial X}{\partial x} dx + \frac{\partial X}{\partial y} dy + \frac{\partial X}{\partial z} dz, \cdots$$

und führt wieder die Kosinus a, b, c ein, so erhält man

$$(1) \quad \begin{aligned} -n = \frac{\partial X}{\partial x} a^2 + \frac{\partial Y}{\partial y} b^2 + \frac{\partial Z}{\partial z} c^2 + \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y}\right) bc + \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z}\right) ca + \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right) ab. \end{aligned}$$

Die Funktion von a, b, c ist unter den Bedingungen

$$(2) \qquad a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0$$

$$(3) \qquad Xa + Yb + Zc = 0$$

(§ 29 (11, 12)) zu einem Maximum oder Minimum zu machen; d. h. es sind die partiellen Ableitungen von

$$-n - \mu'(a^2 + b^2 + c^2 - 1) - 2\nu'(Xa + Yb + Zc)$$

nach a, b, c zum Verschwinden zu bringen.

$$(4) \quad \begin{aligned} 2\left(\frac{\partial X}{\partial x} - \mu'\right) a + \left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}\right) b + \left(\frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x}\right) c - 2\nu' X = 0 \\ \left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}\right) a + 2\left(\frac{\partial Y}{\partial y} - \mu'\right) b + \left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y}\right) c - 2\nu' Y = 0 \\ \left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z}\right) a + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z}\right) b + 2\left(\frac{\partial Z}{\partial z} - \mu'\right) c - 2\nu' Z = 0. \end{aligned}$$

Die Multiplikation mit a, b, c und Addition liefert

$$(5) \qquad \mu' = -n$$

und demnach die Elimination von a, b, c und ν' aus (4) und (3):

$$(6) \quad \begin{vmatrix} 2\left(\frac{\partial X}{\partial x} + n\right), & \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x}, & \frac{\partial X}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial x}, & X \\ \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial y}, & 2\left(\frac{\partial Y}{\partial y} + n\right), & \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y}, & Y \\ \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z}, & \frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial z}, & 2\left(\frac{\partial Z}{\partial z} + n\right), & Z \\ X, & Y, & Z, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Determinante auf der linken Seite ist von der in der entsprechenden Gleichung § 29 (16) dadurch unterschieden, daß bestimmte Elemente, die dort eingliedrig sind, hier als Binome erscheinen. Dies rührt daher, daß in der Formel § 29 (9) die Relationen

$$F_{ki} = F_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3;\ i \gtrless k)$$

benutzt sind, dagegen nicht in dem Ausdruck (1) von n, der jetzt den Ausgangspunkt bildet. Wendet man sie auch hier an, so kann man in jedem der drei Binome, die in (1) als Koeffizienten von bc, ca und ab auftreten, die beiden Bestandteile in einfache Beziehungen zu einander bringen. Es werde zur Abkürzung

$$\frac{1}{W}\frac{\partial W}{\partial x} = w_1, \quad \frac{1}{W}\frac{\partial W}{\partial y} = w_2, \quad \frac{1}{W}\frac{\partial W}{\partial z} = w_3$$

gesetzt, so findet sich

$$(7) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y} &= w_2 Z - w_3 Y \\ \frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z} &= w_3 X - w_1 Z \\ \frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x} &= w_1 Y - w_2 X. \end{aligned}$$

Diese Relationen mögen dazu benutzt werden, aus der ersten Zeile der Determinante die Ableitungen von Y und Z zu entfernen und die beiden folgenden Zeilen entsprechend umzuformen. Die Gleichung (6) heißt dann:

$$\begin{vmatrix} 2\left(\frac{\partial X}{\partial x} + n\right), & 2\frac{\partial X}{\partial y} - w_1 Y + w_2 X, & 2\frac{\partial X}{\partial z} - w_1 Z + w_3 X, & X \\ 2\frac{\partial Y}{\partial x} - w_2 X + w_1 Y, & 2\left(\frac{\partial Y}{\partial y} + n\right), & 2\frac{\partial Y}{\partial z} - w_2 Z + w_3 Y, & Y \\ 2\frac{\partial Z}{\partial x} - w_3 X + w_1 Z, & 2\frac{\partial Z}{\partial y} - w_3 Y + w_2 Z, & 2\left(\frac{\partial Z}{\partial z} + n\right), & Z \\ X, & Y, & Z, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Wird nun weiter die letzte Zeile der Determinante, nach Multiplikation mit w_1, w_2 und w_3 der Reihe nach, zur ersten, zweiten und dritten Zeile addiert, hierauf dieselbe Operation, nur für $-w_1$, $-w_2$, $-w_3$ als Multiplikatoren, mit den Spalten angestellt, so ergibt sich

$$\begin{vmatrix} 2\left(\frac{\partial X}{\partial x} + n\right), & 2\frac{\partial X}{\partial y}, & 2\frac{\partial X}{\partial z}, & X \\ 2\frac{\partial Y}{\partial x}, & 2\left(\frac{\partial Y}{\partial y} + n\right), & 2\frac{\partial Y}{\partial z}, & Y \\ 2\frac{\partial Z}{\partial x}, & 2\frac{\partial Z}{\partial y}, & 2\left(\frac{\partial Z}{\partial z} + n\right), & Z \\ X, & Y, & Z, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Endlich kann man die Determinante auf den dritten Grad bringen, indem man, nach Hinzufügung des Faktors $-2n$ in der vierten Zeile,

die mit X, Y und Z multiplizierte erste, zweite und dritte Zeile zu der vierten addiert und die aus der Identität

$$\Sigma X^2 = 1$$

folgenden Relationen

$$(8) \qquad \Sigma X \frac{\partial X}{\partial x} = 0, \quad \Sigma X \frac{\partial X}{\partial y} = 0, \quad \Sigma X \frac{\partial X}{\partial z} = 0$$

benutzt. Dann werden nämlich die drei ersten Elemente der vierten Zeile gleich Null, das letzte gleich Eins, und die umgewandelte Gleichung lautet nach Weglassung des Faktors 2^3:

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} + n, & \frac{\partial X}{\partial y}, & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x}, & \frac{\partial Y}{\partial y} + n, & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x}, & \frac{\partial Z}{\partial y}, & \frac{\partial Z}{\partial z} + n \end{vmatrix} = 0.$$

Sie hat, nach Potenzen von n geordnet, die Form

$$n^3 + An^2 + Bn + C = 0,$$

scheint also, wenn man sie ohne Rücksicht auf ihre Entstehung betrachtet, in n vom dritten Grade zu sein. Aber die Größe

$$C \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} & \frac{\partial X}{\partial z} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} & \frac{\partial Y}{\partial z} \\ \frac{\partial Z}{\partial x} & \frac{\partial Z}{\partial y} & \frac{\partial Z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

ist in Folge der in X, Y, Z homogenen linearen Gleichungen (8) gleich Null, sodaß sich die Gleichung auf

$$n^2 + An + B = 0$$

reduziert. Entnimmt man nun A und B aus der Determinante, so findet man für die Summe der Hauptkrümmungen die elegante Formel

$$(10) \qquad H = -\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

und für das Produkt:

$$(11) \qquad K = \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial Z}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial x}\frac{\partial X}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right).$$

§ 31.

Umdrehungsflächen.

Unter den Flächen, die durch spezielle geometrische Eigenschaften definiert werden, sind die Umdrehungsflächen (Rotationsflächen) besonders wichtig. Eine Umdrehungsfläche entsteht durch verschiebungslose Drehung einer ebenen Kurve um eine feste, in ihrer Ebene gelegene Gerade, die Achse der Fläche. Jeder Punkt der Kurve beschreibt dabei einen Kreis, welcher Parallelkreis genannt wird; die erzeugende Kurve selbst wird als Meridian der Umdrehungsfläche bezeichnet.

Behufs einer einfachen analytischen Darstellung einer solchen Fläche nehme man die Achse als z-Achse, die Ebene, in der die Meridiankurve ursprünglich gelegen ist, als (xz)-Ebene des rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems an. Die Gleichung der Kurve sei

$$z = f(x). \tag{1}$$

Irgend eine durch die Achse gehende Ebene schneidet die Fläche in einer zu dieser Kurve kongruenten; nimmt man demnach in der Schnittebene ein Koordinatensystem (u, z) an, das denselben Anfangspunkt hat wie das System (x, z), so muß

$$z = f(u)$$

die Gleichung der Schnittlinie sein. Nun hat man, bei der Bedeutung von u als Radiusvektor in der (xy)-Ebene,

$$u^2 = x^2 + y^2 \tag{2}$$

für alle Punkte einer beliebigen Meridiankurve; demnach ist

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) \tag{3}$$

die Gleichung der Umdrehungsfläche.

Um die Theorie der Hauptkrümmungen auf diese Flächen anzuwenden, wird man sich der Formeln des § 25 bedienen, weil die darstellende Gleichung (3) nach z aufgelöst erscheint. Für $\sqrt{x^2 + y^2}$ soll zur Abkürzung das Zeichen u beibehalten werden. Dann gelten für die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von z nach x und y die Formeln

$$p = f'(u)\,\frac{x}{u}$$

$$q = f'(u)\,\frac{y}{u}$$

$$r = \quad f'(u)\,\frac{y^2}{u^3} + f''(u)\,\frac{x^2}{u^2}$$

$$s = -f'(u)\,\frac{xy}{u^3} + f''(u)\,\frac{xy}{u^2}$$

$$t = \quad f'(u)\,\frac{x^2}{u^3} + f''(u)\,\frac{y^2}{u^2}.$$

Diese Ausdrücke können für die vorliegende Untersuchung noch vereinfacht werden. Da nämlich die Umdrehungsfläche in allen Punkten eines Parallelkreises dieselbe Gestalt hat, so braucht sie nur für einen der beiden Punkte betrachtet zu werden, in denen der Parallelkreis vom Radius u die (xz)-Ebene schneidet. Nimmt man den Punkt, für welchen $x > 0$ ist, so wird

$$y = 0, \quad x = u,$$

also

$$p = f'(x), \quad q = 0, \quad r = f''(x), \quad s = 0, \quad t = \frac{f'(x)}{x}.$$

Führt man diese Werte in § 25 (10) ein, nachdem man darin $n = \frac{1}{\varrho}$ gesetzt hat, so folgt

$$\frac{f'(x)f''(x)}{x}\varrho^2 - \varepsilon\sqrt{1+f'(x)^2}\left(f''(x) + (1+f'(x)^2)\frac{f'(x)}{x}\right)\varrho + (1+f'(x)^2)^2 = 0$$

oder

$$(4) \qquad \varrho^2 - \varepsilon\left(\frac{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)} + \frac{x(1+f'(x)^2)^{\frac{1}{2}}}{f'(x)}\right)\varrho + \frac{x(1+f'(x)^2)^2}{f'(x)f''(x)} = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind

$$(5) \qquad \varrho_1 = \varepsilon\frac{(1+f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}{f''(x)}, \quad \varrho_2 = \varepsilon\frac{x(1+f'(x)^2)^{\frac{1}{2}}}{f'(x)}.$$

Der erste Ausdruck stimmt, abgesehen vom Vorzeichen, mit dem Krümmungshalbmesser der Meridiankurve überein; von dem zweiten ist leicht zu zeigen, daß er, ebenfalls dem absoluten Betrage nach genommen, das Stück der Normale darstellt, das sich von dem betrachteten Punkte bis zur Achse erstreckt. In der Figur hat man nämlich

$$\begin{aligned} \overline{AN}^2 &= \overline{AB}^2 + \overline{BN}^2 \\ &= x^2 + x^2 \operatorname{ctg}^2\psi \\ &= x^2(1 + \operatorname{ctg}^2(\pi - \varphi)), \end{aligned}$$

und da

$$\operatorname{tg}\varphi = f'(x)$$

ist:

$$\overline{AN}^2 = \frac{x^2(1+f'(x)^2)}{f'(x)^2}.$$

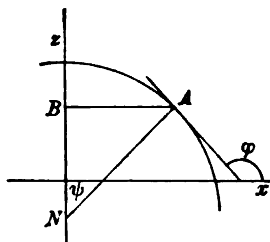


Fig. 10.

Nach dem Zeichen von

$$rt - s^2 \equiv \frac{f'(x)f''(x)}{x}$$

richtet es sich, ob die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte, also das Krümmungszentrum M des Meridians und der Schnittpunkt N der

Normale mit der Achse, durch die Fläche von einander getrennt sind oder nicht. Die Bedeutung dieses Vorzeichens für die Gestalt der Meridiankurve tritt am anschaulichsten hervor, wenn längs der Kurve nicht z als Funktion von x, sondern umgekehrt x als Funktion von z betrachtet wird,

$$x = g(z).$$

Zur Transformation der Resultate kann man sich der Formeln aus der Theorie der inversen Funktionen

$$f'(x) = \frac{1}{g'(z)}, \qquad f''(x) = -\frac{g''(z)}{g'(z)^3}$$

bedienen; sie liefern im besonderen

$$rt - s^2 = -\frac{g''(z)}{g(z)g'(z)^4}.$$

Hiernach ist $rt - s^2$ positiv, wenn $g(z)$ und $g''(z)$ ungleiche Vorzeichen haben, negativ im entgegengesetzten Falle. D. h. die Hauptkrümmungsmittelpunkte liegen auf derselben oder auf entgegengesetzten Seiten der Fläche, je nachdem die Meridiankurve der Achse die konkave oder die konvexe Seite zukehrt.

Unter den Flächen, für welche die zweite Annahme gilt, ist diejenige bemerkenswert, bei der M und N gleichen Abstand vom Flächenpunkte A haben, für die also die Bedingung

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 0$$

gilt. Die z-Koordinate dieser Fläche muß der partiellen Differentialgleichung

(6) $$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0$$

genügen, die aber, weil es nur auf den Meridian ankommt, durch die gewöhnliche Differentialgleichung

$$xf''(x) + f'(x)(1 + f'(x)^2) = 0$$

vertreten werden kann. Setzt man, da $f(x)$ nicht explizite auftritt,

$$f'(x) \equiv \frac{dz}{dx} = z',$$

so hat man z' aus

$$x\frac{dz'}{dx} + z'(1 + z'^2) = 0$$

oder

$$\frac{z'dz'}{1+z'^2} - \frac{dz'}{z'} = \frac{dx}{x}$$

zu bestimmen. Die Integration liefert

$$\frac{z'}{\sqrt{1+z'^2}} = \frac{a}{x}$$

$$dz = \frac{a\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\sqrt{x^2-a^2} + x = ae^{\frac{z-z_0}{a}}$$

für a und z_0 als willkürliche Konstanten. Bildet man aus der letzten Gleichung

$$\sqrt{x^2-a^2} - x = -ae^{-\frac{z-z_0}{a}}$$

und eliminiert die Wurzelgröße, so erhält man

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z-z_0}{a}} + e^{-\frac{z-z_0}{a}}\right).$$

Das ist die Gleichung einer Kettenlinie. Die hier betrachtete Umdrehungsfläche, deren Meridian die Kettenlinie ist, wird als **Katenoid** bezeichnet.

Da für die Umdrehungsfläche eine Verschiebung des Koordinatenanfangspunktes längs der z-Achse ohne Bedeutung ist, so darf

$$z_0 = 0$$

gesetzt, also die Gleichung der Kettenlinie in der Form

(7) $$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right)$$

oder

(8) $$x = a \cosh \frac{z}{a}$$

angenommen werden.

Sollen die Koordinaten der Umdrehungsfläche durch zwei unabhängige Variable dargestellt werden, so kann man

(10) $$\begin{aligned} x &= u \cos v \\ y &= u \sin v \\ z &= f(u) \end{aligned}$$

setzen, was der Einführung von Polarkoordinaten in der (xy)-Ebene entspricht. Die Linien $v = \text{const.}$ sind die Meridiane, $u = \text{const.}$ die Parallelkreise der Fläche. Für das Linienelement ergibt sich aus

$$\begin{aligned} dx &= \cos v\,du - u \sin v\,dv \\ dy &= \sin v\,du + u \cos v\,dv \\ dz &= f'(u)\,du \end{aligned}$$

die Gleichung

(11) $$ds^2 = (1 + f'(u)^2)du^2 + u^2dv^2.$$

Die Fundamentalgrößen erster Ordnung haben hiernach die Werte

(12) $$E = 1 + f'(u)^2, \qquad F = 0, \qquad G = u^2.$$

Nach § 10 ist $F = 0$ das Kennzeichen dafür, daß die Meridiane und die Parallelkreise sich unter rechten Winkeln schneiden.

Die Ausdrücke (12) können in bestimmter Hinsicht noch vereinfacht werden. Es werde eine neue Variable u' durch die Gleichung

$$\sqrt{1 + f'(u)^2}\, du = du'$$

oder

(13) $$\int_{u_0}^{u} \sqrt{1 + f'(u)^2}\, du = u'$$

definiert, d. h. es sei u' die Bogenlänge des Meridians, gerechnet von dem zu $u = u_0$ gehörenden Punkte aus. Die Funktion f sei so beschaffen, daß sich auch umgekehrt für einen gewissen Bereich von u' die Größe u als eindeutige Funktion von u',

$$u = \psi(u'),$$

herausstellt. Zu einem konstanten Werte von u gehört hiernach wieder ein konstanter Wert von u', und umgekehrt; d. h. die Gleichung $u' = \text{const.}$ stellt ebenfalls die Schar der Parallelkreise dar. Schreibt man schließlich für u' wieder u, so geht (11) über in

(14) $$ds^2 = du^2 + \psi(u)^2dv^2,$$

was für die Fundamentalgrößen die Formeln

(15) $$E = 1, \qquad F = 0, \qquad G = \psi(u)^2$$

liefert. Man kann also dadurch, daß man die Parallelkreise und die Meridiane einer Umdrehungsfläche als Koordinatenlinien annimmt und den Parameter der Parallelkreise passend wählt, bewirken, daß eine der Fundamentalgrößen eine Funktion dieses Parameters allein wird, während die beiden anderen konstante Werte haben.

Die zweite Fundamentalgröße ist, wie es wegen der geometrischen Bedeutung der Koordinatenlinien der Fall sein muß, nach der Transformation gleich Null geblieben.

Eine Vereinfachung der Formel (11) läßt sich noch auf andere Weise erzielen. Setzt man

$$ds^2 = u^2\left(\frac{1 + f'(u)^2}{u^2}\, du^2 + dv^2\right),$$

definiert eine neue Veränderliche u_1 durch die Differentialgleichung

$$\frac{\sqrt{1+f'(u)^2}}{u}\,du = du_1,$$

nimmt, den eben gemachten Voraussetzungen entsprechend,

$$u = \psi_1(u_1)$$

an und schreibt endlich auch für u_1 wieder u, so ergibt sich

$$(16)\qquad ds^2 = \psi_1(u)^2(du^2 + dv^2).$$

Hier sind die erste und dritte Fundamentalgröße gleich einer und derselben Funktion von u allein, und die zweite ist wieder gleich Null, weil auch die zweite Transformation das Koordinatennetz als solches nicht geändert hat.

Um nun beispielsweise das Linienelement des Katenoids zu berechnen und dafür die eben angedeuteten Transformationen durchzuführen, braucht man nicht bis zu der aus (7) folgenden Bestimmung für $f(u)$

$$\frac{a}{2}\left(e^{\frac{f(u)}{a}} + e^{-\frac{f(u)}{a}}\right) = u$$

aufzusteigen, sondern kann, da nur die erste Ableitung von $f(u)$ gebraucht wird, bei

$$dz = \frac{a\,du}{\sqrt{u^2 - a^2}}$$

stehen bleiben. Dann folgt

$$(17)\qquad ds^2 = \frac{u^2}{u^2 - a^2}du^2 + u^2 dv^2.$$

Wird die Bogenlänge u' der Kettenlinie vom Scheitelpunkte $(a, 0)$ aus gerechnet, so ist die Differentialgleichung

$$\frac{u\,du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = du'$$

unter der Nebenbedingung

$$u = a, \quad u' = 0$$

zu integrieren, was

$$u' = \sqrt{u^2 - a^2}$$

$$u^2 = u'^2 + a^2$$

$$(18)\qquad ds^2 = du'^2 + (u'^2 + a^2)dv^2$$

liefert.

Setzt man andererseits

$$\frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = du_1$$

und läßt auch für u_1 den Wert Null zu $u = a$ gehören, so erhält man

$$u_1 = \log \frac{u + \sqrt{u^2 - a^2}}{a}$$

$$u = \frac{a}{2}(e^{u_1} + e^{-u_1}) = a \cosh u_1$$

$$(19) \qquad ds^2 = a^2 \cosh^2 u_1 (du_1^2 + dv^2).$$

§ 32.

Schnitt einer Fläche mit ihrer Tangentialebene.

Von der Gestalt einer Fläche in der Nähe eines gegebenen Punktes kann man sich nach Dupin dadurch eine anschauliche Vorstellung verschaffen, daß man die Fläche durch eine der Tangentialebene parallele und ihr benachbarte Ebene schneidet. Zuerst aber soll über den Schnitt der Fläche mit der Tangentialebene selbst etwas ausgesagt werden. Die Frage nach einem solchen Schnitt ist deshalb berechtigt, weil die Vorstellung, die man aus der elementaren Stereometrie von der Kugel her mitbringt, die Berührungsebene habe mit der Fläche einen und nur einen Punkt gemein, schon für andere Flächen 2. Grades versagt. Bildet man z. B. für das hyperbolische Paraboloid

$$(1) \qquad 2\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{x}^2}{a} - \frac{\mathfrak{y}^2}{b} \qquad (a > 0,\ b > 0)$$

die Tangentialebene in einem beliebigen Punkte $A \equiv (xyz)$ aus

$$(2) \qquad \mathfrak{z} - z = p(\mathfrak{x} - x) + q(\mathfrak{y} - y)$$

(S. 46), so erhält man wegen

$$2z = \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b}$$

$$p = \frac{x}{a}, \quad q = -\frac{y}{b}$$

die Gleichung

$$(3) \qquad \mathfrak{z} + z = \frac{x\mathfrak{x}}{a} - \frac{y\mathfrak{y}}{b}.$$

Mit der Flächengleichung zusammengestellt liefert sie

$$\frac{(\mathfrak{x} - x)^2}{a} - \frac{(\mathfrak{y} - y)^2}{b} = 0,$$

d. h.

$$(4) \qquad \frac{\mathfrak{x} - x}{\sqrt{a}} \pm \frac{\mathfrak{y} - y}{\sqrt{b}} = 0.$$

Die Tangentialebene schneidet demnach die Fläche in zwei geraden Linien, die bei beliebiger Lage des Punktes A immer je einer festen Ebene parallel sind. Es sind die beiden erzeugenden Geraden des hyperbolischen Paraboloids.

Es sei jetzt allgemein

$$\mathfrak{z} = z(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$$

die Flächengleichung, die demnach zusammen mit (2) die Schnittlinie der Fläche und der Tangentialebene des Punktes A darstellt. Nach der Taylorschen Formel kann man setzen

$$(5) \quad \mathfrak{z} = z(x, y) + p(\mathfrak{x} - x) + q(\mathfrak{y} - y) \\ + \frac{1}{2}(r(\mathfrak{x} - x)^2 + 2s(\mathfrak{x} - x)(\mathfrak{y} - y) + t(\mathfrak{y} - y)^2) + \cdots,$$

wobei man sich die Entwickelung irgendwo abgebrochen und ein Restglied hinzugefügt zu denken hat. Die Untersuchung wird sehr vereinfacht, wenn man das Koordinatensystem in der im § 26 (S. 83) beschriebenen Weise wählt, also namentlich den Punkt A als Anfangspunkt der Koordinaten, die Tangentialebene (2) als (xy)-Ebene annimmt. Die Flächengleichung (5) lautet dann, da x, y, z, p, q gleich Null sind,

$$(6) \quad \mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}(r\mathfrak{x}^2 + 2s\mathfrak{x}\mathfrak{y} + t\mathfrak{y}^2) + \cdots.$$

Stellt man sie mit $\mathfrak{z} = 0$ zusammen, so kann man die Gleichung der Schnittkurve

$$(7) \quad f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) \equiv \tfrac{1}{2}(r\mathfrak{x}^2 + 2s\mathfrak{x}\mathfrak{y} + t\mathfrak{y}^2) + \cdots = 0$$

nach der Methode behandeln, die aus der Theorie der ebenen, auf ein zweiachsiges Koordinatensystem bezogenen Kurven bekannt ist. Es wird

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = rx + sy + \cdots$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = sx + ty + \cdots,$$

und da diese Ausdrücke für $x = 0$, $y = 0$ verschwinden, so ist der Berührungspunkt der Tangentialebene ein singulärer Punkt ihrer Schnittlinie mit der Fläche. Von welcher Art die Singularität ist, muß mit Hilfe der höheren Ableitungen entschieden werden, richtet sich also im allgemeinen nach den Bedingungen

$$rt - s^2 \gtreqless 0,$$

d. h.

$$K \gtreqless 0.$$

Denn

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r + \cdots,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = s + \cdots,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t + \cdots$$

gehen für $x = 0$, $y = 0$ in r, s, t über. Im besonderen kann der Berührungspunkt ein isolierter Punkt der Kurve sein, für $K > 0$.

§ 33.

Der Dupinsche Kegelschnitt.

Das eben wieder benutzte spezielle System kartesischer Koordinaten werde nun dadurch noch enger begrenzt, daß man die beiden ersten Achsen mit den Haupttangenten zusammenfallen läßt und die positive Richtung der dritten Achse passend wählt. Nach § 26 darf dann

$$s = 0$$

$$r = n_1 \equiv \frac{1}{\varrho_1}, \quad t = n_2 \equiv \frac{1}{\varrho_2}$$

gesetzt werden. In der obigen Flächengleichung (6) fällt aus den Gliedern zweiter Dimension das mit $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ weg, und die Gleichung selbst lautet, wenn jetzt auch die Glieder dritter Dimension angegeben werden:

$$\text{(1)} \quad \mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}(n_1 \mathfrak{x}^2 + n_2 \mathfrak{y}^2) + \tfrac{1}{6}(z_{30}\mathfrak{x}^3 + 3 z_{21}\mathfrak{x}^2\mathfrak{y} + 3 z_{12}\mathfrak{x}\mathfrak{y}^2 + z_{03}\mathfrak{y}^3) + \cdots.$$

Die Koeffizienten

$$z_{30}, \quad z_{21}, \quad z_{12}, \quad z_{03}$$

bedeuten die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3},$$

und zwar hier für $x = y = 0$.

Die Fläche soll jetzt durch eine der Tangentialebene parallele Ebene

$$\text{(2)} \qquad \mathfrak{z} = \zeta$$

geschnitten werden, deren Abstand $|\zeta|$ von der Tangentialebene unendlichklein ist. Ersetzt man in dem Gleichungspaar (1, 2) die erste Gleichung durch

$$\text{(3)} \qquad \tfrac{1}{2}(n_1 \mathfrak{x}^2 + n_2 \mathfrak{y}^2) + \cdots = \zeta$$

und betrachtet nur unendlichkleine Werte von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, also solche Punkte, die dem gegebenen unendlichnahe liegen, so können schon

die Glieder dritter Dimension gegen die der zweiten vernachlässigt werden, falls keine der beiden Größen n_1 und n_2 gleich Null ist. Denn

$$\tfrac{1}{6}\mathfrak{x}^2(s_{30}\mathfrak{x} + 3s_{21}\mathfrak{y}) \text{ ist gegen } \tfrac{1}{2}n_1\mathfrak{x}^2,$$

$$\tfrac{1}{6}\mathfrak{y}^2(3s_{12}\mathfrak{x} + s_{03}\mathfrak{y}) \quad " \quad " \quad \tfrac{1}{2}n_2\mathfrak{y}^2$$

unendlichklein. Wird nun demgemäß die Gleichung auf

$$\tfrac{1}{2}(n_1\mathfrak{x}^2 + n_2\mathfrak{y}^2) = \zeta$$

oder

(4) $$\frac{\mathfrak{x}^2}{2\zeta\varrho_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{2\zeta\varrho_2} = 1$$

abgekürzt, so stellt diese, immer mit (2) zusammen, einen Kegelschnitt dar, dessen Halbachsenquadrate den absoluten Beträgen von $2\zeta\varrho_1$ und $2\zeta\varrho_2$ gleich sind. Ist er geschlossen, so begrenzt er einen unendlichkleinen Flächeninhalt; und man sagt deshalb allgemein, eine der Tangentialebene parallele und unendlichnahe Ebene schneide die Fläche in einem unendlichkleinen Kegelschnitt. Er wird als der Dupinsche Kegelschnitt (die Indikatrix) der Fläche für den gegebenen Punkt bezeichnet.

In diesem Ergebnis liegt der eigentliche Grund für den Zusammenhang der Theorie der Normalkrümmung mit der Kegelschnittlehre (vgl. S. 85).

Die verschiedenen Formen, die der Dupinsche Kegelschnitt haben kann, hängen von dem Vorzeichen des Produktes der Hauptkrümmungsradien ab. Ist dieses Produkt positiv, d. h. $K > 0$, haben also ϱ_1 und ϱ_2 dasselbe Vorzeichen ε, so daß

$$\varrho_1 = \varepsilon\varrho_1', \qquad \varrho_2 = \varepsilon\varrho_2'$$

ist, für ϱ_1' und ϱ_2' als positive Größen, so wird für

$$\zeta = \varepsilon\zeta' \qquad (\zeta' > 0)$$

der Kegelschnitt eine Ellipse

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{2\zeta'\varrho_1'} + \frac{\mathfrak{y}^2}{2\zeta'\varrho_2'} = 1;$$

für

$$\zeta = -\varepsilon\zeta'$$

dagegen imaginär, der Gleichung

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{2\zeta'\varrho_1'} + \frac{\mathfrak{y}^2}{2\zeta'\varrho_2'} = -1$$

gemäß. Die beiden Annahmen über ζ gehören zu Ebenen auf entgegengesetzten Seiten der Tangentialebene. Man hat also das Resultat,

daß wenn das Produkt der Hauptkrümmungen in dem betrachteten Punkte positiv ist, die Fläche in dessen Nähe ganz auf einer Seite der Tangentialebene liegt. Ein solcher Punkt wird als elliptisch bezeichnet, und man sagt, daß die Fläche in ihm konvex ist — nämlich gegen die Tangentialebene.

Haben zweitens ϱ_1 und ϱ_2 verschiedene Vorzeichen, d. h. ist $K < 0$, so daß für $\varrho_1 = \varepsilon \varrho_1'$

$$\varrho_2 = - \varepsilon \varrho_2'$$

gesetzt werden muß, so heißt die zweite Gleichung des Dupinschen Kegelschnitts unter der Annahme $\zeta = \varepsilon \zeta'$

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{2\zeta'\varrho_1'} - \frac{\mathfrak{y}^2}{2\zeta'\varrho_2'} = 1$$

und für $\zeta = - \varepsilon \zeta'$

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{2\zeta'\varrho_1'} - \frac{\mathfrak{y}^2}{2\zeta'\varrho_2'} = -1.$$

Beide Kurven sind jetzt reell. In die Tangentialebene selbst verlegt würden es zwei konjugierte Hyperbeln sein. Ist also das Produkt der beiden Hauptkrümmungen negativ, so liegt die Fläche in der Nähe des betrachteten Punktes auf beiden Seiten der Tangentialebene, oder diese Ebene schneidet die Fläche. Für einen solchen Punkt heißt die Fläche konvex-konkav (sattelförmig), der Punkt selbst wird als ein hyperbolischer bezeichnet.

Die im § 25 für Flächen zweiten Grades gefundenen Resultate lassen sich hiernach dahin aussprechen, daß der Dupinsche Kegelschnitt für das Ellipsoid, das zweischalige Hyperboloid und das elliptische Paraboloid allenthalben eine Ellipse, für das einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid eine Hyperbel ist. D. h. die drei ersten Flächen sind überall konvex, die beiden anderen konvex-konkav. Für den Kegel aber hören die obigen Ergebnisse der Dupinschen Anschauungsweise auf zu gelten, weil für jeden seiner Punkte eine der beiden Hauptkrümmungen gleich Null ist.

Um zu untersuchen, was für $K = 0$ eintritt, betrachten wir zunächst den speziellen Kegel

$$\mathfrak{x}^2 - 2(\mathfrak{y} - y_0)\mathfrak{z} = 0. \tag{5}$$

Seine Spitze liegt im Punkte $(0, y_0, 0)$; zu seinen Kanten gehört die y-Achse. Die Gleichung der Tangentialebene im Punkte (xyz)

$$x\mathfrak{x} - z\mathfrak{y} - (y - y_0)\mathfrak{z} + y_0 z = 0 \tag{6}$$

geht für einen von der Spitze verschiedenen, sonst beliebigen Punkt der y-Achse, z. B. auch für den Koordinatenanfangspunkt, in

$$\mathfrak{z} = 0$$

über. Wie vorher ist nun aus der Flächengleichung $\mathfrak{z}$ als Funktion von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ darzustellen, die Funktion für unendlichkleine Werte ihrer Argumente zu entwickeln und $\mathfrak{z} = \zeta$ hinzuzunehmen. Auf diese Weise ergibt sich

$$(7) \qquad \mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{x}^2}{2(\mathfrak{y} - y_0)}$$

$$(8) \qquad \zeta = -\frac{\mathfrak{x}^2}{2y_0} - \frac{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}}{2y_0^2} - \frac{\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^2}{2y_0^3} - \cdots.$$

Da rechts die Glieder von der dritten Dimension an gegen das Anfangsglied vernachlässigt werden können, so darf man (8) auf

$$(9) \qquad \mathfrak{x}^2 = -2y_0\zeta$$

abkürzen; eine Gleichung, der nur dann eine geometrische Bedeutung zukommt, wenn y_0 und ζ entgegengesetzte Vorzeichen haben. Der Kegel liegt in der Nähe des Nullpunktes auf einer Seite der Tangentialebene, und der Dupinsche Kegelschnitt zerfällt in zwei parallele gerade Linien.

Allein diese Resultate lassen sich nicht allgemein auf Punkte einer beliebigen Fläche, in denen eine Hauptkrümmung Null ist, übertragen. Es sei $n_2 \equiv t = 0$, also die Flächengleichung nach (1):

$$(10) \qquad 2\mathfrak{z} = r\mathfrak{x}^2 + \tfrac{1}{3}(z_{30}\mathfrak{x}^3 + 3z_{21}\mathfrak{x}^2\mathfrak{y} + 3z_{12}\mathfrak{x}\mathfrak{y}^2 + z_{03}\mathfrak{y}^3) + \cdots.$$

Wie für $K \gtrless 0$ können die beiden Glieder dritter Dimension $\frac{1}{3}z_{30}\mathfrak{x}^3$ und $z_{21}\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}$ gegen $r\mathfrak{x}^2$ vernachlässigt werden, aber nicht mehr die beiden folgenden. Nur darf das vorletzte, wenn das letzte wirklich vorkommt, also z_{03} nicht gleichzeitig mit t verschwindet, weggelassen werden. Denn unterwirft man die unendlichkleinen, voneinander unabhängigen Größen den Bedingungen

$$\mathfrak{x}^2 < \delta, \qquad |\mathfrak{y}^3| < \delta,$$

so wird

$$|\mathfrak{x}\mathfrak{y}^2| = |\mathfrak{x}^2\mathfrak{y}^4|^{\frac{1}{2}} = |\mathfrak{x}^2|^{\frac{1}{2}}\,|\mathfrak{y}^3|^{\frac{1}{2}}\,|\mathfrak{y}|^{\frac{1}{2}} < \delta^{\frac{1}{2}}\,.\,\delta^{\frac{1}{2}}\,.\,|\mathfrak{y}|^{\frac{1}{2}},$$

also $|\mathfrak{x}\mathfrak{y}^2|$ unendlichklein gegen δ. Wenn demnach zu $t = 0$ keine weiteren Bedingungen hinzutreten, so kann man die Fläche in der Nähe des Nullpunktes durch die spezielle Fläche dritter Ordnung

$$(11) \qquad \mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}r\mathfrak{x}^2 + \tfrac{1}{6}z_{03}\mathfrak{y}^3$$

ersetzen. Die parallel der Tangentialebene in unendlich kleinem Abstande geführten ebenen Schnitte

$$(12) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{z} &= \zeta \\ r\mathfrak{x}^2 + \tfrac{1}{3}z_{03}\mathfrak{y}^2 &= 2\zeta \end{aligned}$$

sind für $\zeta \gtrless 0$ reell. Will man einen Flächenpunkt, für den $K = 0$ ist, den elliptischen und hyperbolischen Punkten entsprechend als parabolisch bezeichnen, so darf, wie wir sehen, der Grund für diese Bezeichnung nicht etwa darin gesucht werden, daß der Dupinsche Kegelschnitt eine Parabel wäre; die Benennung kann aber dadurch gerechtfertigt werden, daß die Tangentialebene die Fläche im allgemeinen in einer Neilschen Parabel

$$(13) \qquad r\mathfrak{x}^2 + \tfrac{1}{3} z_{03}\mathfrak{y}^3 = 0$$

schneidet. Der Berührungspunkt ist Rückkehrpunkt dieser Kurve.

Für $K > 0$ und $K < 0$ ist noch je eine besondere Annahme bemerkenswert. Im ersten Fall kann für spezielle Punkte

$$\varrho_1 = \varrho_2$$

sein; der Dupinsche Kegelschnitt ist dann ein Kreis

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = 2\zeta'\varrho_1',$$

wodurch der Name Kreispunkt für einen solchen Flächenpunkt erklärt wird (vgl. S. 78). Für $K < 0$ kann

$$\varrho_1 = -\varrho_2$$

vorausgesetzt, also angenommen werden, daß für besondere Punkte die Hauptkrümmungsmittelpunkte in gleichen Abständen von der Fläche, aber auf entgegengesetzten Seiten liegen (vgl. S. 100). Der Dupinsche Kegelschnitt wird eine von zwei konjugierten Hyperbeln, die für die beiden verschiedenen Vorzeichen von ζ in der Gleichung

$$\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2 = 2\varepsilon\zeta\varrho_1'$$

enthalten sind.

Die Kreispunkte können z. B. für das Ellipsoid leicht aus den Gleichungen § 25 (14) in Verbindung mit (15) und (16) ermittelt werden. Setzt man die Kreisschnitte der Fläche als bekannt voraus, so kann man die Kreispunkte unmittelbar als Berührungspunkte der Tangentialebenen darstellen, die diesen Schnitten parallel sind. Es ergeben sich vier Punkte in der Ebene der größten und kleinsten Achse, deren Koordinaten den Gleichungen

$$x^2 = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 - c^2}, \qquad y = 0, \qquad z^2 = \frac{c^2(b^2 - c^2)}{a^2 - c^2}$$

genügen.

§ 34.

Konjugierte Tangenten.

Ist der Dupinsche Kegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel, so kann man nach den Flächentangenten fragen, die konjugierten Durch-

messern der Kurve entsprechen. Solche Tangenten, und ebenso die durch sie gehenden Normalschnitte, heißen selbst einander konjugiert. Es seien w und w' die durch positive Drehung entstandenen, $< \pi$ vorausgesetzten Richtungswinkel der beiden Durchmesser gegen die erste Hauptachse. Die Bedingung der Konjugation lautet

$$(1) \qquad \frac{\cos w \cos w'}{\varrho_1} + \frac{\sin w \sin w'}{\varrho_2} = 0$$

oder, in den Hauptkrümmungen statt in den Hauptkrümmungsradien geschrieben,

$$(2) \qquad n_1 \cos w \cos w' + n_2 \sin w \sin w' = 0.$$

Um sie unter Voraussetzung der Flächendarstellung (I) in eine Relation zwischen den Bestimmungsgrößen $\frac{dv}{du}$ und $\frac{\delta v}{\delta u}$ der beiden Tangenten umzusetzen, kann man sich der Identität

$$(3) \qquad \begin{aligned} &(n_1 \cos^2 w + n_2 \sin^2 w)(n_1 \cos^2 w' + n_2 \sin^2 w') \\ &\quad - (n_1 \cos w \cos w' + n_2 \sin w \sin w')^2 = n_1 n_2 \sin^2 (w' - w) \end{aligned}$$

bedienen. Die analytischen Ausdrücke für die Faktoren auf der rechten und im ersten Gliede der linken Seite sind nämlich nach § 11 (9), § 24 (18, 20) und § 26 (8), § 18 (5) bekannt:

$$\sin^2 (w' - w) = \frac{T^2 (du\,\delta v - dv\,\delta u)^2}{ds^2\,\delta s^2}$$

$$n_1 n_2 = \frac{LN - M^2}{T^2}$$

$$n_1 \cos^2 w + n_2 \sin^2 w = \frac{L du^2 + 2 M du\, dv + N dv^2}{ds^2},$$

und der letzten Formel entsprechend ist

$$n_1 \cos^2 w' + n_2 \sin^2 w' = \frac{L \delta u^2 + 2 M \delta u\, \delta v + N \delta v^2}{\delta s^2}.$$

Die Einführung dieser Werte in (3) liefert

$$(4) \qquad \begin{aligned} &(L du^2 + 2 M du\, dv + N dv^2)(L \delta u^2 + 2 M \delta u\, \delta v + N \delta v^2) \\ &\quad - (LN - M^2)(du\,\delta v - dv\,\delta u)^2 = \\ &\qquad ds^2 \delta s^2 (n_1 \cos w \cos w' + n_2 \sin w \sin w')^2. \end{aligned}$$

Nach der Identität § 11 (10) (S. 34), wenn darin E, F, G durch L, M, N ersetzt werden, ist aber

$$(Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2)(L\delta u^2 + 2M\delta u\delta v + N\delta v^2)$$

$$(5)\qquad -(Ldu\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + Ndv\delta v)^2 =$$

$$(LN - M^2)(du\delta v - dv\delta u)^2.$$

Hiernach wird die Gleichung (2) gleichbedeutend mit

$$(6)\qquad Ldu\delta u + M(du\delta v + dv\delta u) + Ndv\delta v = 0.$$

Auf dieselbe Bedingung wird man auch durch folgende Aufgabe geführt, die auf den ersten Anblick mit dem Dupinschen Kegelschnitt gar keinen Zusammenhang zu haben scheint: Es soll die Beziehung zwischen zwei Tangenten ermittelt werden, von denen die eine als Verbindungslinie zweier unendlichnahen Punkte A und B, die andere als Schnittlinie der beiden Tangentialebenen in A und B betrachtet wird. Es sei

$$A \equiv (xyz), \quad B \equiv (x + dx,\ y + dy,\ z + dz).$$

Die Gleichung der Tangentialebene im ersten Punkte ist

$$(7)\qquad (\mathfrak{x} - x)X + (\mathfrak{y} - y)Y + (\mathfrak{z} - z)Z = 0.$$

Zur Bestimmung der Schnittlinie der beiden benachbarten Ebenen hat man diese Gleichung mit ihrem Differential

$$\Sigma(\mathfrak{x} - x)dX - \Sigma X dx = 0,$$

d. h. mit

$$(8)\qquad (\mathfrak{x} - x)dX + (\mathfrak{y} - y)dY + (\mathfrak{z} - z)dZ = 0$$

zusammenzustellen. Da beide Gleichungen durch die gleichzeitigen Annahmen

$$\mathfrak{x} = x, \qquad \mathfrak{y} = y, \qquad \mathfrak{z} = z$$

befriedigt werden, so kann man in der Tat die durch sie dargestellte Gerade als Tangente der Fläche im Punkte A auffassen. Denkt man sie sich ebenso wie die erste als Verbindungslinie des Punktes A mit einem benachbarten

$$C \equiv (x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z),$$

setzt also ihre Gleichungen in der Form

$$\frac{\mathfrak{x} - x}{\delta x} = \frac{\mathfrak{y} - y}{\delta y} = \frac{\mathfrak{z} - z}{\delta z}$$

voraus, so erhält man aus (8) die gesuchte Beziehung

$$(9)\qquad dX\delta x + dY\delta y + dZ\delta z = 0$$

oder

$$(10)\qquad \Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial u}du + \frac{\partial X}{\partial v}dv\right)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v\right) = 0,$$

nach den zweiten Ausdrücken der Fundamentalgrößen L, M, N (S. 75 (4)) mit (6) übereinstimmend. Die durch die obige geometrische Konstruktion verknüpften Tangenten sind also konjugiert.

Für $u = x$, $v = y$, also für die Flächendarstellung (III), geht die Gleichung (6) nach S. 80 (7) in

(11) $$r dx\delta x + s(dx\delta y + dy\delta x) + t dy\delta y = 0$$

über.

Werden die krummlinigen Koordinaten so angenommen, daß in jedem Punkte die Tangenten an die Linien $v =$ const., $u =$ const. einander konjugiert sind, so heißt das, jene Gleichung wird durch

$$dv = 0, \quad \delta u = 0$$

erfüllt, und umgekehrt. Es ist also

$$M = 0$$

die notwendige und hinreichende Bedingung für diese Annahme.

Soll eine Flächentangente sich selbst konjugiert sein, so muß in (6)

$$\frac{\delta v}{\delta u} = \frac{dv}{du}$$

gesetzt werden dürfen. Dies gibt

(12) $$L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0,$$

d. h. bloß die Wendetangenten (S. 86 (7)) genügen der gestellten Bedingung. Sie sind nur für $K < 0$ reell und entsprechen dann den Asymptoten der Dupinschen Hyperbel.

Die Durchmesser eines Kegelschnitts, die gleichzeitig konjugiert und aufeinander senkrecht sind, fallen mit den Hauptachsen zusammen. Und da den Hauptachsen die Haupttangenten der Fläche entsprechen, so muß deren Bestimmungsgleichung sich aus den beiden Bedingungen der Orthogonalität und der Konjugation herleiten lassen. Es sei, mit unbestimmten Koeffizienten angesetzt,

$$l_{11} du^2 + 2 l_{12} du dv + l_{22} dv^2 = 0$$

diese Gleichung. Die erste, aus

$$E du\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + G dv\delta v = 0$$

gefolgerte Bedingung war (S. 46 (25))

$$G l_{11} - 2F l_{12} + E l_{22} = 0.$$

Als zweite folgt in gleicher Weise aus (6)

(13) $$N l_{11} - 2M l_{12} + L l_{22} = 0.$$

Die Elimination der Verhältnisse $l_{11}:l_{12}:l_{22}$ liefert nun

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} E & F & G \\ L & M & N \\ dv^2 & -du\,dv & du^2 \end{vmatrix} = 0,$$

identisch mit S. 76 (5).

Es sei endlich noch ein Satz erwähnt, der sich denen des § 27 an die Seite stellen läßt: Die Summe der Krümmungshalbmesser zweier konjugierten Normalschnitte ist konstant und gleich der Summe der Hauptkrümmungsradien. Vermöge der in den Paragraphen 27 und 33 entwickelten Anschauungsweise erscheint er als unmittelbare Folge eines bekannten Satzes der Kegelschnittlehre. Durch direkte Ausrechnung findet man mittels (1)

$$n' \equiv n_1 \cos^2 w' + n_2 \sin^2 w' = \frac{n_1 n_2 (n_1 \cos^2 w + n_2 \sin^2 w)}{n_1^2 \cos^2 w + n_2^2 \sin^2 w}$$

$$\varrho' = \frac{\varrho_1^2 \sin^2 w + \varrho_2^2 \cos^2 w}{\varrho_1 \sin^2 w + \varrho_2 \cos^2 w};$$

und da nach dem Eulerschen Satze

$$(15)\qquad \varrho = \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho_1 \sin^2 w + \varrho_2 \cos^2 w}$$

ist, so folgt in der Tat

$$(16)\qquad \varrho + \varrho' = \varrho_1 + \varrho_2.$$

§ 35.

Das Gaußsche Krümmungsmaß.

In unseren bisherigen Untersuchungen über zweidimensionale Mannigfaltigkeiten ist fast ausschließlich von Linien auf den Flächen die Rede gewesen. Die Annahme, daß eine Kurve einer bestimmten Fläche angehört, hat die Einführung mehrerer Größen veranlaßt, die in der allgemeinen Theorie der Raumkurven nicht vorkommen, und von diesen Größen ist eine, die Normalkrümmung, eingehend diskutiert worden. Eine planmäßige Erweiterung der Vorstellungen, mit denen man in der Kurventheorie operiert, muß jedoch darauf ausgehen, die Theorie der Krümmung der Flächen, wenigstens bei der Festlegung der Grundbegriffe, von den Ergebnissen der Kurventheorie unabhängig zu machen. Gauß hat diesen Schritt getan und ist dadurch auf einen der wichtigsten Begriffe der Differentialgeometrie überhaupt, das Krümmungsmaß, geführt worden. Nun würde es beim Fortschreiten auf dem im § 18 eingeschlagenen Wege allerdings erforderlich sein,

der Diskussion der Normalkrümmung die der Tangentialkrümmung und der geodätischen Windung einer Flächenkurve folgen zu lassen. Die Erklärung des Krümmungsmaßes an dieser Stelle rechtfertigt sich jedoch dadurch, daß die Gaußsche Betrachtungsweise, ebenso wie die Dupinsche, auf die Theorie der Normalkrümmung zurückführt.

Schon bei der Anwendung der Differentialrechnung auf die Theorie der ebenen Kurven wird die Krümmung auf den Kontingenzwinkel gegründet, den Winkel zweier benachbarten Tangenten der krummen Linie (vgl. S. 11). Eine unmittelbare Verallgemeinerung dieses Begriffs auf zweifache Mannigfaltigkeiten verbietet sich von selbst, weil von jedem Flächenpunkte unendlichviele Tangenten der Fläche ausgehen. Allein man kann den Kontingenzwinkel durch den Winkel benachbarter Normalen der Kurve ersetzen. Genauer: Nachdem für die Normale eine positive Richtung festgelegt ist, zieht man durch den Anfangspunkt der Koordinaten, betrachtet als Mittelpunkt eines Kreises vom Radius Eins, Radien parallel den positiven Normalen in den Punkten zwischen A und B und bildet dadurch den Bogen AB auf die Peripherie des Kreises mittels eines Kreisbogens AB ab. Liegen A und B, A und B einander unendlichnahe, so ist der Bogen AB das Maß des Kontingenzwinkels (Fig. 11 und 12).

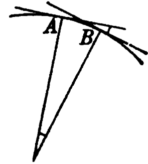


Fig. 11.

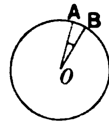


Fig. 12.

Diese Konstruktion läßt sich ohne weiteres auf krumme Flächen übertragen. Durch den Koordinatenanfangspunkt, als Mittelpunkt einer Kugel vom Radius Eins, mögen Strahlen parallel zu den positiven Normalen aller Punkte eines gegebenen Flächenstückes gezogen werden. Jedem dieser Punkte entspricht dann auf der Kugeloberfläche der Endpunkt eines bestimmten Halbmessers, und bei passender Begrenzung des Flächenstückes, die wir voraussetzen wollen, gehören zu verschiedenen Punkten der ersten auch getrennte Punkte der zweiten Fläche. Man sagt, daß die gegebene Fläche durch parallele Normalen auf die Einheitskugel abgebildet werde, und nennt das Flächenstück auf der Kugel, das die Gesamtheit aller Bildpunkte enthält, das sphärische Bild des Stückes auf der Ausgangsfläche.

Ist nun das abgebildete Flächenstück ein unendlichkleines Dreieck ABC, so kann der Inhalt $d\Sigma$ des Bilddreiecks $\mathsf{AB\Gamma}$ auf der Einheitskugel als die Größe betrachtet werden, die dem Kontingenzwinkel $d\omega$ in der Theorie der einfachen Mannigfaltigkeiten entspricht, und der Quotient aus $d\Sigma$ und dem Inhalt dS des Dreiecks ABC als Verallgemeinerung der Krümmung $\frac{d\omega}{ds}$. Doch soll, im Gegensatz zum

Kontingenzwinkel, $d\Sigma$ mit einem Vorzeichen behaftet in die Theorie der Krümmung eingeführt werden. Von den Punkten B und C kann man mit unbegrenzter Genauigkeit annehmen, daß sie in der Tangentialebene des Punktes A liegen. Ebenso liegen B und Γ in der Ebene, die die Einheitskugel im Punkte A berührt. Vermöge der Abbildung durch parallele Normalen sind diese Ebenen einander parallel. Betrachtet man sie von derselben, etwa der positiven Seite her, so kann die durch die Punktfolge A, B, Γ bestimmte Drehung der durch A, B, C definierten gleich- oder entgegenlaufend sein. Das Krümmungsmaß k der Fläche im Punkte A soll nun durch die Gleichung

$$k = \varepsilon \frac{d\Sigma}{dS} \tag{1}$$

erklärt sein, wo ε im ersten Falle gleich $+1$, im zweiten gleich -1 ist.

Um den Quotienten zu berechnen, führen wir die Projektionen von dS und $d\Sigma$ auf eine und dieselbe Ebene, etwa die (xy)-Ebene ein; sie seien dF und $d\Phi$. Man hat

$$dF = \pm Z dS, \quad d\Phi = \pm Z d\Sigma, \tag{2}$$

wo das Vorzeichen, in beiden Formeln übereinstimmend, so zu wählen ist, daß die rechten Seiten positiv werden. Ist nun

$$A \equiv (xyz), \quad B \equiv (x + dx,\ y + dy,\ z + dz),$$
$$C \equiv (x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z)$$

und entsprechend

$$\mathsf{A} \equiv (XYZ), \quad \mathsf{B} \equiv (X + dX,\ Y + dY,\ Z + dZ)$$
$$\Gamma \equiv (X + \delta X,\ Y + \delta Y,\ Z + \delta Z),$$

so gelten für die Projektionen dieser Punkte in der (xy)-Ebene die Bestimmungen

$$A_0 \equiv (xy), \quad B_0 \equiv (x + dx,\ y + dy), \quad C_0 \equiv (x + \delta x,\ y + \delta y),$$
$$\mathsf{A}_0 \equiv (XY), \quad \mathsf{B}_0 \equiv (X + dX,\ Y + dY), \quad \Gamma_0 \equiv (X + \delta X,\ Y + \delta Y),$$

und es ist ferner

$$\begin{aligned} dF &= \frac{\varepsilon_0}{2}(dx\,\delta y - dy\,\delta x) \\ d\Phi &= \frac{\varepsilon_0'}{2}(dX\,\delta Y - dY\,\delta X). \end{aligned} \tag{3}$$

Unter Benutzung der Gleichungen (2) und (3) erhält man aus (1):

$$k = \varepsilon \frac{\varepsilon_0'(dX\,\delta Y - dY\,\delta X)}{\varepsilon_0(dx\,\delta y - dy\,\delta x)}. \tag{4}$$

ε_0 hat den Wert $+1$ oder -1, je nachdem der Umlaufssinn des Dreiecks $A_0 B_0 C_0$ mit dem durch die Drehung der x-Achse zur

y-Achse bestimmten identisch ist oder nicht, und ε_0' hat für das Dreieck $\mathsf{A}_0\mathsf{B}_0\Gamma_0$ dieselbe Bedeutung. Nun befinden sich $A_0B_0C_0$ und $\mathsf{A}_0\mathsf{B}_0\Gamma_0$ in ähnlicher Lage, d. h. es ist $\varepsilon_0' = \varepsilon_0$, wenn ABC und $\mathsf{AB}\Gamma$ ähnlich gelegen sind. Dann sollte $\varepsilon = +1$ sein, und die Gleichung (4) liefert

$$k = \frac{dX\,\delta Y - dY\,\delta X}{dx\,\delta y - dy\,\delta x}. \tag{5}$$

Ist der Umlaufssinn des Dreiecks $\mathsf{AB}\Gamma$ dem von ABC entgegengesetzt, so sind auch die Projektionen nicht in ähnlicher Lage, und es wird $\varepsilon_0' = -\varepsilon_0$; und da dann $\varepsilon = -1$ sein sollte, so bleibt die Formel (5) bestehen. Sie muß noch von den Differentialen befreit werden.

Da x und y vor der z-Koordinate bevorzugt worden sind, so ist es zweckmäßig, sie als Parameter der Flächendarstellung anzunehmen, also

$$dX\delta Y - dY\delta X = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x}dx + \frac{\partial X}{\partial y}dy, & \frac{\partial Y}{\partial x}dx + \frac{\partial Y}{\partial y}dy \\ \frac{\partial X}{\partial x}\delta x + \frac{\partial X}{\partial y}\delta y, & \frac{\partial Y}{\partial x}\delta x + \frac{\partial Y}{\partial y}\delta y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial x} & \frac{\partial X}{\partial y} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} & \frac{\partial Y}{\partial y} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx & dy \\ \delta x & \delta y \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x}\right)(dx\,\delta y - dy\,\delta x)$$

und demnach

$$k = \frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial x} \tag{6}$$

zu setzen. Die partiellen Ableitungen der Richtungskosinus der Normale kommen nur paarweise miteinander multipliziert vor, und man darf daher das in den Formeln S. 52 (16) noch enthaltene Vorzeichen hier weglassen, d. h. von

$$X = \frac{-p}{\sqrt{p^2+q^2+1}}, \quad Y = \frac{-q}{\sqrt{p^2+q^2+1}}$$

ausgehen. Dann erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial x} &= \frac{pqs-(1+q^2)r}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}}, & \frac{\partial X}{\partial y} &= \frac{pqt-(1+q^2)s}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\ \frac{\partial Y}{\partial x} &= \frac{pqr-(1+p^2)s}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}}, & \frac{\partial Y}{\partial y} &= \frac{pqs-(1+p^2)t}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned} \tag{7}$$

woraus

$$k = \frac{rt-s^2}{(p^2+q^2+1)^2} \tag{8}$$

folgt. Nach S. 80 (13) ist dies mit

$$k = K \equiv n_1 n_2 \tag{9}$$

gleichbedeutend; das Gaußsche Krümmungsmaß einer Fläche ist dem Produkt der beiden Hauptkrümmungen gleich.

Nachdem dies einmal bewiesen ist, läßt sich der Ausdruck des Krümmungsmaßes auch für die beiden anderen Flächendarstellungen sofort angeben, und es ist namentlich für die erste, nach S. 77 (20),

$$k = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \tag{10}$$

Im Folgenden soll nun überall K als Zeichen für das Krümmungsmaß benutzt werden, schon um eine Verwechselung mit der kurventheoretischen Größe k, die bei der Betrachtung einer Flächenkurve gleichzeitig mit dem Krümmungsmaß auftreten kann, zu vermeiden.

§ 36.

Ausdruck des Krümmungsmaßes durch die Fundamentalgrößen erster Ordnung.

Die in der Formel

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{1}$$

vorkommenden Fundamentalgrößen zweiter Ordnung sind, von dem gemeinsamen Faktor $\frac{1}{T}$ abgesehen, im § 18 (S. 63) als Determinanten dargestellt worden. Man kann also auf die beiden Bestandteile von $LN - M^2$ den Multiplikationssatz der Determinantentheorie anwenden. Es werde nach Gauß gesetzt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= m \\
\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} &= m' \\
\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} &= m''
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} &= n \\
\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} &= n' \\
\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} &= n'',
\end{aligned} \tag{3}$$

und außerdem vorübergehend, nur für diese Rechnung,

$$(4)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\alpha \\ &\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}\right)^2=\beta. \end{aligned}$$

Dann wird

$$T^2LN\equiv\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \alpha & m & n \\ m'' & E & F \\ n'' & F & G \end{vmatrix}$$

$$T^2M^2\equiv\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2$$

$$=\begin{vmatrix} \beta & m' & n' \\ m' & E & F \\ n' & F & G \end{vmatrix}.$$

Die sechs Größen $m, \ldots n''$ können durch die sechs ersten partiellen Ableitungen der Fundamentalgrößen erster Ordnung E, F, G dargestellt werden, deren Ausdrücke (S. 28) bereits eben bei der Multiplikation der Determinanten wieder benutzt worden sind. Es ergibt sich

$$(5)\quad \begin{aligned} &m=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}, \quad m'=\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \quad m''=\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u} \\ &n=\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}, \quad n'=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \quad n''=\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}. \end{aligned}$$

Für die Kontrolle von Rechnungen, in denen diese Größen vorkommen, ist es nützlich zu bemerken, daß durch Vertauschung von u und v

$$\begin{matrix} m & m' & m'' \\ n'' & n' & n \end{matrix}$$

und

ineinander übergehen.

Bei der Entwickelung der gefundenen Determinanten, etwa nach der ersten Zeile, werden nun in $T^2(LN-M^2)$ alle Glieder bis auf eines, nämlich $(\alpha-\beta)(EG-F^2)$, nur von E, F, G und den Differentialquotienten dieser Größen abhängig. Aber auch $\alpha-\beta$ kann noch durch die Ableitungen der Fundamentalgrößen erster Ordnung ausgedrückt werden. Differentiiert man nämlich die erste Gleichung (3) nach v, die zweite nach u, dann die zweite Gleichung (2) nach v, die dritte nach u, so folgt

$$\alpha + \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2 \partial v} = \frac{\partial n}{\partial v}$$

$$\beta + \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2 \partial v} = \frac{\partial n'}{\partial u}$$

$$\beta + \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v^2} = \frac{\partial m'}{\partial v}$$

$$\alpha + \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v^2} = \frac{\partial m''}{\partial u},$$

also

$$\alpha - \beta = \frac{\partial n}{\partial v} - \frac{\partial n'}{\partial u}$$

$$\alpha - \beta = \frac{\partial m''}{\partial u} - \frac{\partial m'}{\partial v}.$$

Benutzt man noch die Werte (5), so ergibt sich aus beiden Formeln übereinstimmend

(6) $$\alpha - \beta = \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}.$$

Die vollständige Ausrechnung der Determinanten und die Einführung des Ausdruckes von $LN-M^2$ in (1) liefert:

(7) $$K = \frac{1}{4(EG-F^2)^2}\Big\{E\Big[\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} + \Big(\frac{\partial G}{\partial u}\Big)^2\Big]$$
$$+ F\Big[\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial G}{\partial u} + 4\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial F}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial E}{\partial v}\Big]$$
$$+ G\Big[\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial G}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial E}{\partial u} + \Big(\frac{\partial E}{\partial v}\Big)^2\Big]$$
$$+ 2(EG-F^2)\Big(2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\Big)\Big\}.$$

Diese Gleichung enthält den Gaußschen Satz, daß das Krümmungsmaß allein durch die Fundamentalgrößen erster Ordnung und ihre ersten und zweiten Ableitungen dargestellt werden kann. Und zwar kommen die Ableitungen erster Ordnung sämtlich, von denen der zweiten Ordnung aber nur drei, und auch diese nur in einer bestimmten linearen Verbindung vor.

§ 37.

Biegung einer Fläche. Bedeutung des Gaußschen Satzes.

Der Gaußsche Satz ist der Ausgangspunkt einer ausgedehnten Klasse wichtiger flächentheoretischer Untersuchungen geworden, denen die Vorstellung der Verbiegbarkeit einer Fläche zugrunde liegt.

Neben der gegebenen Fläche werde eine zweite betrachtet, deren kartesische Koordinaten x_1, y_1, z_1 Funktionen derselben Variablen u, v sind wie x, y, z, die also durch Gleichungen der Form

$$x_1 = x_1(u, v)$$

(1) $$y_1 = y_1(u, v)$$

$$z_1 = z_1(u, v)$$

dargestellt wird. Die Fundamentalgrößen erster Ordnung dieser Fläche mögen E_1, F_1, G_1, das Linienelement ds_1 heißen, so daß

(2) $$ds_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2$$

ist. Vermöge der Gleichungen (1), mit denen für die erste Fläche

$$x = x(u, v), \ldots$$

zusammengestellt, werden die beiden Flächen in bestimmter Weise aufeinander abgebildet; es entsprechen sich nämlich auf ihnen die Punkte, die zu demselben Wertepaar (u, v) gehören. Angenommen nun, die Funktionen x_1, y_1, z_1 seien so beschaffen, daß für alle Wertepaare eines bestimmten Bereiches

(3) $$E_1 = E, \quad F_1 = F, \quad G_1 = G,$$

also auch

(4) $$ds_1 = ds$$

ist; dann müssen die Bogenlängen irgend zweier entsprechenden Kurven, nämlich solcher, die auf beiden Flächen durch dieselbe funktionale Beziehung zwischen u und v definiert werden, zwischen entsprechenden Endpunkten einander gleich sein. Das eine Flächenstück läßt sich dann auf das andere ohne Dehnung oder Zusammenziehung auflegen, und man sagt, die beiden Flächen seien aufeinander abwickelbar. Die hierfür hinreichenden Bedingungen (3) sind auch notwendig. Denn sollen zwei beliebige entsprechende Bogen gleiche Länge haben, so muß $ds_1 = ds$ sein, z. B. für die Koordinatenlinien $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ einzeln, aber nicht nur für diese. Daraus folgen die Gleichungen (3) wieder.

Hiernach ergibt sich als geometrischer Inhalt des Gaußschen Satzes: Sind zwei Flächen aufeinander abwickelbar, so haben ihre Krümmungsmaße in entsprechenden Punkten denselben Wert, oder:

Bei der Biegung einer Fläche bleibt das Krümmungsmaß in jedem einzelnen Punkte ungeändert.

Als Beispiel für zwei aufeinander abwickelbare Flächen können die Schraubenfläche und das Katenoid dienen. Ein Stück der Schraubenfläche, das sich unendlich oft wiederholt, wurde durch die Gleichung

$$z = b \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

(S. 23) bestimmt, die für die vorliegende Untersuchung durch

$$(5) \qquad \begin{aligned} x &= u \cos v \\ y &= u \sin v \\ z &= bv \end{aligned}$$

vertreten werden möge. Die Linien $v =$ const. sind gerade, die Kurven $u =$ const., als Schnitte der Schraubenfläche mit den Kreiszylindern $x^2 + y^2 = u^2$, gewöhnliche Schraubenlinien. Aus (5) folgt

$$(6) \qquad ds^2 = du^2 + (u^2 + b^2)dv^2.$$

Für das Katenoid kann nach S. 103 (18)

$$(7) \qquad ds_1^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$$

gesetzt werden. Hierbei sind die Koordinatenlinien der ersten Schar Kettenlinien, die der zweiten Schar Kreise, nämlich die Parallelkreise der Umdrehungsfläche, und nach der im § 31 ausgeführten Parameteränderung ist in den hier benutzten Zeichen

$$(8) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \sqrt{u^2 + a^2} \cos v \\ y_1 &= \sqrt{u^2 + a^2} \sin v \\ a \cosh \frac{z_1}{a} &= \sqrt{u^2 + a^2} \end{aligned}$$

die analytische Darstellung des Katenoids. Setzt man nun die beiden Konstanten a und b einander gleich, so erhält man aus (6, 7)

$$(9) \qquad E = E_1 = 1, \qquad F = F_1 = 0, \qquad G = G_1 = u^2 + a^2.$$

Die beiden Flächen werden aufeinander abwickelbar, und es gehen bei der Biegung die Geraden der Schraubenfläche in die Meridiane des Katenoids, die Schraubenlinien in die Parallelkreise über.

§ 38.

Die beiden Grundaufgaben der Biegungstheorie.

An den Begriff der Abwickelbarkeit einer Fläche auf eine andere lassen sich zwei Grundaufgaben unmittelbar anschließen. Erstens: Alle Flächen zu finden, die aus einer bestimmten durch Biegung hervorgehen können. Oder besser, weil die Kenntnis einer speziellen Fläche, für welche die Fundamentalgrößen erster Ordnung gegebene Werte haben, wenigstens für die Fassung des Problems ohne Bedeutung ist: Alle Flächen von gegebenem Linienelement zu ermitteln. Die analytische Formulierung der Aufgabe ist einfach. Man hat in den Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 &= E \\ \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} &= F \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 &= G, \end{aligned}$$

in denen bis jetzt x, y, z als gegeben, die rechten Seiten als Rechnungsresultate betrachtet worden sind, E, F, G als gegeben, x, y, z als gesucht anzusehen. Es handelt sich dann darum, x, y, z auf die allgemeinste Weise so zu bestimmen, daß die drei simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und zweiten Grades (1) befriedigt werden.

Nicht ganz so einfach ist die analytische Kennzeichnung der zweiten Aufgabe: Zu entscheiden, ob zwei Flächen, die in der Darstellung (I) gegeben sind, aufeinander abwickelbar sind oder nicht. Denn man muß annehmen, daß die beiden Systeme kartesischer Koordinaten durch verschiedene Paare von Parametern, u, v für die eine, u', v' für die andere Fläche dargestellt sind,

$$\begin{aligned} x &= x(u, v), \qquad & y &= y(u, v), \qquad & z &= z(u, v') \\ x_1 &= \bar{x}_1(u', v'), & y_1 &= \bar{y}_1(u', v'), & z_1 &= \bar{z}_1(u', v'). \end{aligned}$$

Alles, was man von vornherein weiß, ist, daß zwei eindeutige und eindeutig-umkehrbare Beziehungen

$$(2)\qquad u' = u'(u, v), \qquad v' = v'(u, v)$$

zwischen den Parametern bestehen müssen, damit die beiden Flächen überhaupt aufeinander abgebildet seien. Lassen sich nun diese Beziehungen so wählen, daß die Fundamentalgrößen erster Ordnung z. B. der ersten Fläche für die Parameter u', v' denen der zweiten

Fläche für dieselben Parameter entsprechend gleich sind, so sind die beiden Flächen aufeinander abwickelbar.

Im § 12 ist die Transformation der Fundamentalgrößen für irgend eine Substitution der Form (2) gegeben worden; die Formeln lauten (S. 39 (8)):

$$(3)\quad \begin{aligned} E &= E'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + 2F'\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u} + G'\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2 \\ F &= E'\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + F'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v}\right) + G'\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} \\ G &= E'\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + 2F'\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial v} + G'\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}$$

Sollen die aus ihnen folgenden Werte von E', F', G' den Bedingungen

$$(4)\qquad E' = E_1', \qquad F' = F_1', \qquad G' = G_1'$$

genügen, deren rechte Seiten die als bekannt anzunehmenden Fundamentalgrößen der zweiten Fläche sind, so müssen die Gleichungen gelten

$$(5)\quad \begin{aligned} &E_1'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + 2F_1'\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u} + G_1'\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2 = E \\ &E_1'\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + F_1'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v}\right) + G_1'\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} = F \\ &E_1'\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + 2F_1'\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial v} + G_1'\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2 = G. \end{aligned}$$

Es ist also zu untersuchen, ob es zwei Funktionen $u'(u, v)$ und $v'(u, v)$ gibt, die diesen drei simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und zweiten Grades genügen, in denen E, F, G gegebene Funktionen von u und v, E_1', F_1', G_1' bekannte Funktionen von u' und v' bedeuten. Existieren sie, so geben sie in $x = x(u, v), \ldots$ eingesetzt für die Koordinaten der ersten Fläche Ausdrücke der Form

$$x = \bar{x}(u', v'), \qquad y = \bar{y}(u', v'), \qquad z = \bar{z}(u', v')$$

und stellen damit fest, welche Punkte (xyz) und $(x_1 y_1 z_1)$ der beiden Flächen einander entsprechen.

— — — —

IV. Abschnitt.

Grundformeln der Theorie der Tangentialkrümmung.

§ 39.

Ausdruck der Tangentialkrümmung für die verschiedenen Darstellungen einer Flächenkurve.

Um die Krümmung einer Flächenkurve vollständig darzustellen, braucht man außer der Normalkrümmung noch die Tangentialkrümmung. Denn es ist (S. 60 (12))

$$k^2 = n^2 + g^2.$$

Normal- und Tangentialkrümmung waren, vom Vorzeichen abgesehen, durch Projektion der Krümmung selbst auf die Normale der Fläche und die Tangentialnormale der Kurve entstanden, und die Vorzeichen hingen von den positiven Richtungen dieser beiden Geraden ab. Dabei ist wichtig, daß die Kosinus der positiven Flächennormale mit der Theorie der Flächenkurven nichts zu tun haben, während die positive Richtung der Tangentialnormale an das Prinzip des Fortganges auf der Kurve gebunden ist. Als Bestimmungsgleichung für die Tangentialkrümmung konnte man auch annehmen (S. 60 (15)):

$$g = -k \cos(n, b),$$

also nach den Formeln für die Richtungskosinus der Binormale b (S. 9 (15)):

$$g = k \frac{XP + YQ + ZR}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}$$

oder unter Berücksichtigung des Wertes der Krümmung (S. 11 (2)):

$$(1) \qquad g = \frac{XP + YQ + ZR}{ds^3}.$$

Mittels der Ausdrücke S. 5 (10) für P, Q, R ergibt sich endlich

$$(2) \qquad g = \frac{1}{ds^3} \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}.$$

Hier kann der Nenner, wegen

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

sofort auf die gegebene Fläche bezogen werden. Aber auch in den Zähler lassen sich die Fundamentalgrößen der Fläche ohne weiteres einführen, wenn die Determinante nach den Elementen der dritten Zeile entwickelt, also

(3) $$g = \frac{1}{ds^3} \Sigma (Y dz - Z dy) d^2 x$$

gesetzt wird. Hierin ist nämlich

$$Y dz - Z dy = \left(Y \frac{\partial z}{\partial u} - Z \frac{\partial y}{\partial u}\right) du + \left(Y \frac{\partial z}{\partial v} - Z \frac{\partial y}{\partial v}\right) dv,$$

und für den Koeffizienten von du ergibt sich durch Einführung der Werte von Y und Z

$$\begin{aligned} Y \frac{\partial z}{\partial u} - Z \frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{1}{T}\left(\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial z}{\partial u} - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)\frac{\partial y}{\partial u}\right) \\ &= \frac{1}{T}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 - \frac{\partial x}{\partial u}\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right) \\ &= \frac{1}{T}\left(E\frac{\partial x}{\partial v} - F\frac{\partial x}{\partial u}\right). \end{aligned}$$

Der ebenso zu berechnende Koeffizient von dv kann auch aus dieser Formel durch Vertauschung von u und v abgelesen werden, wobei zu beachten ist, daß dann die Zähler von X, Y, Z ihr Zeichen ändern. Demnach wird

(4) $$\begin{aligned} Y \frac{\partial z}{\partial u} - Z \frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{1}{T}\left(-F\frac{\partial x}{\partial u} + E\frac{\partial x}{\partial v}\right) \\ Y \frac{\partial z}{\partial v} - Z \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{1}{T}\left(-G\frac{\partial x}{\partial u} + F\frac{\partial x}{\partial v}\right), \end{aligned}$$

und diese Gleichungen vertreten im ganzen sechs Formeln.

Setzt man nun

$$d^2 x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} du dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial x}{\partial u} d^2 u + \frac{\partial x}{\partial v} d^2 v$$

und führt die in der Gleichung (3) angedeutete Summation aus, benutzt ferner die abkürzenden Bezeichnungen S. 118 (2, 3), so erhält man

$$\begin{aligned} T g ds^3 = {} & [(En - Fm) du^2 + 2(En' - Fm') du dv + (En'' - Fm'') dv^2 \\ & \qquad + (EG - F^2) d^2 v] du \\ & + [(Fn - Gm) du^2 + 2(Fn' - Gm') du dv + (Fn'' - Gm'') dv^2 \\ & \qquad - (EG - F^2) d^2 u] dv. \end{aligned}$$

Nach Absonderung von $EG - F^2$ aus den Klammergrößen möge

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\frac{1}{T^2}(Gm - Fn) = J_1, &&\frac{1}{T^2}(En - Fm) = J_2 \\ &\frac{1}{T^2}(Gm' - Fn') = J_1', &&\frac{1}{T^2}(En' - Fm') = J_2' \\ &\frac{1}{T^2}(Gm'' - Fn'') = J_1'', &&\frac{1}{T^2}(En'' - Fm'') = J_2'' \end{aligned}$$

gesetzt werden; dann folgt

$$(6)\qquad g = -\frac{T}{ds^3}\begin{vmatrix} J_1 du^2 + 2J_1' du\,dv + J_1'' dv^2 + d^2u, & du \\ J_2 du^2 + 2J_1' du\,dv + J_2'' dv^2 + d^2v, & dv \end{vmatrix}.$$

Diese Formel unterscheidet sich von der für die Normalkrümmung (S. 64 (5)) in bemerkenswerter Weise. Der Ausdruck der Normalkrümmung enthält nur die Differentiale erster Ordnung, aber beide Reihen von Fundamentalgrößen; in der Tangentialkrümmung kommen die Differentiale erster und zweiter Ordnung vor, von den Fundamentalgrößen dagegen, wie die Gleichungen (5) in Verbindung mit S. 119 (5) lehren, nur die der ersten Ordnung nebst ihren ersten Ableitungen.

Für die Berechnung der Tangentialkrümmung ist die Formel (6) besonders dann brauchbar, wenn längs der betrachteten Flächenkurve u und v als Funktionen einer Variablen t gegeben sind. Das Fortgangsprinzip kann dann etwa durch die Annahme $dt > 0$ definiert sein (vgl. S. 4). Wird jedoch die Kurve durch eine Gleichung

$$\varphi(u, v) = C$$

dargestellt, so ist der Ausdruck weiter umzugestalten. Es gelten nämlich die Gleichungen

$$(7)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u} du + \frac{\partial\varphi}{\partial v} dv = 0$$

$$(8)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} du\,dv + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} dv^2 + \frac{\partial\varphi}{\partial u} d^2u + \frac{\partial\varphi}{\partial v} d^2v = 0,$$

mit deren Hilfe man statt der Differentiale $du, \ldots d^2v$ die partiellen Ableitungen der Funktion $\varphi(u, v)$ einzuführen hat.

Allerdings scheint auf den ersten Anblick die Elimination von du, dv, d^2u, d^2v nicht möglich zu sein, weil vier Differentiale, aber nur zwei Bestimmungen für sie vorliegen. Der Grund für die Ausführbarkeit der Rechnung liegt darin, daß in dem Ausdruck (6) nur zwei Verbindungen der Differentiale vorkommen: das Verhältnis

$\frac{dv}{du} = \lambda$, also die Bestimmungsgröße für die Tangente der Kurve (S. 32), und was die zweite Ordnung angeht, der Differentialquotient $\frac{d\lambda}{du}$.

Die Gleichung (7) möge unter Einführung eines Proportionalitätsfaktors durch

(9) $$du = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \qquad dv = -\mu \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

ersetzt werden. Wird von der in (6) vorkommenden Determinante zuerst der Teil berechnet, der d^2u und d^2v enthält, so ergibt sich

$$\begin{vmatrix} d^2u, & du \\ d^2v, & dv \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \mu d \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} d\mu, & \mu \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \mu d \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} d\mu, & \mu \frac{\partial \varphi}{\partial u} \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} \mu d \frac{\partial \varphi}{\partial v}, & \mu \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \mu d \frac{\partial \varphi}{\partial u}, & \mu \frac{\partial \varphi}{\partial u} \end{vmatrix}$$

$$= - \mu^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} du + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} dv, & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} du + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} dv, & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \end{vmatrix}$$

$$= - \mu^3 \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u}, & \frac{\partial \varphi}{\partial u} \end{vmatrix}$$

$$= \mu^3 \left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 \right].$$

Hierzu tritt

$$\begin{vmatrix} J_1 du^2 + 2 J_1' du dv + J_1'' dv^2, & du \\ J_2 du^2 + 2 J_2' du dv + J_2'' dv^2, & dv \end{vmatrix} =$$

$$\mu^3 \begin{vmatrix} J_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - 2 J_1' \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + J_1'' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2, & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ J_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - 2 J_2' \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} + J_2'' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2, & - \frac{\partial \varphi}{\partial u} \end{vmatrix}$$

$$= - \mu^3 \left[\left(J_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + J_2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2 - 2 \left(J_1' \frac{\partial \varphi}{\partial u} + J_2' \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right.$$

$$\left. + \left(J_1'' \frac{\partial \varphi}{\partial u} + J_2'' \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 \right].$$

Danach wird der vollständige Ausdruck der Determinante, wenn zur Abkürzung

$$(10)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - J_1\frac{\partial\varphi}{\partial u} - J_2\frac{\partial\varphi}{\partial v} &= \varphi_{11} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v} - J_1'\frac{\partial\varphi}{\partial u} - J_2'\frac{\partial\varphi}{\partial v} &= \varphi_{12} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} - J_1''\frac{\partial\varphi}{\partial u} - J_2''\frac{\partial\varphi}{\partial v} &= \varphi_{22} \end{aligned}$$

gesetzt wird, gleich

$$\mu^3\left[\varphi_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2\varphi_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \varphi_{22}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right].$$

Ferner ist

$$ds^2 = \mu^2\left[E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right]$$

und demnach, wenn das Fortgangsprinzip etwa durch

$$\mu > 0$$

definiert wird,

$$\begin{aligned} ds^3 &= \mu^3\left[E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}} \\ &= \mu^3 T^3(\Delta^1\varphi)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Setzt man alles in (6) ein, so erhält man die Schlußformel

$$(11)\quad g = -\frac{\varphi_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2 - 2\varphi_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \varphi_{22}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{T^3(\Delta^1\varphi)^{\frac{3}{2}}}.$$

§ 40.

Darstellung der Tangentialkrümmung mittels geometrischer Differentiationen. Die Christoffelschen Verbindungen.

Es ist von Interesse, diesen Ausdruck der Tangentialkrümmung auch direkt aus der Grundformel

$$(1)\quad g = k\cos(t', h) \equiv k\Sigma A'a''$$

(S. 59 (11)) herzuleiten, ohne die Binormale einzuführen und ohne Differentiale zu benutzen. Zugleich ist das soeben rein formal, durch die Bedingung $\mu > 0$, erklärte Fortgangsprinzip anschaulicher darzustellen. Zu dem Zweck empfiehlt es sich, von der Festlegung einer positiven Richtung der Tangentialnormale, nicht der Tangente selbst, auszugehen. Die Differentiation längs einer Kurve hat nämlich nur

so lange als Grundlage der analytischen Operationen zu dienen, wie die Kurve für sich allein betrachtet wird. Geht dagegen eine gegebene Fläche durch sie hindurch, so ist die Differentiation senkrecht zur Kurve, aber selbstverständlich längs der Fläche, an die Spitze zu stellen; der Bau der flächentheoretischen Formeln läßt darüber keinen Zweifel. Für das dreidimensionale Gebiet, in dem eine Fläche oder Flächenschar gegeben ist, besteht die Verallgemeinerung dieser Regel darin, die Differentiation senkrecht zur Fläche, also in Richtung der Normale, als Grundoperation anzusehen. Die Richtigkeit dieser Anschauungsweise ergibt sich hier schon daraus, daß nach Fixierung einer positiven Flächennormale die Differentiation längs dieser eindeutig bestimmt ist, während man auf der Fläche auf unendlichviele Weisen von einem gegebenen Punkte zu einem benachbarten übergehen kann.

Im Anschluß an die Festsetzungen in der Theorie der Kurvennetze (S. 28—29, 35—36) werde nun die positive Tangentialnormale t' der Linie $\varphi(u, v) = C$, die einer Kurvenschar angehören soll, als nach der positiven Seite dieser Linie gerichtet angenommen. Für die positive Seite ist

(2) $$\delta\varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\delta v > 0.$$

Die Richtung t' hängt von dem Zeichen der Funktion φ ab, das aber für die Kurve selbst, insbesondere für die Gleichungen (7) und (8) des vorigen Paragraphen, ohne Bedeutung ist. Die Tangente und die Tangentialnormale der Kurve erscheinen als Verbindungslinien des Punktes (u, v) mit den Punkten $(u + du, v + dv)$ und $(u + \delta u, v + \delta v)$. Infolge der Gleichung (7), durch welche die Differentiale du und dv verbunden sind, nimmt die Bedingung der Orthogonalität von t und t',

$$E du\, \delta u + F(du\, \delta v + dv\, \delta u) + G dv\, \delta v = 0,$$

die Form an

(3) $$\left(E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\delta u + \left(F\frac{\partial \varphi}{\partial v} - G\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\delta v = 0.$$

Ersetzt man sie, unter Einführung eines Proportionalitätsfaktors, durch

$$\delta u = \nu\left(G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right), \quad \delta v = \nu\left(E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right),$$

so findet man

$$\delta\varphi = \nu\left[\left(G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \left(E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right].$$

Der Bedingung (2) gemäß muß ν positiv sein, weil der Faktor von ν als Zähler des Differentialparameters erster Ordnung positiv ist.

Der erste Richtungskosinus von t' ist

$$A' \equiv \frac{\delta x}{\delta s} \equiv \frac{1}{\delta s}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v\right).$$

Es ergibt sich

$$A' = \frac{v\left[\left(G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \left(E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial v}\right]}{\sqrt{v^2 T^2\left[G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2\right]}}$$

oder

$$A' = \frac{v T^2 \Delta(x, \varphi)}{\sqrt{v^2 T^4 \Delta^1 \varphi}}$$

nach der Definition des Zwischenparameters von x und φ (S. 42). Wegen

$$v > 0$$

läßt sich diese Formel nebst den beiden zugehörigen schreiben:

$$(4) \qquad A' = \frac{\Delta(x, \varphi)}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}}, \qquad B' = \frac{\Delta(y, \varphi)}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}}, \qquad C' = \frac{\Delta(z, \varphi)}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}}.$$

Nun war die Gleichung (1) gleichbedeutend mit

$$(5) \qquad g = \sum A' \Theta A$$

(S. 55 (15)). Um die Rechnung auszuführen, hat man also noch die Werte von A, B, C zu ermitteln. Aus

$$A = \Theta x \equiv \frac{dx}{ds} \equiv \frac{1}{ds}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right)$$

und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}dv = 0$$

ergibt sich zunächst nur

$$A = \varepsilon \frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}}.$$

Die Bestimmung des Zeichens ε erfolgt durch die Äquivalenz

$$t, t', n \sim x, y, z$$

und liefert den Wert $+1$, sodaß (in der Bezeichnung S. 44 (6))

$$(6) \qquad A = \frac{D(x, \varphi)}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}}, \quad B = \frac{D(y, \varphi)}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}}, \quad C = \frac{D(z, \varphi)}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}}$$

wird. Diese Ausdrücke würden, nachdem

$$du = \mu\frac{\partial \varphi}{\partial v}, \quad dv = -\mu\frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

gesetzt ist, aus $A = \Theta x, \ldots$ auch direkt unter der Annahme $\mu > 0$ gefolgt sein; man kommt also von dem hier eingenommenen Standpunkt aus auf die im vorigen Paragraphen gegebene Kennzeichnung des Fortgangsprinzips zurück.

Nach den Gleichungen (6) erscheinen A, B, C als homogene lineare Funktionen gleicher Form von $\frac{\partial x}{\partial u}$ und $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$ und $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ und $\frac{\partial z}{\partial v}$, und dasselbe gilt von A', B', C' vermöge der Formeln (4). Wird

$$(7) \qquad A = \varphi_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \varphi_2 \frac{\partial x}{\partial v}, \cdots$$

$$(8) \qquad A' = \varphi_1' \frac{\partial x}{\partial u} + \varphi_2' \frac{\partial x}{\partial v}, \cdots$$

gesetzt, so haben die Koeffizienten $\varphi_1, \ldots \varphi_2'$ die Werte

$$(9) \qquad \begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{T\sqrt{\Delta^1 \varphi}} \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \varphi_2 &= \frac{-1}{T\sqrt{\Delta^1 \varphi}} \frac{\partial \varphi}{\partial u} \end{aligned}$$

$$(10) \qquad \begin{aligned} \varphi_1' &= \frac{1}{T^2\sqrt{\Delta^1 \varphi}} \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F \frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) \\ \varphi_2' &= \frac{1}{T^2\sqrt{\Delta^1 \varphi}} \left(E \frac{\partial \varphi}{\partial v} - F \frac{\partial \varphi}{\partial u}\right). \end{aligned}$$

Bei Rechnungsoperationen, die man mit diesen Größen anzustellen hat, wird man, soweit es die jeweilige Aufgabe irgend zuläßt, die Größen φ_1' und φ_2' aus dem Grunde bevorzugen, weil sie bei einer Vertauschung von u und v ohne weiteres ineinander übergehen, φ_1 und φ_2 dagegen nur unter Umkehrung des Vorzeichens. Außerdem kann man φ_1' und φ_2' in einer namentlich für die Differentiation brauchbaren Form, nämlich als Summen (nicht Differenzen) darstellen, wenn man die Größen E, F, G als Unterdeterminanten von

$$\begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}$$

auffaßt und außerdem sämtliche Bezeichnungen passend wählt, d. h. in (10) auch auf den rechten Seiten die Glieder durch Indizes kennzeichnet. Zu dem Ende mögen an Stelle der Buchstaben u, v und auch gleichzeitig mit ihnen die Zeichen u_1, u_2 für die krummlinigen Koordinaten angewendet werden. Es werde ferner

durch

$$\begin{matrix} E, & F, & G \\ a_{11}, & a_{12}, & a_{22} \end{matrix}$$

ersetzt und die in der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \equiv a \qquad (a_{21} = a_{12})$$

zu dem Elemente a_{ik} gehörende, durch a selbst dividierte Unterdeterminante mit α_{ik} bezeichnet, so daß

$$(11) \qquad \begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{a_{22}}{a} \equiv \frac{G}{T^2} \\ \alpha_{12} = \alpha_{21} &= \frac{-a_{12}}{a} \equiv \frac{-F}{T^2} \\ \alpha_{22} &= \frac{a_{11}}{a} \equiv \frac{E}{T^2} \end{aligned}$$

ist. Mittels dieser Bezeichnungen läßt sich setzen:

$$\Delta^1 \varphi = \alpha_{11}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right)^2 + 2\alpha_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} + \alpha_{22}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\right)^2$$

oder

$$(12) \qquad \Delta^1 \varphi = \sum_{i,k} \alpha_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}\frac{\partial \varphi}{\partial u_k}.$$

Hier und im Folgenden bedeuten die dem Zeichen Σ beigefügten Summationsbuchstaben $i, k, \ldots$ Zahlen, die unabhängig voneinander die Werte 1 und 2 annehmen. Wo das Summenzeichen ohne Zusatz steht, soll es, wie bisher, die Summation über x, y, z kennzeichnen. Die Formeln (10) werden

$$\varphi_1' = \frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}}\left(\alpha_{11}\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \alpha_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\right)$$

$$\varphi_2' = \frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}}\left(\alpha_{21}\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} + \alpha_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\right),$$

d. h.

$$(13) \qquad \varphi_i' = \frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}} \sum_k \alpha_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \qquad (i = 1, 2).$$

Die vier Größen $\varphi_1, \ldots \varphi_2'$ enthalten die partiellen Ableitungen von φ nur in dem Quotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} : \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$. Von der großen Anzahl von Relationen, die zwischen ihnen und den Größen a_{ik} stattfinden, seien hier nur folgende erwähnt:

(14)
$$\sum_{i,k} a_{ik}\varphi_i\varphi_k = 1$$
$$\sum_{i,k} a_{ik}\varphi_i\varphi'_k = 0$$
$$\sum_{i,k} a_{ik}\varphi'_i\varphi'_k = 1.$$

Um nun, wie angegeben, bei der Berechnung von g die geometrische Differentiation auf Größen auszuüben, die von φ'_1 und φ'_2 (nicht von φ_1 und φ_2) abhängen, benutze man, wie im § 16, die Identität

$$\sum AA' = 0,$$

aus der

$$\sum A\Theta A' + \sum A'\Theta A = 0$$

folgt, setze also statt (5):

(15) $$g = -\sum A\Theta A'$$

(S. 55 (16)).

Es ist für irgend eine Funktion $\chi(u, v)$

(16) $$\Theta\chi = \sum_\nu \varphi_\nu \frac{\partial \chi}{\partial u_\nu},$$

mithin wird nach (7) und (8)

$$-g = \sum\left(\sum_i \varphi_i \frac{\partial x}{\partial u_i}\right)\left(\sum_l \varphi_l \frac{\partial}{\partial u_l}\left(\sum_k \varphi'_k \frac{\partial x}{\partial u_k}\right)\right)$$
$$= \sum \sum_{i,k,l} \varphi_i\varphi_l \frac{\partial x}{\partial u_i}\left(\varphi'_k \frac{\partial^2 x}{\partial u_k \partial u_l} + \frac{\partial x}{\partial u_k}\frac{\partial \varphi'_k}{\partial u_l}\right),$$

und bei Vertauschung der Reihenfolge der Summationen, die auch im Folgenden immer wieder vorgenommen werden wird,

$$-g = \sum_{i,k,l} \varphi_i\varphi_l\varphi'_k \sum \frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial^2 x}{\partial u_k \partial u_l} + \sum_{i,k,l} \varphi_i\varphi_l \frac{\partial \varphi'_k}{\partial u_l} \sum \frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial x}{\partial u_k}.$$

Nach der Definition der Fundamentalgrößen erster Ordnung hat man

(17) $$\sum \frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial x}{\partial u_k} = a_{ik},$$

und demnach weiter

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l} = \sum \frac{\partial x}{\partial u_i}\frac{\partial^2 x}{\partial u_k \partial u_l} + \sum \frac{\partial x}{\partial u_k}\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_l}.$$

Die erste Summe rechts, die im ersten Teile von $-g$ vorkommt, kann dadurch isoliert werden, daß die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial a_{il}}{\partial u_k} = \sum \frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{\partial^2 x}{\partial u_k \partial u_l} + \sum \frac{\partial x}{\partial u_l} \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k}$$

$$\frac{\partial a_{kl}}{\partial u_i} = \sum \frac{\partial x}{\partial u_k} \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_l} + \sum \frac{\partial x}{\partial u_l} \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k}$$

hinzugenommen und die letzte von der Summe der beiden vorhergehenden subtrahiert wird. Gilt dann die abkürzende Bezeichnung

(18) $$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l} + \frac{\partial a_{il}}{\partial u_k} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial u_i}\right) = \begin{bmatrix} k\,l \\ i \end{bmatrix},$$

so erhält man

(19) $$\sum \frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{\partial^2 x}{\partial u_k \partial u_l} = \begin{bmatrix} k\,l \\ i \end{bmatrix}.$$

Die Einführung von (17) und (19) in den Ausdruck der Tangentialkrümmung liefert

(20) $$-g = \sum_{i,k,l} \varphi_i \varphi_l \varphi'_k \begin{bmatrix} k\,l \\ i \end{bmatrix} + \sum_{i,k,l} a_{ik} \varphi_i \varphi_l \frac{\partial \varphi'_k}{\partial u_l},$$

worin die Ableitungen der Größen φ'_k, nach (13), mittels der Gleichungen

$$\frac{\partial(\varphi'_k \sqrt{\Delta^1 \varphi})}{\partial u_l} = \sum_\nu \alpha_{k\nu} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_\nu \partial u} + \sum_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial u_\nu} \frac{\partial \alpha_{k\nu}}{\partial u_l}$$

zu bestimmen sind.

Aus den Grundformeln der Determinantentheorie

(21) $$\left.\begin{array}{l} \sum_\lambda a_{i\lambda} \alpha_{k\lambda} \\ \sum_\lambda a_{\lambda i} \alpha_{\lambda k} \end{array}\right\} = \varepsilon_{ik} \equiv \begin{cases} 1, & k = i \\ 0, & k \gtrless i, \end{cases}$$

die im Folgenden ebenfalls, und ohne daß es jedesmal angekündigt wird, beständig benutzt werden sollen, ergibt sich

$$\sum_\lambda a_{i\lambda} \frac{\partial \alpha_{k\lambda}}{\partial u_l} = -\sum_\lambda \alpha_{k\lambda} \frac{\partial a_{i\lambda}}{\partial u_l}.$$

Zur Auflösung nach den partiellen Ableitungen links multipliziere man mit $\alpha_{i\nu}$ und summiere über i:

$$\sum_{i,\lambda} a_{i\lambda} \alpha_{i\nu} \frac{\partial \alpha_{k\lambda}}{\partial u_l} = -\sum_{i,\lambda} \alpha_{i\nu} \alpha_{k\lambda} \frac{\partial a_{i\lambda}}{\partial u_l}.$$

Die linke Seite hat den Wert

$$\sum_\lambda \varepsilon_{\lambda\nu} \frac{\partial \alpha_{k\lambda}}{\partial u_l} \equiv \frac{\partial \alpha_{k\nu}}{\partial u},$$

sodaß

(22)
$$\frac{\partial \alpha_{k\nu}}{\partial u_l} = -\sum_{\mu,\lambda} \alpha_{\mu\nu}\alpha_{k\lambda}\frac{\partial a_{\mu\lambda}}{\partial u_l}$$

wird. Hiernach ergibt sich

$$-g = \sum_{i,k,l}\varphi_i\varphi_l\varphi_k'\begin{bmatrix}k\,l\\ i\end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{\Delta^1\varphi}}\sum_{i,k,l,\nu} a_{ik}\alpha_{k\nu}\varphi_i\varphi_l\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_\nu \partial u_l}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\Delta^1\varphi}}\sum_{i,k,l,\lambda,\mu,\nu} a_{ik}\alpha_{\mu\nu}\alpha_{k\lambda}\varphi_i\varphi_l\frac{\partial\varphi}{\partial u_\nu}\cdot\frac{\partial a_{\mu\lambda}}{\partial u_l}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\Delta^1\varphi}}\sum_{i,k,l} a_{ik}\varphi_i\varphi_l\varphi_k'\frac{\partial\sqrt{\Delta^1\varphi}}{\partial u_l}.$$

Die letzte Summe läßt sich schreiben

$$-\frac{1}{\sqrt{\Delta^1\varphi}}\Big(\sum_{i,k} a_{ik}\varphi_i\varphi_k'\Big)\Big(\sum_l \varphi_l\frac{\partial\sqrt{\Delta^1\varphi}}{\partial u_l}\Big),$$

fällt also wegen der zweiten Gleichung (14) weg. Die zweite Summe wird gleich

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta^1\varphi}}\sum_{i,l}\varphi_i\varphi_l\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i\partial u_l},$$

und die dritte:

$$-\frac{1}{\sqrt{\Delta^1\varphi}}\sum_{i,l,\mu,\nu}\alpha_{\mu\nu}\varphi_i\varphi_l\frac{\partial\varphi}{\partial u_\nu}\frac{\partial a_{\mu i}}{\partial u_l} \equiv -\frac{1}{\sqrt{\Delta^1\varphi}}\sum_{i,k,l,\nu}\alpha_{k\nu}\varphi_i\varphi_l\frac{\partial\varphi}{\partial u_\nu}\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l}.$$

Alle Bestandteile von $-g$ enthalten im allgemeinen Gliede $\varphi_i\varphi_l$ als Faktor. Der dritte kann mit dem ersten zusammengezogen werden, wenn man in diesem die Größe φ_k' durch ihren Wert (nach (13)) ersetzt oder umgekehrt φ_k' in den dritten einführt. Da nun in dem zweiten Summenausdruck Ableitungen von φ explizite vorkommen, so sollen solche auch in den beiden noch außerdem auftretenden beibehalten, also der erste in der Form

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta^1\varphi}}\sum_{i,k,l,\nu}\varphi_i\varphi_l\alpha_{k\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\nu}\begin{bmatrix}k\,l\\ i\end{bmatrix}$$

geschrieben werden. Bei der Zusammenfassung mit dem dritten erscheint die Größe

$$\begin{bmatrix}k\,l\\ i\end{bmatrix} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial a_{il}}{\partial u_k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial u_i}\Big) = -\begin{bmatrix}i\,l\\ k\end{bmatrix}.$$

Die Formel (20) geht demnach, wenn

$$\sum_k \alpha_{k\nu}\begin{bmatrix}i\,l\\ k\end{bmatrix} = \begin{Bmatrix}i\,l\\ \nu\end{Bmatrix}$$

oder bei Vertauschung von Bezeichnungen

$$(23)\qquad \sum_\lambda \alpha_{l\lambda}\begin{bmatrix} i\,k \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}$$

gesetzt wird, in

$$(24)\qquad -g = \frac{1}{\sqrt{\Delta^1\varphi}}\sum_{i,l}\varphi_i\varphi_l\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i\partial u_l} - \sum_\nu \begin{Bmatrix} i\,l \\ \nu \end{Bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\nu}\right)$$

über. Wie durch Vergleichung der Ausdrücke (23) mit S. 127 (5) zusammen mit S. 119 (5) sofort folgt, sind die Größen

$$\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

der Reihe nach mit

$$J_1,\quad J_1',\quad J_1'',\quad J_2,\quad J_2',\quad J_2''$$

identisch, und demnach (s. S. 129 (10))

$$(25)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i\partial u_k} - \sum_\nu \begin{Bmatrix} i\,k \\ \nu \end{Bmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\nu} = \varphi_{ik} \qquad (i, k = 1, 2).$$

Der Schlußausdruck für die Tangentialkrümmung lautet

$$(26)\qquad g = -\frac{1}{\sqrt{\Delta^1\varphi}}\sum_{i,k}\varphi_i\varphi_k\varphi_{ik}.$$

Er stimmt wegen (9) mit der letzten Formel des vorigen Paragraphen überein.

Die durch die Gleichungen (23) zusammen mit (18) definierten Größen $\begin{Bmatrix} i\,k \\ l \end{Bmatrix}$ heißen die Christoffelschen Verbindungen aus den Fundamentalgrößen erster Ordnung und ihren ersten Ableitungen. Ihre expliziten Ausdrücke, die allerdings wenig gebraucht werden, seien hier zusammengestellt:

$$(27)\qquad \begin{aligned}
\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 1 \end{Bmatrix} &\equiv J_1 = \frac{1}{T^2}\left(\frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u} - F\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial v}\right)\\
\begin{Bmatrix} 1\,1 \\ 2 \end{Bmatrix} &\equiv J_2 = \frac{1}{T^2}\left(E\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u}\right)\\
\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} &\equiv J_1' = \frac{1}{T^2}\left(\frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial u}\right)\\
\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} &\equiv J_2' = \frac{1}{T^2}\left(\frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial v}\right)\\
\begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} &\equiv J_1'' = \frac{1}{T^2}\left(G\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial u} - \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v}\right)\\
\begin{Bmatrix} 2\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} &\equiv J_2'' = \frac{1}{T^2}\left(\frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v} - F\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial u}\right).
\end{aligned}$$

Eine Vertauschung von u und v zieht die von

$$J_1 \quad J_1' \quad J_1''$$

mit

$$J_2'' \quad J_2' \quad J_2$$

nach sich.

§ 41.

Tangentialkrümmung der orthogonalen Trajektorie einer gegebenen Flächenkurve.

Mit denselben Hilfsmitteln wie für die Kurve c läßt sich die Tangentialkrümmung auch für ihre orthogonale Trajektorie c' bilden. Die positiven Richtungen der Tangente und der Tangentialnormale von c' sollen mit den oben (S. 131) definierten t' und t zusammenfallen. Bedeutet dann $\Theta'\chi$ für eine beliebige Funktion $\chi(u, v)$ den Ausdruck $\frac{\partial \chi}{\partial s}$, der a. a. O. für $\chi = x$ berechnet worden ist, so hat man genau wie dort

(1) $$\Theta'\chi = \frac{\Delta(\chi, \varphi)}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}}$$

oder, nach S. 132 (8),

(2) $$\Theta'\chi = \sum_\nu \varphi_\nu' \frac{\partial \chi}{\partial u_\nu},$$

der Gleichung (16) (S. 134) entsprechend. Die durch das Zeichen Θ' angedeutete Differentiation längs der Kurve c' tritt für die vorliegende Untersuchung an die Stelle von Θ, und da außerdem A, B, C und A', B', C' sich vertauschen, so ist

(3) $$g' = \sum A\, \Theta' A'$$

der Formel (5) (S. 131) an die Seite zu stellen. Die Einführung der Ausdrücke (7, 8) von A, A', ... liefert

$$g' = \sum \Big(\sum_i \varphi_i \frac{\partial x}{\partial u_i}\Big)\Big(\sum_l \varphi_l' \frac{\partial}{\partial u_l}\Big(\sum_k \varphi_k' \frac{\partial x}{\partial u_k}\Big)\Big)$$

$$= \sum_{i,k,l} \varphi_i \varphi_l' \varphi_k' \sum \frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{\partial^2 x}{\partial u_k \partial u_l} + \sum_{i,k,l} \varphi_i \varphi_l' \frac{\partial \varphi_k'}{\partial u_l} \sum \frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{\partial x}{\partial u_k},$$

und die Benutzung der Gleichungen (17, 19):

(4) $$g' = \sum_{i,k,l} \varphi_i \varphi_l' \varphi_k' \begin{bmatrix} k\,l \\ i \end{bmatrix} + \sum_{i,k,l} a_{ik} \varphi_i \varphi_l' \frac{\partial \varphi_k'}{\partial u_l}.$$

Diese Formel unterscheidet sich von der für $-g$ (S. 135 (20)) nur dadurch, daß φ_l' an der Stelle von φ_l steht. Setzt man also die

Rechnung in genau derselben Weise fort wie im vorigen Paragraphen, so erhält man

$$g' = \sum_{i,k,l} \varphi_i \varphi_l' \varphi_k' \begin{bmatrix} kl \\ i \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}} \sum_{i,k,l,\nu} a_{ik} \alpha_{k\nu} \varphi_i \varphi_l' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_\nu \partial u_l}$$
$$- \frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}} \sum_{i,k,l,\lambda,\mu,\nu} a_{ik} \alpha_{\mu\nu} \alpha_{kl} \varphi_i \varphi_l' \frac{\partial \varphi}{\partial u_\nu} \frac{\partial a_{\mu\lambda}}{\partial u_l}.$$

Denn der noch fehlende Ausdruck

$$-\frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}} \sum_{i,k,l} a_{ik} \varphi_i \varphi_l' \varphi_k' \frac{\partial \sqrt{\Delta^1 \varphi}}{\partial u_l} \equiv -\frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}} \Big(\sum_{i,k} a_{ik} \varphi_i \varphi_k'\Big)\Big(\sum_l \varphi_l' \frac{\partial \sqrt{\Delta^1 \varphi}}{\partial u_l}\Big)$$

verschwindet aus demselben Grunde wie dort. Da sich bei den folgenden Schritten garnichts ändert, so wird

(5) $$g' = \frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}} \sum_{i,l} \varphi_i \varphi_l' \Big(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_l} - \sum_\nu \begin{Bmatrix} i\,l \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\nu}\Big)$$

oder

(6) $$g' = \frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}} \sum_{i,k} \varphi_i \varphi_k' \varphi_{ik}.$$

Sobald es der Unterscheidung wegen nötig ist, soll den Zeichen g und g' ein Index φ beigefügt werden. Dann bedeuten also g_φ und g_φ' die Tangentialkrümmung der Kurve $\varphi(u, v) = \text{const.}$ und ihrer orthogonalen Trajektorie. Nimmt man der Reihe nach $\varphi(u, v) = v$ und $\varphi(u, v) = u$ an, so liefern die Formeln

(7) $$g_\varphi = -\frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}} (\varphi_1^2 \varphi_{11} + 2\varphi_1 \varphi_2 \varphi_{12} + \varphi_2^2 \varphi_{22})$$

(8) $$g_\varphi' = \frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}} (\varphi_1 \varphi_1' \varphi_{11} + (\varphi_1 \varphi_2' + \varphi_2 \varphi_1') \varphi_{12} + \varphi_2 \varphi_2' \varphi_{22})$$

für die Tangentialkrümmungen der Koordinatenlinien und ihrer orthogonalen Trajektorien die Werte

(9) $$g_v = \frac{TJ_2}{E\sqrt{E}} \qquad g_u = \frac{TJ_1''}{G\sqrt{G}}$$

(10) $$g_v' = \frac{1}{E\sqrt{E}} (FJ_2 - EJ_2') \qquad g_u' = \frac{1}{G\sqrt{G}} (GJ_1' - FJ_1'').$$

Sie werden besonders einfach für $F = 0$, wenn also die Koordinatenlinien sich unter rechten Winkeln schneiden. Nach den Schlußformeln des vorigen Paragraphen ist dann nämlich

$$(11)\qquad g_v = -\frac{1}{2E\sqrt{G}}\frac{\partial E}{\partial v}\qquad g_u = -\frac{1}{2G\sqrt{E}}\frac{\partial G}{\partial u}$$

$$(12)\qquad g'_v = -\frac{1}{2G\sqrt{E}}\frac{\partial G}{\partial u}\qquad g'_u = \frac{1}{2E\sqrt{G}}\frac{\partial E}{\partial v}.$$

Daß hierin g_v und g_u bei einer Vertauschung von u und v in einander übergehen, g'_v und g'_u aber erst nach Umkehrung eines Vorzeichens, findet in den Festsetzungen über die positiven Richtungen der Tangenten und der Tangentialnormalen seine Erklärung. Die zur Berechnung von g_v und g_u in erster Linie gebrauchten Tangentialnormalen t'_v und t'_u sollten nach den positiven Seiten der Linien $v = \text{const.}$ und $u = \text{const.}$ gerichtet, die positiven Tangenten aber durch die Äquivalenzen

$$(13)\qquad t_v,\ t'_v,\ n \sim x,\ y,\ z \qquad t_u,\ t'_u,\ n \sim x,\ y,\ z,$$

aus denen

$$(14)\qquad t_v,\ t'_v \sim t_u,\ t'_u$$

folgt, festgelegt sein. Nun fällt der Orthogonalität der Kurven wegen t'_v mit t_u, t'_u mit t_v, wenigstens abgesehen von den positiven Richtungen, zusammen, was durch

$$t'_v \sim \varepsilon_u t_u, \qquad t'_u \sim \varepsilon_v t_v$$

wiedergegeben werden kann. Jenachdem nun ε_u gleich $+1$ oder gleich -1 ist, muß nach (14) ε_v den Wert -1 oder $+1$ haben. Hierüber läßt sich aber noch Genaueres aussagen. Nach der Definition der positiven Flächennormale n mittels der positiven Richtungen der Koordinatenlinien (S. 50), verbunden mit den Festsetzungen über diese Richtungen (S. 28), ist nämlich

$$t'_u,\ t'_v,\ n \sim x,\ y,\ z.$$

Daher ist nur $\varepsilon_v = +1$, d. h. $\varepsilon_u = -1$, möglich, und dies ist es, was die Formeln (11, 12) zum Ausdruck bringen.

In dem besonderen Falle orthogonaler Koordinatenlinien, für den die Einführung von g'_v und g'_u ohnedies unnötig ist, empfiehlt es sich

daher überhaupt nicht, mit diesen Größen zu rechnen. Dagegen leistet die gleichzeitige Benutzung von g und g' namentlich in der Theorie einer einzigen Kurvenschar gute Dienste.

§ 42.

Mittelpunkt und Radius der Tangentialkrümmung.

Die Methoden, nach denen die verschiedenen Ausdrücke der Tangentialkrümmung in den Paragraphen 39 und 40 hergestellt worden sind, lassen erkennen, daß man für diese geometrische Größe, wenn man an bestimmten Stellen den Gang der Rechnung etwas abändert, noch weitere Formeln wird herleiten können, die sich von jenen der äußeren Gestalt nach unterscheiden (vgl. § 94). Aber besonders wichtig ist, daß sich die Tangentialkrümmung, ebenso wie die Normalkrümmung, zu einer vorzeichenfreien, in der Figur durch eine Strecke repräsentierten Größe in einfache Beziehung setzen läßt. Es war bewiesen worden (§ 20 und 22), daß die vom Flächenpunkte nach dem Krümmungsmittelpunkt gehende Hauptnormale einer Flächenkurve mit der nach dem Krümmungsmittelpunkt des zugehörigen Normalschnitts gerichteten Flächennormale einen spitzen Winkel bildet, und daß der Kosinus dieses Winkels dem Quotienten aus den Krümmungshalbmessern der beiden Kurven gleich ist, wobei der des Normalschnitts im Nenner steht. Diese Beziehung,

$$r = r_0 \cos \varphi_0$$

(§ 20 (7)) oder

$$k \cos \varphi_0 = k_0$$

(§ 22 (1)), besagt (Fig. 13), daß der Krümmungsradius AM der Flächenkurve der Projektion des (absolut genommenen) Krümmungsradius AM_0 auf die Schmiegungsebene gleich ist; oder, damit identisch, daß die Krümmungsachse der Flächenkurve die durch die Tangente gehende Normalebene der Fläche und damit auch die Flächennormale in dem Krümmungsmittelpunkt des Normalschnitts trifft. Es sei jetzt $M_0' \equiv (\xi_0' \eta_0' \zeta_0')$ der Punkt, in dem die Krümmungsachse die Tangentialebene der Fläche und damit auch die Tangentialnormale der Kurve schneidet, r_0' sein Abstand vom Flächenpunkte A, φ_0' der spitze Winkel zwischen AM und AM_0'; dann ist

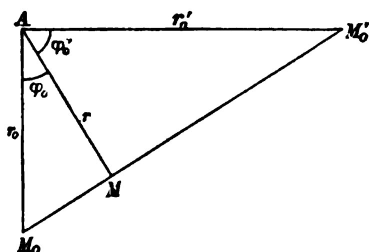


Fig. 13.

(1) $$r = r_0' \cos \varphi_0'$$

oder, für $\frac{1}{r_0'} = k_0'$,

(2) $$k \cos \varphi_0' = k_0'.$$

Der hierin auftretende Kosinus unterscheidet sich von dem, der in der Definitionsformel für die Tangentialkrümmung

$$k \cos(t', h) = g$$

(S. 59 (11)) vorkommt, höchstens durch das Vorzeichen. Danach muß auch g, vom Vorzeichen abgesehen, mit k_0' übereinstimmen.

Berechnen wir nun direkt die Koordinaten des Punktes M_0', dessen Abstand von A dem reziproken Werte von k_0' gleich ist. Die Krümmungsachse der Kurve hat, als Lot auf der Schmiegungsebene im Krümmungsmittelpunkte, die Gleichungen

$$(3) \qquad \frac{\mathfrak{x} - \xi}{a'} = \frac{\mathfrak{y} - \eta}{b'} = \frac{\mathfrak{z} - \zeta}{c'},$$

die mit der der Tangentialebene zusammenzustellen sind. Da es sich aber für diese Untersuchung schließlich um die Richtung AM_0' handelt, deren Kosinus den Differenzen $\xi_0' - x, \ldots$ proportional sind, so ist es zweckmäßiger, die Gleichungen in der Form

$$(4) \qquad \begin{aligned} (\mathfrak{x} - x) a + (\mathfrak{y} - y) b + (\mathfrak{z} - z) c &= 0 \\ (\mathfrak{x} - x) a'' + (\mathfrak{y} - y) b'' + (\mathfrak{z} - z) c'' &= r \end{aligned}$$

(vgl. S. 17 (8, 9)) zu schreiben, die die Krümmungsachse, ihrer ursprünglichen Erklärung gemäß, als Schnittlinie zweier benachbarten Normalebenen darstellen. Sie liefern mit

$$(\mathfrak{x} - x) X + (\mathfrak{y} - y) Y + (\mathfrak{z} - z) Z = 0$$

zusammen für $\xi_0' - x, \ldots$ die Formeln

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a'' & b'' & c'' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} (\xi_0' - x) = \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ r & b'' & c'' \\ 0 & Y & Z \end{vmatrix}, \ldots,$$

d. h. wegen $bc'' - cb'' = -a', \ldots$ und für A, B, C statt a, b, c (S. 54):

$$(5) \qquad \xi_0' - x = \frac{r(BZ - CY)}{a'X + b'Y + c'Z}, \ldots .$$

$\xi_0', \eta_0', \zeta_0'$ werden hierdurch, wie es sein muß, eindeutig bestimmt. Denn zwar richten sich die Werte von A, B, C nach dem Prinzip des Fortganges auf der Kurve, aber gleichzeitig mit ihnen kehren a', b', c' ihre Zeichen um.

Bedeuten nun A_0', B_0', C_0' die Kosinus der von A nach M_0' gehenden Richtung, so ist

$$(6) \qquad \frac{\xi_0' - x}{r_0'} = A_0', \ldots .$$

Außerdem aber war im § 16 für die Tangentialnormale eine positive Richtung $t' \equiv (A'B'C')$ eingeführt worden, die mit der Lage des Punktes M_0' nichts zu tun hat. Ob man sie mittels der Äquivalenz

$$t, t', n \sim x, y, z$$

an ein beliebiges Fortgangsprinzip auf der Kurve knüpft oder, wie im § 40, unabhängig davon erklärt und dann erst das Fortgangsprinzip der Äquivalenz gemäß annimmt, bleibt gleichgültig. Von Bedeutung ist nur, daß dieser Äquivalenz zufolge

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = +1$$

$$A' = -(BZ - CY), \ldots$$

wird. Setzt man noch

(7) $$-\frac{r}{\Sigma a' X} = \varrho',$$

so nehmen die Gleichungen (5) die Form an

$$\xi_0' - x = \varrho' A', \ldots$$

während nach (6)

$$\xi_0' - x = r' A_0', \ldots$$

ist. Fällt nun AM_0' mit der positiven Richtung der Tangentialnormale zusammen, ist also

$$A_0' = A_0, \ldots,$$

so wird $\varrho' = r_0'$; sind aber AM_0' und t' entgegengesetzt gerichtet, und demnach

$$A_0' = -A_0, \ldots,$$

so ergibt sich $\varrho' = -r_0'$. Endlich war (S. 60 (14))

$$g = -k\Sigma a' X \equiv -\frac{\Sigma a' X}{r},$$

also

(8) $$g = \frac{1}{\varrho'}.$$

Die Tangentialkrümmung ist mithin dem reziproken Werte des Abstandes der Punkte A und M_0' gleich oder entgegengesetzt gleich, je nachdem die positive Richtung der Tangentialnormale mit der von A nach M_0' gehenden übereinstimmt oder nicht.

Im Grunde hängt dieses Ergebnis von den Vorstellungen der Hauptnormale, Tangentialnormale, Krümmung usw. gar nicht ab. Es

stellt vielmehr nur die Anwendung einer einfachen und allgemeinen Überlegung aus der Projektionslehre vor, die darauf beruht, daß auf zwei von demselben Punkte ausgehenden Strecken, deren eine die Projektion der anderen ist, außer den Streckenrichtungen selbst auch die entgegengesetzten in Betracht gezogen werden. Um das Resultat herzuleiten, bedarf man auch des Koordinatensystems nicht. Die Bezugnahme auf ein solches ist hier nur deshalb festgehalten worden, weil außer dem Zusammenhang zwischen den vorkommenden geometrischen Größen auch deren allgemeine analytische Ausdrücke gebraucht werden.

Entsprechendes gilt schon in der Theorie der Normalkrümmung, so lange es sich nur um die Bedeutung des Vorzeichens in der Gleichung

$$n = \pm \frac{1}{r_0}$$

handelt, worin n durch die Formel

$$k \cos \varphi = n$$

definiert ist und r_0 den Abstand des Flächen- oder Kurvenpunktes A von dem Schnittpunkt M_0 der Krümmungsachse und der Flächennormale bedeutet. Ein wirklicher geometrischer Satz, nämlich der Meusniersche, ergibt sich erst aus der Tatsache, daß r_0 noch eine andere Bedeutung hat, die des Krümmungshalbmessers einer bestimmten ebenen Kurve.

Man kann fragen, ob sich über die Größe r_0' etwas Ähnliches aussagen läßt. Sie mit dem Schnitt der Tangentialebene und der Fläche in Verbindung zu bringen, verbietet sich offenbar deshalb, weil dieser Schnitt zu einer beliebigen durch A gehenden Flächenkurve in keiner besonderen Beziehung steht. Aber man kann die Projektion der Kurve auf die Tangentialebene einführen und deren Krümmung untersuchen.

Zu dem Zweck möge das Koordinatensystem so gewählt werden, daß der betrachtete Punkt Anfangspunkt, die Tangentialebene in ihm die (xy)-Ebene ist. Die Richtungen t und t' mögen die der positiven x- und y-Achse sein, so daß Flächennormale und z-Achse ebenfalls den positiven Richtungen nach zusammenfallen. Wie im § 28 bemerkt worden ist, empfiehlt sich eine derartige Spezialisierung trotz der dadurch hervorgerufenen Vereinfachung der Formeln im allgemeinen nicht. Hier kann sie unbedenklich angewendet werden, weil die Projektion einer Flächenkurve auf die Tangentialebene nur vorübergehend gebraucht wird und die allgemeinen Ausdrücke aller Größen, auf die es ankommt, nach dem Vorhergehenden bereits bekannt sind.

Für die gemachten Annahmen ist $x = y = z = 0$, $A = B' = Z = 1$, die sechs übrigen Richtungskosinus Null, also

$$\xi_0' = 0, \qquad \eta_0' = \varrho', \qquad \zeta_0 = 0.$$

Es handelt sich allein um die Berechnung von

$$\varrho' = -\frac{r}{c'} = \frac{ds^2}{R}$$

(§ 3 (9), (15)). Der Parameter, durch den die Flächenkurve dargestellt wird, sei x selbst, so daß $d^2x = 0$ ist und die Gleichungen der Kurve die Form haben

(9) $$\mathfrak{x} = x, \qquad \mathfrak{y} = y(x), \qquad \mathfrak{z} = z(x).$$

Wegen $A = 1$ wird dann $ds = dx$, und die einzige außerdem noch gebrauchte Größe ist

$$R = y'' dx^3.$$

Mithin hat man

$$\varrho' = \frac{1}{y''}, \qquad \eta_0' = \frac{1}{y''}.$$

Die Projektion der Kurve auf die Tangentialebene wird bei der Darstellung (9) durch die beiden ersten Gleichungen zusammen mit $\mathfrak{z} = 0$ repräsentiert. Berechnet man für sie nach elementaren Formeln der Differentialrechnung die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes, so findet man sofort

$$\xi' = 0, \qquad \eta' = \frac{1}{y''}, \qquad \zeta' = 0.$$

Der Schnittpunkt der Krümmungsachse der Kurve mit der Tangentialebene der Fläche, welcher der **Mittelpunkt der Tangentialkrümmung** genannt wird, fällt also mit dem Krümmungsmittelpunkt der ebenen Kurve zusammen, in der sich die Flächenkurve auf die Tangentialebene projiziert. Die Gleichung (1) entspricht in dieser Theorie dem Meusnierschen Satze.

Die ebene Kurve kehrt dem Krümmungsmittelpunkt die konkave Seite zu. Hält man dies mit der obigen Zeichenbestimmung zusammen, so kann man sagen: Die Tangentialkrümmung einer Flächenkurve ist positiv oder negativ, je nachdem die Projektion der Kurve auf die Tangentialebene nach der Seite der positiven Tangentialnormale hin konkav oder konvex ist.

Unter dem **Radius der Tangentialkrümmung** soll, entsprechend wie für die Normalkrümmung, nicht die Strecke AM_0', absolut genommen, sondern die Größe ϱ', der reziproke Wert von g, verstanden werden.

V. Abschnitt.

Grundlagen der Theorie der binären Differentialformen.

§ 43.

Zusammenhang flächentheoretischer Aufgaben mit der Theorie der binären Differentialformen. Biegungskovarianten.

Führt man die in den letzten Paragraphen beständig festgehaltene Voraussetzung, eine Flächenkurve sei durch die Gleichung

$$\varphi(u, v) = C$$

gegeben, in die Formel für die Normalkrümmung

$$n = \frac{L du^2 + 2 M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2 F du dv + G dv^2}$$

ein, so erhält man, wie schon im § 18 unter (10) angegeben,

$$(1) \qquad n = \frac{L\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2 M \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + N\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2 F \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}.$$

Daß dieser Ausdruck nur von den ersten partiellen Ableitungen der Funktion φ abhängt, während zur Berechnung von g auch die Ableitungen zweiter Ordnung gebraucht werden, entspricht der auf S. 127 gemachten Bemerkung über die Art des Auftretens der Differentiale in den beiden Formeln. Ebendaselbst ist auch schon hervorgehoben worden, daß in g nur die Fundamentalgrößen erster Ordnung E, F, G der Fläche enthalten sind, während in n außerdem noch L, M, N vorkommen.

Die Formel (1) enthält insbesondere die ersten partiellen Ableitungen von φ nur in ihrem Quotienten $\frac{\partial \varphi}{\partial u} : \frac{\partial \varphi}{\partial v}$. Definiert man die Kurve durch Nullsetzung einer linearen Differentialform

$$(2) \qquad \mathfrak{M}_0 \equiv m_1 du + m_2 dv,$$

die der Integrabilitätsbedingung nicht genügt oder wenigstens nicht zu genügen braucht, so hat man diesen Quotienten durch $m_1 : m_2$ zu ersetzen, wodurch (1) in

(3) $$n = \frac{L m_2^2 - 2 M m_2 m_1 + N m_1^2}{E m_2^2 - 2 F m_2 m_1 + G m_1^2}$$

übergeht (§ 18 (12)). Man kann fordern, für dieselbe Kurvendarstellung auch g zu berechnen, also die Formel § 39 (11) in bestimmter Richtung zu verallgemeinern.

Aber noch wichtiger ist eine andere Aufgabe, die übrigens mit dieser nahe zusammenhängt: nämlich die Bedeutung der Tangentialkrümmung in der Abwickelungstheorie festzustellen. Das alleinige Vorkommen der Fundamentalgrößen erster Ordnung in der Formel für g weist auf die Notwendigkeit einer solchen Untersuchung hin. Um nun diese nicht später zum Teil wiederholen zu müssen, wollen wir schon hier die Beziehungen zwischen einer Kurve auf gegebener Fläche und der entsprechenden Kurve auf einer beliebigen ihrer Biegungsflächen, wenigstens bis zu einem bestimmten Punkte hin, vollständig und auf möglichst einfachem Wege zu ergründen suchen. Dabei wird auch der Sinn einiger im Vorhergehenden angewendeten Operationen deutlicher hervortreten.

Aus dem im § 38 Gesagten ist ersichtlich, daß die Biegungstheorie mit der Transformation der krummlinigen Koordinaten aufs engste verbunden ist. Bedeuten u, v und u', v' die Koordinatenpaare für zwei aufeinander abwickelbare Flächen, und

(4) $$u' = u'(u, v)$$
$$v' = v'(u, v)$$

die Beziehungen, durch welche die Punkte der beiden Flächen einander zugeordnet werden, so sollen die beiden Kurven

$$\varphi(u, v) = C$$
und
$$\overline{\varphi}(u', v') = C$$

einander entsprechend heißen, wenn $\overline{\varphi}(u', v')$ aus $\varphi(u, v)$ mittels der Substitution (4) hervorgeht, d. h. die Gleichung

(5) $$\varphi(u, v) = \overline{\varphi}(u', v')$$

für $u' = u'(u, v)$, $v' = v'(u, v)$ identisch erfüllt wird. Die Differentiation nach u und v einzeln liefert zwischen den Ableitungen der gegebenen und der transformierten Funktion die beiden Gleichungen

(6) $$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u'} \frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial v'} \frac{\partial v'}{\partial u}$$
$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u'} \frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial v'} \frac{\partial v'}{\partial v}.$$

Man kann von ihnen auch sagen, daß sie aus

(7) $$d\varphi = d\overline{\varphi},$$

d. h.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} du + \frac{\partial \varphi}{\partial v} dv = \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u'} du' + \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial v'} dv',$$

durch Einführung von

(8) $$\begin{aligned} du' &= \frac{\partial u'}{\partial u} du + \frac{\partial u'}{\partial v} dv \\ dv' &= \frac{\partial v'}{\partial u} du + \frac{\partial v'}{\partial v} dv \end{aligned}$$

und Vergleichung der Koeffizienten von du und dv auf beiden Seiten folgen.

Läßt man bei dieser Auffassungsweise eine lineare Differentialform $\mathfrak{M}_0$ an die Stelle des vollständigen Differentials $d\varphi$ treten und bezeichnet mit

(9) $$\mathfrak{M}_0' \equiv m_1' du' + m_2' dv'$$

die aus $\mathfrak{M}_0$ vermöge der Gleichungen (4) und (8) hervorgehende Form, sodaß die Gleichung

$$m_1 du + m_2 dv = m_1' du' + m_2' dv'$$

gilt, so sind die Koeffizienten der transformierten Form durch die Beziehungen

(10) $$\begin{aligned} m_1 &= m_1' \frac{\partial u'}{\partial u} + m_2' \frac{\partial v'}{\partial u} \\ m_2 &= m_1' \frac{\partial u'}{\partial v} + m_2' \frac{\partial v'}{\partial v} \end{aligned}$$

bestimmt. Und umgekehrt folgt aus ihnen wieder

(11) $$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_0'.$$

Gleichzeitig mit den Relationen (6) oder (10) bestehen nun in der Theorie der aufeinander abwickelbaren Flächen drei Gleichungen zwischen den Koeffizienten einer quadratischen Differentialform

$$\mathsf{A} \equiv E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2$$

und denen ihrer transformierten

$$\mathsf{A}' \equiv E' du'^2 + 2F' du' dv' + G' dv'^2$$

(S. 124). Diese Transformationsgleichungen

(12) $$\begin{aligned} E &= E' \left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + 2F' \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial u} + G' \left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2 \\ F &= E' \frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial u'}{\partial v} + F' \left(\frac{\partial u'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial v'}{\partial u} \frac{\partial u'}{\partial v}\right) + G' \frac{\partial v'}{\partial u} \frac{\partial v'}{\partial v} \\ G &= E' \left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + 2F' \frac{\partial u'}{\partial v} \frac{\partial v'}{\partial v} + G' \left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2 \end{aligned}$$

bilden die Grundlage der nächsten Untersuchungen. Sie folgen aus

$$(13) \qquad \mathsf{A} = \mathsf{A}'$$

mittels der Substitution (8) und liefern umgekehrt die Gleichung (13) wieder.

Aber es ist unmittelbar ersichtlich, daß wenn δu, δv irgend zwei Größen bedeuten, die mit zwei anderen $\delta u'$, $\delta v'$ durch dieselben Gleichungen verbunden sind wie die Differentiale du, dv mit du', dv', also

$$(14) \qquad \begin{aligned} \delta u' &= \frac{\partial u'}{\partial u}\delta u + \frac{\partial u'}{\partial v}\delta v \\ \delta v' &= \frac{\partial v'}{\partial u}\delta u + \frac{\partial v'}{\partial v}\delta v, \end{aligned}$$

alsdann aus den Transformationsgleichungen die allgemeinere Relation

$$(15) \qquad E\delta u^2 + 2F\delta u\,\delta v + G\delta v^2 = E'\delta u'^2 + 2F'\delta u'\,\delta v' + G'\delta v'^2$$

hervorgeht. Solche Größen $\delta u, \ldots$ mögen als Variationen bezeichnet werden, doch ist dabei von einer Beziehung zur Variationsrechnung nicht die Rede.

Noch allgemeiner: Sind δu, δv und $\mathfrak{d} u$, $\mathfrak{d} v$ zwei Paare von Variationen (Differentiale selbst niemals ausgeschlossen), so hat man

$$(16) \qquad \begin{aligned} E\delta u\,\mathfrak{d}u + F(\delta u\,\mathfrak{d}v + \delta v\,\mathfrak{d}u) + G\delta v\,\mathfrak{d}v = \\ E'\delta u'\mathfrak{d}u' + F'(\delta u'\mathfrak{d}v' + \delta v'\mathfrak{d}u') + G'\delta v'\mathfrak{d}v'. \end{aligned}$$

Insofern die Koeffizienten der bilinearen Differentialform (S. 33)

$$(E\delta u + F\delta v)\mathfrak{d}u + (F\delta u + G\delta v)\mathfrak{d}v \equiv \mathfrak{A}$$

mit denen von A übereinstimmen, kann man den Inhalt der Gleichung (16) dahin aussprechen, daß die Transformation einer quadratischen Form A die der zugehörigen bilinearen Form nach sich zieht.

Solche Variationen nun lassen sich mittels (5) oder (11), in Verbindung mit den Transformationsgleichungen (12) selbst, auf einfache Weise herstellen.

Differentiiert man nämlich die Identität (5) nach u' und v' statt nach u und v, so ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u'} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u'} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u'} \\ \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial v'} &= \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v'} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v'}, \end{aligned}$$

die sich mit Hilfe der Umkehrungsformeln (S. 40 (12)) in die Gestalt

$$\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u'} = \frac{1}{\Delta'}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} - \frac{1}{\Delta'}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u}$$

$$\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial v'} = -\frac{1}{\Delta'}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{1}{\Delta'}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial u}$$

setzen lassen. Wegen

$$T = T'\Delta'$$

(S. 43 (5)) folgt weiter

(17)
$$\frac{1}{T'}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial v'} = \frac{1}{T}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial u'}{\partial u} - \frac{1}{T}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v}$$
$$-\frac{1}{T'}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u'} = \frac{1}{T}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial u} - \frac{1}{T}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v}.$$

Die Vergleichung mit (14) lehrt, daß man

(18)
$$\delta u = \frac{1}{T}\frac{\partial\varphi}{\partial v}, \qquad \delta v = -\frac{1}{T}\frac{\partial\varphi}{\partial u}$$
$$\delta u' = \frac{1}{T'}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial v'}, \qquad \delta v' = -\frac{1}{T'}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u'}$$

annehmen darf. Diese Werte liefern, in die Gleichung (15) eingeführt,

(19)
$$\frac{1}{T^2}\left[G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\right] =$$
$$\frac{1}{T'^2}\left[G'\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u'}\right)^2 - 2F'\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u'}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial v'} + E'\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial v'}\right)^2\right].$$

Nimmt man eine von $\varphi(u, v)$ verschiedene, ebenfalls willkürliche Funktion $\psi(u, v)$ hinzu und setzt, den Ausdrücken (18) entsprechend,

$$\mathfrak{d}u = \frac{1}{T}\frac{\partial\psi}{\partial v}, \qquad \mathfrak{d}v = -\frac{1}{T}\frac{\partial\psi}{\partial u},$$

so gibt die Gleichung (16) oder

(20)
$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$$

die allgemeinere Beziehung

(21)
$$\frac{1}{T^2}\left[G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u} - F\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right] =$$
$$\frac{1}{T'^2}\left[G'\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u'}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial u'} - F'\left(\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u'}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial v'} + \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial u'}\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial v'}\right) + E'\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial v'}\frac{\partial\overline{\psi}}{\partial v'}\right].$$

Benutzt man dagegen bloß die Ausdrücke (18) und ersetzt das zweite Paar von Variationen durch Differentiale, so liefert dieselbe Gleichung:

(22)
$$\frac{1}{T}\left[\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)du + \left(F\frac{\partial\varphi}{\partial v} - G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)dv\right] =$$
$$\frac{1}{T'}\left[\left(E'\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial v'} - F'\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u'}\right)du' + \left(F'\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial v'} - G'\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u'}\right)dv'\right].$$

Die Ausdrücke auf den linken Seiten von (19) und (21), der Differentialparameter erster Ordnung einer Funktion und der Zwischenparameter zweier Funktionen, sind uns schon von den Elementen der Koordinatentransformation her bekannt (S. 42). Die Gleichungen selbst lassen sich schreiben

$$\Delta_a^1 \varphi = \Delta_{a'}^1 \overline{\varphi} \tag{23}$$

$$\Delta_a(\varphi, \psi) = \Delta_{a'}(\overline{\varphi}, \overline{\psi}). \tag{24}$$

Hierbei sollen die Indizes a und a' andeuten, daß die Koeffizienten links der Form A, rechts der transformierten Form A' entnommen sind.

Die Relationen (23) und (24) sind für die Theorie der Differentialformen von großer Bedeutung. Sie lehren nämlich Ausdrücke kennen, die aus den Koeffizienten einer Form A und den Ableitungen einer oder mehrerer willkürlichen Funktionen von u und v gebildet sind und die Eigenschaft haben, bei einer beliebigen Transformation (4) in die aus den Koeffizienten von A' und den Ableitungen der transformierten Funktionen nach den neuen Variablen in derselben Weise zusammengesetzten Ausdrücke überzugehen. Während z. B. der Koeffizient E nicht etwa gleich E' wird, die Ableitung $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ nicht gleich $\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u'}$, so sind doch vermöge (23) und (24) jedesmal zwei der Form nach gleichgebildete Ausdrücke auch dem Werte nach einander gleich. Im Hinblick auf die Bedeutung, die für $\mathsf{A} = ds^2$ der Koordinatentransformation in der Biegungstheorie zukommt, sollen solche Größen als B i e g u n g s k o v a r i a n t e n der Funktion φ oder des Funktionenpaares (φ, ψ) bezeichnet werden.

Freilich hat man sich bei Anwendung dieser Bezeichnung darüber klar zu sein, daß die Formeln selbst von der Bedeutung der Größe A in der Flächentheorie völlig unabhängig sind, also in gleicher Weise für eine beliebige quadratische Differentialform von nicht verschwindender Determinante gelten.

§ 44.

Transformation einer binären quadratischen Form. Kogrediente und kontragrediente Systeme von Variablen.

Es ist nützlich, die Kovarianzen (23) und (24) oder allgemeiner diejenigen, die bei Benutzung von $\mathfrak{M}_0$ statt $d\varphi$ an ihre Stelle treten (S. 158), noch nach anderer Methode herzuleiten als durch Bildung von Variationen mittels der Umkehrungsformeln. In der Theorie des Formenpaares $(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0)$ reicht man nämlich mit den Hilfsmitteln der algebra-

ischen Formentheorie so lange aus, wie nur die Koeffizienten selbst, nicht auch ihre Ableitungen ins Spiel kommen.

Es sei

$$\sum_{i,k} a_{ik}\,\xi_i\,\xi_k \equiv \mathsf{A} \qquad (a_{ki} = a_{ik})$$

eine quadratische Form, die durch die homogene lineare Substitution

$$\xi'_\lambda = \sum_i s_{\lambda i}\,\xi_i \tag{1}$$

in

$$\sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu}\,\xi'_\lambda\,\xi'_\mu \equiv \mathsf{A}'$$

übergeführt wird. Wie schon auf S. 133 angegeben, haben bei dieser Schreibweise die Indizes $i, k, \lambda, \mu, \ldots$ die Werte 1 und 2 anzunehmen. Übrigens kann man sich leicht bei jeder einzelnen Untersuchung klar machen, ob und wie weit die Formeln auch im Gebiete von n Variablen ($n > 2$) gültig bleiben.

Die Transformationsgleichungen für die Koeffizienten lauten

$$a_{ik} = \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu}\,s_{\lambda i}\,s_{\mu k}. \tag{2}$$

Aus ihnen folgt durch zweimalige Anwendung des Multiplikationstheorems der Determinanten (vgl. für $n = 2$ wieder die Formel S. 34 (10)):

$$a = a' \, . \, s^2, \tag{3}$$

wo

$$a' \equiv \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix}$$

die Determinante der transformierten Form, und

$$s \equiv \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix}$$

die Substitutionsdeterminante bedeutet. Die Gleichung (3) kennzeichnet die Determinante der Form als Invariante im algebraischen Sinne. In der Differentialgeometrie hat man es immer nur mit absoluten Invarianten zu tun, d. h. solchen, aus denen die Potenzen der Substitutionsdeterminante verschwunden sind. Sie sollen als Invarianten ohne weiteren Zusatz benannt, dagegen die algebraischen, wo sie vorübergehend auftreten, ausdrücklich als solche bezeichnet werden, wenn irgend ein Zweifel möglich ist.

Im § 40 ist der Differentialparameter erster Ordnung einer Funktion für die Grundform A in eine übersichtliche Gestalt gesetzt worden.

Der dortigen Formel (12) (S. 133) entspricht für den Zwischenparameter die folgende:

(4) $$\Delta_a(\varphi, \psi) = \sum_{i,k} \alpha_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial \psi}{\partial u_k}.$$

Wegen $a_{ki} = a_{ik}$ ist dabei

(5) $$\alpha_{ki} = \alpha_{ik}.$$

Der Ausdruck (4) ist handlicher als der frühere, weil das Minuszeichen darin nicht mehr vorkommt. Seine eigentliche Bedeutung aber beruht auf seinem Zusammenhange mit den Elementen der Formentheorie, und zwar für einen beliebigen Wert von n.

Zum Beweise der Kovarianz oder, je nach dem eingenommenen Standpunkt, der Invarianz des Zwischenparameters braucht man die Transformationsgleichungen für die Größen α_{ik}. Sie können aus (2) nach bekannten Determinantensätzen abgeleitet werden. Aber eine bessere Einsicht bekommt man mittels einer Umwandlung der Form A, der Art, daß $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \alpha_{22}$ statt a_{11}, a_{12}, a_{22} als Koeffizienten auftreten.

Der Eulersche Satz über homogene Funktionen, der für die Funktion A durch die Gleichung

(6) $$\frac{1}{2} \sum_l \xi_l \frac{\partial A}{\partial \xi_l} = A$$

wiedergegeben wird, führt darauf, gleichzeitig mit den ursprünglichen Argumenten ξ_l oder auch statt ihrer die halben partiellen Ableitungen der Form nach diesen Größen, also bestimmte homogene lineare Funktionen der Argumente, zu benutzen. Es ist

$$\frac{\partial A}{\partial \xi_l} = \sum_{i,k} a_{ik} \left(\xi_i \frac{\partial \xi_k}{\partial \xi_l} + \xi_k \frac{\partial \xi_i}{\partial \xi_l} \right)$$

$$= \sum_i a_{il} \xi_i + \sum_k a_{lk} \xi_k$$

$$= \sum_i a_{il} \xi_i + \sum_i a_{li} \xi_i,$$

(7) $$\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial \xi_l} = \sum_i a_{il} \xi_i.$$

Setzt man demnach

(8) $$\frac{1}{2} \frac{\partial A}{\partial \xi_l} = x_l,$$

so sind die Größen $x_1, \ldots$ mit den Größen $\xi_1, \ldots$ durch die Gleichungen

(9) $$x_l = \sum_\nu a_{\nu l} \xi_\nu$$

verbunden. Die Determinante der Funktionen x_l nach den Argumenten ξ_ν ist mit der Determinante der Form A identisch, also von Null verschieden.

Die Auflösung von (9) liefert

$$\sum_l \alpha_{il} x_l = \sum_{\nu, l} \alpha_{il} a_{\nu l} \xi_\nu = \sum_\nu \varepsilon_{i\nu} \xi_\nu = \xi_i$$

oder

(10) $$\xi_\nu = \sum_l \alpha_{\nu l} x_l .$$

Setzt man diese Werte in die Formel (6) des Eulerschen Satzes, die jetzt die Gestalt

(11) $$\sum_\nu x_\nu \xi_\nu = \mathsf{A}$$

annimmt, oder auch in den ursprünglichen Ausdruck von A ein, so erhält man

(12) $$\mathsf{A} = \sum_{\lambda, \mu} \alpha_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu .$$

Um nun auf Grund dieser Umwandlung die Beziehung

$$\mathsf{A} = \mathsf{A}'$$

für den beabsichtigten Zweck nutzbar zu machen, muß man noch wissen, in welcher Weise sich die neuen Variablen x_l vermöge der Substitution (1) transformieren. Dabei hat man im Auge zu behalten, daß die Größen x'_l durch die Gleichungen

(13) $$x'_l = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathsf{A}'}{\partial \xi'_l} = \sum_\nu a'_{\nu l} \xi'_\nu$$

definiert werden, aus denen

(14) $$\xi'_\nu = \sum_l \alpha'_{\nu l} x'_l$$

(15) $$\mathsf{A}' = \sum_{i, k} \alpha'_{ik} x'_i x'_k$$

folgt; jede Größe $\alpha'_{\nu\varrho}$ ist aus den Koeffizienten $a'_{11}, \ldots$ der transformierten Form A′ in derselben Weise zusammengesetzt wie $\alpha_{\nu\varrho}$ aus denen von A. Die Gleichungen, die den Zusammenhang zwischen $x_1, \ldots$ und $x'_1, \ldots$ vermitteln, müssen aus den Systemen (1), (9) und (13) durch Elimination von $\xi_1, \ldots$ und $\xi'_1, \ldots$ unter Benutzung der Transformationsgleichungen (2) hervorgehen. Einfacher schließt man so: Aus A = A′ folgt

$$\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial \xi_\lambda} = \sum_i \frac{\partial \mathsf{A}'}{\partial \xi'_i} \frac{\partial \xi'_i}{\partial \xi_\lambda} = \sum_i s_{i\lambda} \frac{\partial \mathsf{A}'}{\partial \xi'_i},$$

d. h.

(16) $$x_\lambda = \sum s_{i\lambda} x'_i .$$

Diese Ausdrücke geben dann, in

$$\sum_{\lambda,\mu} \alpha_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu = \sum_{i,k} \alpha'_{ik} x'_i x'_k$$

eingeführt, die gesuchten Beziehungen

(17) $$\alpha'_{ik} = \sum_{\lambda,\mu} \alpha_{\lambda\mu} s_{i\lambda} s_{k\mu}.$$

Stellt man die Substitutionsgleichungen (1) und (16) einmal ohne Benutzung des Summenzeichens und für einen beliebigen Wert von n zusammen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \xi'_1 &= s_{11}\xi_1 + s_{12}\xi_2 + \cdots + s_{1n}\xi_n \\ \xi'_2 &= s_{21}\xi_1 + s_{22}\xi_2 + \cdots + s_{2n}\xi_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \xi'_n &= s_{n1}\xi_1 + s_{n2}\xi_2 + \cdots + s_{nn}\xi_n \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x_1 &= s_{11}x'_1 + s_{21}x'_2 + \cdots + s_{n1}x'_n \\ x_2 &= s_{12}x'_1 + s_{22}x'_2 + \cdots + s_{n2}x'_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= s_{1n}x'_1 + s_{2n}x'_2 + \cdots + s_{nn}x'_n. \end{aligned}$$

Von diesen beiden Gleichungssystemen erscheint das erste nach den neuen Variablen ξ', das zweite nach den alten Variablen x aufgelöst, und die Substitutionskoeffizienten, die in dem ersten in einer bestimmten Zeile vorkommen, nehmen in dem zweiten System die entsprechende Spalte ein. Zwei Reihen von Größen $\xi_1, \ldots \xi_n$ und $x_1, \ldots x_n$, die mit ihren transformierten durch solche Substitutionen verbunden sind, heißen einander **kontragredient**. Dagegen werden Größensysteme, die derselben Substitution unterliegen, als **kogredient** bezeichnet; es sind demnach $\eta_1, \ldots \eta_n$ kogredient zu $\xi_1, \ldots \xi_n$, wenn die Gleichungen

(18) $$\eta'_\lambda = \sum_i s_{\lambda i} \eta_i$$

gelten.

Nach der Bedeutung, die $x_1, \ldots$ in dieser Untersuchung haben, sind im besonderen die partiellen Ableitungen der Form A nach den Argumenten diesen Argumenten selbst kontragredient.

Um die Substitutionsgleichungen (1) und (16) aufzulösen, hat man die Größen σ_{ik} einzuführen, die aus den Elementen der Substitutionsdeterminante s ebenso zusammengesetzt sind wie die Größen α_{ik} aus denen der Formdeterminante a; d. h. man hat unter σ_{ik} die zu dem Element s_{ik} gehörige, durch s dividierte Unterdeterminante von s zu verstehen. Nach den Grundformeln der Determinantentheorie ist dann (vgl. S. 135 (21)):

(19)
$$\left.\begin{matrix}\sum_\lambda s_{i\lambda}\sigma_{k\lambda}\\ \sum_\lambda s_{\lambda i}\sigma_{\lambda k}\end{matrix}\right\} = \varepsilon_{ik}.$$

Die Auflösungen selbst werden

(20)
$$\xi_\lambda = \sum_i \sigma_{i\lambda}\xi'_i$$

(21)
$$x'_\lambda = \sum_i \sigma_{\lambda i} x_i.$$

Wendet man die Operation, die zu diesen Gleichungen führt, zweimal hintereinander an, so bekommt man die Auflösungen der Transformationsgleichungen (2) und (17). Es wird nämlich

$$\sum_{i,k} a_{ik}\sigma_{\nu i}\sigma_{\varrho k} = \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu}\Big(\sum_i s_{\lambda i}\sigma_{\nu i}\Big)\Big(\sum_k s_{\mu k}\sigma_{\varrho k}\Big)$$
$$= \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu}\varepsilon_{\lambda\nu}\varepsilon_{\mu\varrho} = a'_{\nu\varrho}$$

oder

(22)
$$a'_{ik} = \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}\sigma_{i\lambda}\sigma_{k\mu};$$

und ebenso

(23)
$$\alpha_{ik} = \sum_{\lambda,\mu}\alpha'_{\lambda\mu}\sigma_{\lambda i}\sigma_{\mu k}.$$

Hält man die Transformationsgleichungen (2) mit den Substitutionsgleichungen (1), die Gleichungen (17) mit der Substitution (16) zusammen, so kann man die Formenkoeffizienten a_{ik} als den Argumenten zweifach kontragredient bezeichnen, und von den Größen α_{ik} dasselbe in bezug auf die partiellen Ableitungen $\frac{\partial A}{\partial \xi_\lambda}$ aussagen. Die beiden Größenreihen a_{ik} und α_{ik} sind einander kontragredient. Ist b_{ik} der Repräsentant irgend eines Größensystems, das den Formenkoeffizienten kogredient ist, also den Gleichungen

(24)
$$b_{ik} = \sum_{\lambda,\mu} b'_{\lambda\mu} s_{\lambda i} s_{\mu k}$$

genügt, so folgt aus (23) und (24)

$$\sum_{i,k}\alpha_{ik}b_{ik} = \sum_{i,k}\Big(\sum_{\lambda,\mu}\alpha'_{\lambda\mu}\sigma_{\lambda i}\sigma_{\mu k}\Big)\Big(\sum_{\nu,\varrho} b'_{\nu\varrho}s_{\nu i}s_{\varrho k}\Big)$$
$$= \sum_{\lambda,\mu,\nu,\varrho}\alpha'_{\lambda\mu}b'_{\nu\varrho}\sum_i s_{\nu i}\sigma_{\lambda i}\sum_k s_{\varrho k}\sigma_{\mu k}$$
$$= \sum_{\lambda,\mu,\nu,\varrho}\alpha'_{\lambda\mu}b'_{\nu\varrho}\varepsilon_{\nu\lambda}\varepsilon_{\varrho\mu},$$

(25)
$$\sum_{i,k}\alpha_{ik}b_{ik} = \sum_{\lambda,\mu}\alpha'_{\lambda\mu}b'_{\lambda\mu}.$$

Diese Gleichung bildet für zweifach kontragrediente Systeme die Verallgemeinerung der folgenden zwischen einfach kontragredienten Größen:

(26) $$\sum_i x_i \xi_i = \sum_\lambda x'_\lambda \xi'_\lambda,$$

die allein an das Bestehen der Substitutionen (1) und (16) (oder (21)), aber nicht an die Bedeutung der Variablen gebunden ist.

Weitere Verallgemeinerungen dieser Definitionen und Formeln liegen auf der Hand, werden aber an dieser Stelle nicht gebraucht.

Nachdem die Gleichungen (17) einmal auf irgend einem Wege bewiesen sind, gelten über weitergehende Folgerungen aus ihnen entsprechende Schlüsse wie auf S. 149. Namentlich besteht, wenn jetzt $x_1, \ldots$ und $y_1, \ldots$ irgend zwei, den Größen $\xi_1, \ldots$ kontragrediente, also einander kogrediente Systeme bedeuten, die aus (23) in Verbindung mit

$$x_i = \sum_\nu s_{\nu i} x'_\nu$$

und

$$y_k = \sum_\varrho s_{\varrho k} y'_\varrho$$

folgende Gleichung

(27) $$\sum_{i,k} \alpha_{ik} x_i y_k = \sum_{\lambda,\mu} \alpha'_{\lambda\mu} x'_\lambda y'_\mu.$$

Sie kann als Spezialfall von (25) betrachtet werden, insofern das Produkt $x_i y_k$ vom Typus b_{ik} ist.

Solche kontragredienten Größen liefert nun die Hinzunahme einer linearen Form

$$\mathfrak{M}_0 \equiv \sum_i m_i \xi_i,$$

die mittels der Substitution (1) transformiert wird. Die Gleichung

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}'_0,$$

$$\sum_i m_i \xi_i = \sum_\lambda m'_\lambda \xi'_\lambda = \sum_{\lambda,i} m'_\lambda s_{\lambda i} \xi_i$$

enthält nämlich die Beziehungen

(28) $$m_i = \sum_\lambda m'_\lambda s_{\lambda i}$$

zwischen den ursprünglichen und den transformierten Koeffizienten. Demnach folgt aus (27)

(29) $$\sum_{i,k} \alpha_{ik} m_i m_k = \sum_{\lambda,\mu} \alpha'_{\lambda\mu} m'_\lambda m'_\mu,$$

und allgemeiner, wenn noch eine zweite lineare Form

$$\mathfrak{N}_0 \equiv \sum_i n_i \xi_i$$

eingeführt wird:

(30)
$$\sum_{i,k} \alpha_{ik} m_i n_k = \sum_{\lambda,\mu} \alpha'_{\lambda\mu} m'_\lambda n'_\mu .$$

In der Theorie der binären Differentialformen, wo alle Koeffizienten Funktionen zweier Variablen u, v sind, stellen die linken Seiten von (29) und (30) die Verallgemeinerungen des Differentialparameters erster Ordnung und des Zwischenparameters dar. In den Bezeichnungen der Flächentheorie haben sie die Ausdrücke

$$\frac{1}{T^2}(Gm_1^2 - 2Fm_1m_2 + Em_2^2),$$

$$\frac{1}{T^2}(Gm_1n_1 - F(m_1n_2 + m_2n_1) + Em_2n_2).$$

Die Gleichungen selbst kennzeichnen diese Größen als simultane Invarianten des Formensystems $(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0, \mathfrak{N}_0)$.

Kehrt man nun endlich zu einer oder mehreren willkürlichen Funktionen der Veränderlichen u, v zurück, so hat man aus den Gleichungen

$$\varphi(u, v) = \bar{\varphi}(u', v'), \qquad \psi(u, v) = \bar{\psi}(u', v')$$

oder

$$\varphi(u_1, \ldots u_n) = \bar{\varphi}(u'_1, \ldots u'_n), \qquad \psi(u_1, \ldots u_n) = \bar{\psi}(u'_1, \ldots u'_n)$$

abzuleiten:

(31)
$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_\lambda} = \sum_i \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u'_i} \frac{\partial u'_i}{\partial u_\lambda}, \ldots ,$$

d. h., wenn

(32)
$$\frac{\partial u'_i}{\partial u_\lambda} = s_{i\lambda}$$

gesetzt wird:

(33)
$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_\lambda} = \sum_i s_{i\lambda} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u'_i}, \ldots .$$

Vermöge der Transformation

$$u'_\lambda = u'_\lambda(u_1, \ldots)$$

wird

$$du'_\lambda = \sum_i \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} du_i$$

oder

(34)
$$du'_\lambda = \sum_i s_{\lambda i} du_i .$$

Mit (33) verglichen lehren diese Gleichungen, daß die partiellen Ableitungen einer willkürlichen Funktion den Differentialen ihrer Argumente kontragredient sind. Versteht man nun unter der quadratischen

Form A eine Differentialform, d. h. setzt man $\xi_i = du_i$, so werden die Gleichungen (1) mit (34) identisch, und man kann sagen, daß die Ableitungen von φ den Größen ξ kontragredient sind. Aus diesem Grunde gelten alle obigen Ergebnisse der Formentheorie, wenn x_i oder m_i gleich $\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}$, y_k oder n_k gleich $\frac{\partial \psi}{\partial u_k}$ angenommen wird, und die Gleichung (27) oder (30) liefert

$$\sum_{i,k} \alpha_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial \psi}{\partial u_k} = \sum_{\lambda,\mu} \alpha'_{\lambda\mu} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u'_\lambda} \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial u'_\mu}. \tag{35}$$

Die Kovarianz des Zwischenparameters ist hierdurch, soweit es der Natur der Sache nach tunlich ist, auf formentheoretischem Wege bewiesen. Der Ausdruck erscheint als simultane Invariante des Formensystems A, $d\varphi$ und $d\psi$. Er wird als Kovariante bezeichnet, weil er tatsächlich noch von den Variablen u abhängt, die in der rein algebraischen Formentheorie nicht vorkommen.

§ 45.

System zweier quadratischen Formen. Anwendungen auf die Theorie der Hauptkrümmungen und der Differentialparameter.

Am einfachsten und einheitlichsten gestaltet sich der Nachweis der Invarianz des Zwischenparameters und der mit ihm zusammenhängenden Größen, wenn man ihn an die Theorie eines Paares quadratischer Formen knüpft, die schon in der elementaren analytischen Geometrie die Grundlage wichtiger Untersuchungen bildet.

Die Determinante der Form

$$\sum_{i,k} a_{ik} \xi_i \xi_k \equiv \mathsf{A}$$

war für eine homogene lineare Substitution

$$\xi'_\lambda = \sum_i s_{\lambda i} \xi_i$$

eine algebraische Invariante (S. 152). Wird nun gleichzeitig mit A eine zweite quadratische Form

$$\sum_{i,k} b_{ik} \xi_i \xi_k \equiv \mathsf{B} \qquad (b_{ki} = b_{ik})$$

transformiert, d. h. besteht vermöge derselben Substitution die Gleichung

$$\mathsf{B} = \mathsf{B}',$$

so ist auch

$$\mathsf{A} + \mu \mathsf{B} = \mathsf{A}' + \mu \mathsf{B}',$$

wo μ eine willkürliche, von den sonst vorkommenden unabhängige Größe bedeutet, und die Determinante der Form $\mathsf{A} + \mu \mathsf{B}$ genügt der Gleichung

$$|a_{ik} + \mu b_{ik}| = |a'_{ik} + \mu b'_{ik}|\, s^2.$$

Durch Entwickelung nach Potenzen von μ und Koeffizienten-Vergleichung ergibt sich für beliebiges μ eine Reihe simultaner Invarianten, die aus den Unterdeterminanten der verschiedenen Ordnungen von a und b in bestimmter Weise zusammengesetzt sind. Durch Division mit

$$a = a' s^2$$

kann man von vornherein absolute Invarianten entstehen lassen. Für den uns interessierenden Fall $n = 2$ ergibt sich dann

$$\frac{1}{a}\begin{vmatrix} a_{11} + \mu b_{11}, & a_{12} + \mu b_{12} \\ a_{21} + \mu b_{21}, & a_{22} + \mu b_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{a'}\begin{vmatrix} a'_{11} + \mu b'_{11}, & a'_{12} + \mu b'_{12} \\ a'_{21} + \mu b'_{21}, & a'_{22} + \mu b'_{22} \end{vmatrix},$$

und die Koeffizienten von μ^2 und μ liefern die Gleichungen

(1) $$\frac{b}{a} = \frac{b'}{a'}$$

(2) $$\frac{a_{22} b_{11} - 2 a_{12} b_{12} + a_{11} b_{22}}{a} = \frac{a'_{22} b'_{11} - 2 a'_{12} b'_{12} + a'_{11} b'_{22}}{a'}.$$

Um die erste von ihnen hinzuschreiben, also den Quotienten der beiden Determinanten von B und A als absolute Invariante zu kennzeichnen, hätte es selbstverständlich der Einführung von μ nicht bedurft. Der Zähler der linken Seite von (2), der für sich allein der Gleichung

$$a_{22} b_{11} - 2 a_{12} b_{12} + a_{11} b_{22} = (a'_{22} b'_{11} - 2 a'_{12} b'_{12} + a'_{11} b'_{22})\, s^2$$

genügt, heißt die bilineare simultane (algebraische) Invariante des Formenpaares (A, B). Die linke Seite selbst kann geschrieben werden:

$$\alpha_{11} b_{11} + 2 \alpha_{12} b_{12} + \alpha_{22} b_{22} \equiv \sum_{i,k} \alpha_{ik} b_{ik},$$

und es werde

(3) $$\sum_{i,k} \alpha_{ik} b_{ik} = H_a(\mathsf{A}, \mathsf{B})$$

gesetzt. Der Index a soll andeuten, daß bei der Überführung der bilinearen algebraischen Invariante in eine absolute durch die Determinante a, nicht, wie es doch auch statthaft wäre, durch b dividiert wird.

Die Invariante $H_a(\mathsf{A}, \mathsf{B})$ ist von einem anderen Gesichtspunkt aus im vorigen Paragraphen bereits eingeführt worden (Gl. (25)). Sie ist für die Anwendungen auf die Flächentheorie von grundlegender Wich-

tigkeit. Man kann sie z. B. dazu benutzen, sich von der Bedeutung eines bestimmten Ausdrucks in der Theorie der Hauptkrümmungen Rechenschaft zu geben.

Außer der Form

$$E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2 \equiv ds^2$$

kennt man nämlich von vornherein noch eine zweite,

$$L du^2 + 2M du\,dv + N dv^2 \equiv \frac{ds^2}{\varrho},$$

deren Koeffizienten, die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung, denselben Transformationsgleichungen (S. 39 (8)) genügen wie die Fundamentalgrößen erster Ordnung E, F, G:

$$(4)\qquad \begin{aligned} L &= L'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + 2M'\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u} + N'\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2 \\ M &= L'\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + M'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v}\right) + N'\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} \\ N &= L'\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + 2M'\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial v} + N'\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen folgen mit einem Schlage aus der Bemerkung, daß der Wert der Differentialform $L du^2 + 2M du\,dv + N dv^2$ allein von dem Linienelement ds und der zugehörigen Normalkrümmung $\frac{1}{\varrho}$, aber nicht von dem Koordinatennetze abhängt, daß also für beliebige Werte von du und dv die Beziehung

$$L du^2 + 2M du\,dv + N dv^2 = L' du'^2 + 2M' du'dv' + N' dv'^2$$

gelten muß, in der L', M', N' aus $\bar{x}(u', v'), \ldots$ ebenso gebildet sind wie L, M, N aus $x(u, v), \ldots$.

Übrigens ist es leicht, die Gleichungen (4) durch direkte Rechnung zu prüfen. Dazu würde man zunächst aus den Definitionsausdrücken für X, Y, Z (S. 49 (8)) die geometrisch evidenten Formeln

$$(5)\qquad X = X', \qquad Y = Y', \qquad Z = Z'$$

ableiten. Ferner ist z. B.

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u'^2}\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u'\partial v'}\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u} + \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v'^2}\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial \bar{x}}{\partial u'}\frac{\partial^2 u'}{\partial u^2} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial v'}\frac{\partial^2 v'}{\partial u^2}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit X, die beiden entsprechenden für $\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ mit Y und Z und addiert, sodaß links L, rechts vermöge (5)

$$\sum X'\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u'^2} \equiv L', \ldots$$

auftreten, so fallen die Ableitungen zweiter Ordnung $\frac{\partial^2 u'}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 v'}{\partial u^2}$ wegen der Identitäten

$$\sum X' \frac{\partial \bar{x}}{\partial u'} = 0, \qquad \sum X' \frac{\partial \bar{x}}{\partial v'} = 0$$

heraus, und es entsteht die erste Transformationsgleichung (4).

Den Gleichungen (1) und (2) zufolge sind hiernach die Größen

$$\frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad \text{und} \quad \frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2}$$

Invarianten für jede Transformation der krummlinigen Koordinaten. Auch dies ist vom geometrischen Standpunkt aus unmittelbar einleuchtend. Denn von den beiden Verbindungen aus den Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung stellt die erste das Produkt, die zweite die Summe der beiden Hauptkrümmungen dar (S. 77 (18, 19, 20)). Sie sind vom Koordinatensystem unabhängig. Bezieht man also die Fläche auf ein zweites Koordinatennetz, so müssen sie aus den neuen Fundamentalgrößen ebenso zusammengesetzt sein wie aus den alten, d. h. es müssen die Gleichungen

$$(6) \qquad \begin{aligned} K &\equiv \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{L'N' - M'^2}{E'G' - F'^2} \\ H &\equiv \frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2} = \frac{G'L' - 2F'M' + E'N'}{E'G' - F'^2} \end{aligned}$$

bestehen.

Freilich läßt sich aus diesen Ergebnissen nicht etwa schließen, daß H und K Biegungsinvarianten seien. Denn von der Transformation der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung ist in der Abwicklungstheorie garnicht die Rede. Wenn K dennoch bei der Biegung der Fläche ungeändert bleibt (§ 37), so rührt dies daher, daß die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung aus dem Ausdruck von K entfernt werden können (§ 36).

Als quadratische Form, die gleichzeitig mit A transformiert wird, kann auch das Produkt zweier linearen Formen oder das Quadrat einer solchen Form betrachtet werden. Für

$$\mathsf{B} = \mathfrak{M}_0 \mathfrak{N}_0 \equiv (m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2)(n_1 \xi_1 + n_2 \xi_2)$$

geben die beiden Gleichungen (1) und (2), die erste nach Weglassung eines Zahlenfaktors,

$$(7) \qquad \frac{(m_1 n_2 - m_2 n_1)^2}{a_{11} a_{22} - a_{12}^2} = \frac{(m_1' n_2' - m_2' n_1')^2}{a_{11}' a_{22}' - a_{12}'^2}$$

$$(8)\qquad \frac{a_{22}m_1n_1 - a_{12}(m_1n_2 + m_2n_1) + a_{11}m_2n_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \frac{a'_{22}m'_1n'_1 - a'_{12}(m'_1n'_2 + m'_2n'_1) + a'_{11}m'_2n'_2}{a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12}}.$$

Unter der Annahme

$$\mathsf{B} = \mathfrak{M}_0^2$$

liefert (1) kein Ergebnis, weil die Determinante b dann identisch verschwindet; die Gleichung (2) heißt

$$(9)\qquad \frac{a_{22}m_1^2 - 2a_{12}m_1m_2 + a_{11}m_2^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \frac{a'_{22}m'^2_1 - 2a'_{12}m'_1m'_2 + a'_{11}m'^2_2}{a'_{11}a'_{22} - a'^2_{12}}.$$

Die linken Seiten von (9) und (8) lassen sich nach (3) in der Form

$$H_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0^2) \quad \text{und} \quad H_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0\mathfrak{N}_0)$$

schreiben. Für $a_{11} = E$, $a_{12} = F$, $a_{22} = G$ gehen sie in die auf S. 158 angegebenen Invarianten über, und speziell für

$$\mathfrak{M}_0 = d\varphi, \qquad \mathfrak{N}_0 = d\psi$$

in den Differentialparameter erster Ordnung von φ und den Zwischenparameter von φ und ψ. Man kann also setzen:

$$(10)\qquad \Delta_a^1\varphi = H_a(\mathsf{A}, d\varphi^2)$$

$$(11)\qquad \Delta_a(\varphi, \psi) = H_a(\mathsf{A}, d\varphi\,.\,d\psi).$$

§ 46.

Die Christoffelschen Formeln.

Auf welche Weise man sich auch von der Invarianz des Differentialparameters erster Ordnung überzeugen möge, so hat man doch die Gleichung

$$(1)\qquad \Delta_a^1\varphi = \Delta_{a'}^1\overline{\varphi}$$

unter allen Umständen als Resultat einer Elimination aufzufassen. Sie muß nämlich aus den drei Transformationsgleichungen für die Formenkoeffizienten,

$$(2)\qquad a_{ik} = \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu}\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k},$$

und denen für die beiden partiellen Ableitungen der Funktion φ,

$$(3)\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial u_i} = \sum_\lambda \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u'_\lambda}\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i},$$

durch Wegschaffung der vier Ableitungen der neuen Variablen nach den alten,

$$\frac{\partial u_1'}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial u_1'}{\partial u_2}, \quad \frac{\partial u_2'}{\partial u_1}, \quad \frac{\partial u_2'}{\partial u_2}$$

hervorgehen. Dasselbe gilt für die Gleichung

(4) $$\Delta_a(\varphi, \psi) = \Delta_{a'}(\bar{\varphi}, \psi)$$

unter Hinzunahme der beiden Transformationsformeln

(5) $$\frac{\partial \psi}{\partial u_i} = \sum_\lambda \frac{\partial \psi}{\partial u_\lambda'} \frac{\partial u_\lambda'}{\partial u_i}.$$

Das vollständige System von 7—4 Resultanten wird dann durch die Invarianzen (1), (4) und

(6) $$\Delta_a^1 \psi = \Delta_{a'}^1 \bar{\psi}$$

dargestellt, von denen eine, wenn

(7) $$\frac{1}{T} \frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(u, v)} = D_a(\varphi, \psi)$$

gesetzt wird (vgl. S. 44 (6)), auch durch

(8) $$D_a(\varphi, \psi) = D_{a'}(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$$

vertreten werden kann. Die vier in (1), (4), (6) und (8) vorkommenden Invarianten des Formensystems (A, $d\varphi$, $d\psi$) genügen der Identität

(9) $$\Delta_a^1 \varphi \,.\, \Delta_a^1 \psi - \Delta_a(\varphi, \psi)^2 = D_a(\varphi, \psi)^2$$
(S. 44 (9)).

Wenn man nun Invarianten höherer Ordnung herstellen will, also zunächst Biegungskovarianten einer einzigen Funktion, die auch deren zweite Ableitungen enthalten, so hat man, die Existenz solcher Verbindungen vorausgesetzt, darauf auszugehen, außer den vier genannten partiellen Differentialquotienten erster Ordnung auch die sechs Ableitungen

$$\frac{\partial^2 u_1'}{\partial u_1^2}, \quad \frac{\partial^2 u_1'}{\partial u_1 \partial u_2}, \quad \frac{\partial^2 u_1'}{\partial u_2^2}, \quad \frac{\partial^2 u_2'}{\partial u_1^2}, \quad \frac{\partial^2 u_2'}{\partial u_1 \partial u_2}, \quad \frac{\partial^2 u_2'}{\partial u_2^2}$$

aus den Transformationsgleichungen (2, 3) und ihren Derivierten zu eliminieren. Die Anzahl dieser Ableitungen, im allgemeinen Falle gleich $\frac{n^2(n+1)}{2}$, stimmt mit der Anzahl der durch je einmalige Differentiation nach $u_1, \ldots u_n$ aus (2) hervorgehenden Gleichungen überein, und zwar sind diese in den zweiten Ableitungen linear und nicht homogen. Man wird also, falls nicht etwa eine bestimmte Determinante verschwindet, die neu hinzutretenden Differentialquotienten durch folgende Größen eindeutig darstellen können: die Differentialquotienten der ersten Ordnung, die Ableitungen der Formenkoeffizienten a_{ik} nach den Variablen u_l und die der Größen $a_{\lambda\mu}'$ nach den

neuen Veränderlichen u'_ν. Dies wird durch ein von Christoffel aufgestelltes Formelsystem geleistet, nach dessen Herleitung man die Elimination der zweiten Ableitungen durch einfache Substitution in die Derivierten der Gleichungen (3) vollziehen kann.

Die Differentiation der Gleichungen (2) liefert

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l} = \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial^2 u'_\mu}{\partial u_k \partial u_l} + \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k} \frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i \partial u_l} + \sum_{\lambda,\mu,\nu} \frac{\partial a'_{\lambda\mu}}{\partial u'_\nu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k} \frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l}$$

oder, wenn in der ersten Summe die Zeichen λ und μ vertauscht und die Gleichungen

$$a'_{\mu\lambda} = a'_{\lambda\mu} \tag{10}$$

benutzt werden,

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l} = \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_i} \frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_k \partial u_l} + \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k} \frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i \partial u_l} + \sum_{\lambda,\mu,\nu} \frac{\partial a'_{\lambda\mu}}{\partial u'_\nu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k} \frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l}. \tag{11}$$

Nachdem durch diese einfache Umformung erreicht ist, daß die Größen u', auf die sich die zweimalige Differentiation bezieht, nur mit einem und demselben Index λ behaftet vorkommen, erscheint es weiter wünschenswert, eine der beiden vorkommenden Doppelsummen zu isolieren. Da

$$\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i \partial u_l} = \frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_l \partial u_i}, \qquad \frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_k \partial u_l} = \frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_l \partial u_k}$$

ist, so wird man der Formel (11) die beiden an die Seite stellen, die durch Vertauschung von i mit l und von k mit l aus ihr hervorgehen, nämlich

$$\frac{\partial a_{lk}}{\partial u_i} = \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_l} \frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_k \partial u_i} + \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k} \frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_l \partial u_i} + \sum_{\lambda,\mu,\nu} \frac{\partial a'_{\lambda\mu}}{\partial u'_\nu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_l} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k} \frac{\partial u'_\nu}{\partial u_i} \tag{12}$$

$$\frac{\partial a_{il}}{\partial u_k} = \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_i} \frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_l \partial u_k} + \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_l} \frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i \partial u_k} + \sum_{\lambda,\mu,\nu} \frac{\partial a'_{\lambda\mu}}{\partial u'_\nu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_l} \frac{\partial u'_\nu}{\partial u_k}. \tag{13}$$

Addiert man jetzt (12) und (13) und subtrahiert (11), so fallen zwei der Doppelsummen weg, und es bleibt

$$\frac{\partial a_{kl}}{\partial u_i} + \frac{\partial a_{il}}{\partial u_k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l} = 2 \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_l} \frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i \partial u_k} + \sum_{\lambda,\mu,\nu} \frac{\partial a'_{\lambda\mu}}{\partial u'_\nu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_l} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k} \frac{\partial u'_\nu}{\partial u_i}$$
$$+ \sum_{\lambda,\mu,\nu} \frac{\partial a'_{\lambda\mu}}{\partial u'_\nu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_l} \frac{\partial u'_\nu}{\partial u_k} - \sum_{\lambda,\mu,\nu} \frac{\partial a'_{\lambda\mu}}{\partial u'_\nu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k} \frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l}.$$

Von den drei dreifachen Summen kann die erste durch Vertauschung von λ mit ν, die zweite durch Vertauschung von μ mit ν so umge-

formt werden, daß die Ableitungen der neuen Variablen nach den alten in ihnen in derselben Verbindung vorkommen wie in der dritten, nämlich

$$\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l} \quad \text{oder} \quad s_{\lambda i}s_{\mu k}s_{\nu l}.$$

Die letzte Gleichung wird dann

$$\frac{\partial a_{kl}}{\partial u_i}+\frac{\partial a_{il}}{\partial u_k}-\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l}=2\sum_{\lambda,\mu}a'_{\lambda\mu}s_{\mu l}\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i \partial u_k}$$
$$+\sum_{\lambda,\mu,\nu}\left(\frac{\partial a'_{\mu\nu}}{\partial u'_\lambda}+\frac{\partial a'_{\lambda\nu}}{\partial u'_\mu}-\frac{\partial a'_{\lambda\mu}}{\partial u'_\nu}\right)s_{\lambda i}s_{\mu k}s_{\nu l}$$

oder wenn, wie schon im § 40,

$$(14)\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kl}}{\partial u_i}+\frac{\partial a_{il}}{\partial u_k}-\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l}\right)=\begin{bmatrix} i\ k \\ l\end{bmatrix}$$

gesetzt und die aus den Koeffizienten von A′ entsprechend gebildete Größe durch Hinzufügung eines Akzents gekennzeichnet wird,

$$(15)\qquad \begin{bmatrix} i\ k \\ l\end{bmatrix}=\sum_{\lambda,\mu}a'_{\lambda\mu}s_{\mu l}\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i \partial u_k}+\sum_{\lambda,\mu,\nu}\begin{bmatrix} \lambda\ \mu \\ \nu\end{bmatrix}' s_{\lambda i}s_{\mu k}s_{\nu l}.$$

Die gesuchten Ausdrücke der zweiten partiellen Ableitungen ergeben sich nunmehr einzeln mittels der Grundformeln der Determinantentheorie, die hier für die Determinanten a, a' und s noch einmal zusammengestellt werden mögen:

$$(16)\qquad \sum_i a_{ik}\alpha_{il}=\begin{cases}1, & k=l\\ 0, & k\gtrless l\end{cases}$$

$$(17)\qquad \sum_\nu a'_{\lambda\nu}\alpha'_{\mu\nu}=\begin{cases}1, & \lambda=\mu\\ 0, & \lambda\gtrless\mu\end{cases}$$

$$(18)\qquad \sum_i s_{ik}\sigma_{il}=\begin{cases}1, & k=l\\ 0, & k\gtrless l\end{cases}$$

$$(19)\qquad \sum_l s_{il}\sigma_{kl}=\begin{cases}1, & i=k\\ 0, & i\gtrless k.\end{cases}$$

Multipliziert man die Gleichung (15) zunächst mit $\sigma_{\varrho l}$ und summiert über l, so erhält man unter Benutzung von (19) aus dem ersten Gliede der rechten Seite

$$\sum_{\lambda,\mu}a'_{\lambda\mu}\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i \partial u_k}\sum_l s_{\mu l}\sigma_{\varrho l}=\sum_\lambda a'_{\lambda\varrho}\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i \partial u_k},$$

und hieraus durch Multiplikation mit $\alpha'_{h\varrho}$ und Summation über ϱ (nach (17))

$$\sum_{\lambda} \frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i \partial u_k} \sum_{\varrho} \alpha'_{\lambda\varrho} \alpha'_{h\varrho} = \frac{\partial^2 u'_h}{\partial u_i \partial u_k}.$$

Die beiden Operationen zusammen, also die Multiplikation mit $\alpha'_{h\varrho}\sigma_{\varrho l}$ und Summation über l und ϱ, lassen aus dem zweiten Gliede der rechten Seite den Ausdruck

$$\sum_{\lambda,\mu,\nu,\varrho} \begin{bmatrix} \lambda\ \mu \\ \nu \end{bmatrix}' s_{\lambda i} s_{\mu k} \alpha'_{h\varrho} \sum_{l} s_{\nu l} \sigma_{\varrho l} \equiv \sum_{\lambda,\mu,\nu} \alpha'_{h\nu} \begin{bmatrix} \lambda\ \mu \\ \nu \end{bmatrix}' s_{\lambda i} s_{\mu k}$$

hervorgehen.

Die linke Seite der Gleichung (15) liefert

$$\sum_{\varrho,l} \alpha'_{h\varrho} \sigma_{\varrho l} \begin{bmatrix} i\ k \\ l \end{bmatrix}.$$

Diese Summe enthält in den Verbindungen $\begin{bmatrix} i\ k \\ l \end{bmatrix}$ die Koeffizienten von A, dagegen in den Größen $\alpha'_{h\varrho}$ die Koeffizienten der transformierten Differentialform A′. Mittels der im § 44 bewiesenen Relationen

(20) $$\alpha_{ik} = \sum_{\lambda,\mu} \alpha'_{\lambda\mu} \sigma_{\lambda i} \sigma_{\mu k}$$

(S. 156 (23)) kann sie jedoch so umgeformt werden, daß sie, außer von den Substitutionskoeffizienten s_{ik}, nur von der ersten Reihe von Koeffizienten abhängt. Es wird nämlich

$$\sum_{i} \alpha_{ik} s_{hi} = \sum_{\lambda,\mu} \alpha'_{\lambda\mu} \sigma_{\mu k} \sum_{i} s_{hi} \sigma_{\lambda i},$$

d. h.

(21) $$\sum_{i} \alpha_{ik} s_{hi} = \sum_{\mu} \alpha'_{h\mu} \sigma_{\mu k},$$

also

$$\sum_{\varrho,l} \alpha'_{h\varrho} \sigma_{\varrho l} \begin{bmatrix} i\ k \\ l \end{bmatrix} \equiv \sum_{\nu} \begin{bmatrix} i\ k \\ \nu \end{bmatrix} \sum_{\mu} \alpha'_{h\mu} \sigma_{\mu\nu} = \sum_{\nu} \begin{bmatrix} i\ k \\ \nu \end{bmatrix} \sum_{l} \alpha_{l\nu} s_{hl}$$
$$= \sum_{l} s_{hl} \sum_{\nu} \alpha_{l\nu} \begin{bmatrix} i\ k \\ \nu \end{bmatrix}.$$

Die innere Summe auf der rechten Seite ist ebenfalls schon im § 40 abgekürzt bezeichnet worden:

(22) $$\sum_{\nu} \alpha_{l\nu} \begin{bmatrix} i\ k \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} i\ k \\ l \end{Bmatrix}.$$

Wird die entsprechende Bezeichnung auch für die transformierte Form angewendet, so kann man schreiben

$$\frac{\partial^2 u'_h}{\partial u_i \partial u_k} + \sum_{\lambda,\mu} \begin{Bmatrix} \lambda & \mu \\ & h \end{Bmatrix}' s_{\lambda i} s_{\mu k} = \sum_{\nu} \begin{Bmatrix} i & k \\ & \nu \end{Bmatrix} s_{h\nu},$$

oder bei veränderter Anordnung der Glieder und wenn zugleich die Substitutionskoeffizienten s_{ik} durch ihre Werte ersetzt werden,

$$(23) \qquad \frac{\partial^2 u'_h}{\partial u_i \partial u_k} - \sum_{\nu} \begin{Bmatrix} i & k \\ & \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial u'_h}{\partial u_\nu} = - \sum_{\lambda,\mu} \begin{Bmatrix} \lambda & \mu \\ & h \end{Bmatrix}' \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}.$$

Dies sind die Christoffelschen Formeln.

Die Einführung der Christoffelschen Größen erster und zweiter Art $\begin{bmatrix} i & k \\ & l \end{bmatrix}$ und $\begin{Bmatrix} i & k \\ & l \end{Bmatrix}$ ist im § 40 durch bestimmte Operationen veranlaßt worden, die sich auf die Gleichungen

$$a_{ik} = \sum \frac{\partial x}{\partial u_i} \frac{\partial x}{\partial u_k}$$

stützten. Hier dagegen zeigt sich die rein formentheoretische, von der Differentialgeometrie unabhängige Bedeutung dieser Verbindungen aus den Formenkoeffizienten und ihren ersten Ableitungen. Gebraucht werden fast ausschließlich die Ausdrücke zweiter Art. Wo also von Christoffelschen Verbindungen ohne weiteren Zusatz die Rede ist, sollen immer die Größen $\begin{Bmatrix} i & k \\ & l \end{Bmatrix}$ darunter verstanden werden (S. 137). Die Darstellung der Größen erster Art aus den Gleichungen (22) ergibt

$$(24) \qquad \begin{bmatrix} i & k \\ & l \end{bmatrix} = \sum_{\nu} a_{l\nu} \begin{Bmatrix} i & k \\ & \nu \end{Bmatrix}.$$

§ 47.

Die Christoffelsche Kovarianz.
Anwendung auf die Theorie der Tangentialkrümmung.

Nun bleibt also übrig, die Werte der zweiten Ableitungen der neuen Variablen nach den alten aus den Christoffelschen Formeln in die Beziehungen zwischen den zweiten partiellen Differentialquotienten der Funktionen φ und $\overline{\varphi}$ einzusetzen. Diese Gleichungen, aus

$$(1) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \sum_{h} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u'_h} \frac{\partial u'_h}{\partial u_i}$$

abgeleitet, lauten

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_k} = \sum_{h} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u'_h} \frac{\partial^2 u'_h}{\partial u \, \partial u_k} + \sum_{\lambda,\mu} \frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial u'_\lambda \partial u'_\mu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}.$$

Nach Hinzuziehung der Christoffelschen Formeln geben sie

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_k} = \sum_{h,\nu} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u'_h} \begin{Bmatrix} i\ k \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial u'_h}{\partial u_\nu} - \sum_{h,\lambda,\mu} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u'_h} \begin{Bmatrix} \lambda\ \mu \\ h \end{Bmatrix}' \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}$$

$$+ \sum_{\lambda,\mu} \frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial u'_\lambda \partial u'_\mu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u'_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}.$$

Vereinigt man die zweite und dritte Summe und wandelt die erste mit Hilfe von (1) um, so erhält man

(3) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_k} - \sum_{\nu} \begin{Bmatrix} i\ k \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\nu} = \sum_{\lambda,\mu} \left(\frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial u'_\lambda \partial u'_\mu} - \sum_{h} \begin{Bmatrix} \lambda\ \mu \\ h \end{Bmatrix}' \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u'_h} \right) \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}.$$

Wird jetzt (vgl. S. 129)

(4) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_k} - \sum_{\nu} \begin{Bmatrix} i\ k \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\nu} = \varphi_{ik}$$

und entsprechend

$$\frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial u'_\lambda \partial u'_\mu} - \sum_{h} \begin{Bmatrix} \lambda\ \mu \\ h \end{Bmatrix}' \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u'_h} = \varphi'_{\lambda\mu}$$

gesetzt, so heißen die Gleichungen (3):

(5) $$\varphi_{ik} = \sum_{\lambda,\mu} \varphi'_{\lambda\mu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}$$

oder

(6) $$\varphi_{ik} = \sum_{\lambda,\mu} \varphi'_{\lambda\mu} s_{\lambda i} s_{\mu k}.$$

Nach der Definitionsgleichung für die Größen $\begin{bmatrix} i\ k \\ l \end{bmatrix}$ (S. 166) und infolge von $a_{ki} = a_{ik}$ ist

(7) $$\begin{bmatrix} k\ i \\ l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\ k \\ l \end{bmatrix},$$

demnach auch

(8) $$\begin{Bmatrix} k\ i \\ l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} i\ k \\ l \end{Bmatrix}$$

und

(9) $$\varphi_{ki} = \varphi_{ik}.$$

Die Beziehungen (5) oder (6), deren Anzahl somit gleich 3 ist, sind die Transformationsgleichungen für die Koeffizienten einer quadratischen Differentialform

(10) $$\varphi_{11} du^2 + 2\varphi_{12} du\, dv + \varphi_{22} dv^2 \equiv \Phi,$$

d. h. sie ziehen die Gleichung

$$\sum_{i,k} \varphi_{ik} du_i du_k = \sum_{\lambda,\mu} \varphi'_{\lambda\mu} du'_\lambda du'_\mu$$

oder

(11) $$\Phi = \Phi'$$

nach sich und folgen aus ihr wieder. Die Differentialform Φ soll als **Christoffelsche Kovariante**, und zwar des Formenpaares (A, $d\varphi$) oder, wo kein Mißverständnis vorkommen kann, der Funktion $\varphi(u, v)$ bezeichnet werden.

Für $\varphi = u'$ und $\varphi = v'$ gehen die Relationen (5) rückwärts in die Christoffelschen Formeln über.

Die Überlegungen nun, die im Anschluß an die Transformation von A in den Paragraphen 43 und 44 angestellt worden sind, gelten selbstverständlich auch für die Form Φ. Namentlich aber gestattet die Existenz dieser quadratischen Differentialform, die gleichzeitig mit der gegebenen transformiert wird, die Ergebnisse der Elimination aller 4 + 6 Ableitungen erster und zweiter Ordnung der neuen Variablen nach den alten aus den 3 + 3 + 2 + 6 Gleichungen (2) und § 46 (2), (3), (11) in invarianter Form hinzuschreiben. Nachdem die letztgenannten sechs Gleichungen zur Berechnung der zweiten Ableitungen und Überführung von (2) in (5) verwendet worden sind, werden die Resultanten mit denen der Elimination der ersten Ableitungen aus (5) und § 46 (2), (3) identisch. Sie erscheinen als Invarianzen, wenn man die Koeffizienten der beiden quadratischen Formen A und $d\varphi^2$ in der im § 45 beschriebenen Weise unter sich und mit denen von Φ zusammenstellt.

Um uns nicht in Einzelheiten der Formentheorie zu verlieren, möge es hier genügen, eine einzige der neu hinzutretenden Verbindungen aus den Formenkoeffizienten und den Ableitungen der Funktion φ anzugeben. Die bilineare algebraische Invariante von Φ und $d\varphi^2$ (S. 160) hat den Ausdruck

$$\varphi_{11}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2\varphi_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \varphi_{22}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2.$$

Sie ändert sich bei einer beliebigen Transformation der Variablen um das Quadrat der Substitutionsdeterminante. Anstatt nun mit der Determinante von Φ zu dividieren, also bei den Formen Φ und $d\varphi^2$ stehen zu bleiben, kann man den Ausdruck auch durch Division mit der Determinante von A in eine absolute Invariante verwandeln. In Verallgemeinerung der Definitionsgleichung § 45 (3) werde

$$(12)\qquad \frac{\varphi_{11}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2\varphi_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \varphi_{22}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = H_a(\Phi, d\varphi^2)$$

gesetzt. Dann gilt die Invarianz

$$(13)\qquad H_a(\Phi, d\varphi^2) = H_{a'}(\Phi'\ d\overline{\varphi}^2).$$

Der Ausdruck (12) kommt für

$$a_{11} = E, \qquad a_{12} = F, \qquad a_{22} = G$$

in der Gleichung vor, die die formentheoretischen Untersuchungen der letzten Paragraphen veranlaßt hat, nämlich der Formel § 39 (11) (S. 129) für die Tangentialkrümmung. Daß $H_a(\Phi, d\varphi^2)$ und $\Delta_a^1 \varphi$ bei einer bebeliebigen Transformation der Koordinaten ungeändert bleiben, läßt dasselbe für die Größe g, oder wie jetzt der Deutlichkeit wegen geschrieben werden muß, für g_φ hervortreten. Allerdings hätte die Gleichung

(14) $$g_\varphi = g_{\overline{\varphi}}$$

aus der geometrischen Bedeutung von g_φ sofort gefolgert werden können. Wegen des Zusammenhanges der Transformation von E, F, G mit der Biegungstheorie kann man ihren Inhalt dahin aussprechen, daß die Tangentialkrümmung einer Kurve $\varphi(u, v) = C$ bei der Abwicklung der Fläche auf eine andere in die Tangentialkrümmung der entsprechenden Kurve $\overline{\varphi}(u', v') = C$ übergeht. Oder kürzer: Bei der Biegung einer Fläche bleibt die Tangentialkrümmung einer beliebigen Kurve ungeändert.

Die Theorie der quadratischen Differentialformen liefert, wie wir sehen, mehr, nämlich die Biegungskovarianz des Zählers (zu dem man sich den Faktor $\frac{1}{T^2}$ hinzugezogen zu denken hat) und des Nenners von g_φ einzeln. Benutzt man für $\Delta_a^1 \varphi$ den Ausdruck S. 163 (10), so kann man schreiben

(15) $$g_\varphi = -\frac{H_a(\Phi, d\varphi^2)}{(H_a(\mathsf{A}, d\varphi^2))^{\frac{3}{2}}}.$$

Die einfache und übersichtliche Form, die g_φ bei Einführung der Koeffizienten der Christoffelschen Kovariante annimmt, läßt erwarten, daß es sich auch sonst bei flächentheoretischen Untersuchungen empfehlen wird, an Stelle der Ableitungen

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2}$$

mit den Größen

$$\varphi_{11}, \qquad \varphi_{12}, \qquad \varphi_{22}$$

zu rechnen. In der Tat findet sich dies auf Schritt und Tritt bestätigt.

§ 48.

System einer quadratischen und einer linearen Form.

Der Ausdruck der Tangentialkrümmung, von dem eben wieder die Rede gewesen ist, läßt nicht unmittelbar erkennen, daß diese

Größe nur von dem Verhältnis $\frac{\partial \varphi}{\partial u} : \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ abhängt. Auf Grund dessen ist es schon im Anfange des § 43 als eine Aufgabe hingestellt worden, die Größe g auch für die Kurvendarstellung

$$\mathfrak{M}_0 \equiv m_1\,du + m_2\,dv = 0$$

zu berechnen.

Dazu bedarf es einer systematischen Untersuchung der invarianten und kovarianten Beziehungen, die mit der simultanen Transformation der quadratischen Form A und der linearen Form $\mathfrak{M}_0$ zusammenhängen. Die Unterlagen dafür sind in den vorhergehenden Paragraphen bereits gegeben worden. Bleibt man zunächst, solange die Ableitungen von m_1 und m_2 nicht vorkommen, wieder bei den Methoden und Bezeichnungen der algebraischen Formentheorie stehen, so hat man als Basis der Theorie des Formenpaares $(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0)$ die Gleichungen

$$\mathsf{A} = \mathsf{A}' \tag{1}$$

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_0', \tag{2}$$

die für die Substitution

$$\xi_\lambda' = \sum_i s_{\lambda i}\,\xi_i \tag{3}$$

gelten, oder, damit gleichbedeutend, die Transformationsgleichungen

$$a_{ik} = \sum_{\lambda,\mu} a_{\lambda\mu}'\,s_{\lambda i}\,s_{\mu k} \tag{4}$$

$$m_i = \sum_\lambda m_\lambda'\,s_{\lambda i}. \tag{5}$$

Die aus (1) und (2) folgenden Verknüpfungen

$$\frac{\partial \mathsf{A}}{\partial \xi_i} = \sum_\lambda s_{\lambda i}\,\frac{\partial \mathsf{A}'}{\partial \xi_\lambda'}$$

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_0}{\partial \xi_i} = \sum_\lambda s_{\lambda i}\,\frac{\partial \mathfrak{M}_0'}{\partial \xi_\lambda'},$$

deren zweite Reihe übrigens mit (5) identisch ist, liefern die algebraische Kovarianz der Funktionaldeterminante von A und $\mathfrak{M}_0$,

$$\frac{\partial(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} = s\,\frac{\partial(\mathsf{A}', \mathfrak{M}_0')}{\partial(\xi_1', \xi_2')}. \tag{6}$$

Um die Substitutionsdeterminante wegzuschaffen, bedienen wir uns, wie gewöhnlich, der Gleichung

$$a = s^2 a'.$$

In der Flächentheorie, wo $s_{\lambda i} = \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}$ ist, stimmt die Substitutionsdeterminante mit der Funktionaldeterminante $\triangle'$ der neuen Variablen nach den alten überein, und es sollte allgemein die Festsetzung $\triangle' > 0$ gelten (S. 43 (4)). Ist dann, wie für $\mathsf{A} = ds^2$,

$$a > 0,$$

so kann man

(7) $$\sqrt{a} = s\sqrt{a'}$$

setzen (S. 43 (5)). Handelt es sich bei der Anwendung um eine andere Differentialform, deren Determinante nicht immer positiv ist, z. B.

$$L du^2 + 2 M du\, dv + N dv^2,$$

so kann man aus $-a = -s^2 a'$

$$\sqrt{-a} = s\sqrt{-a'}$$

entnehmen und danach die entstehenden Gleichungen ändern. Im Folgenden soll der Einfachheit wegen immer nur die Annahme $a > 0$ in Betracht gezogen werden.

Dividiert man nun mit (7) in (6) und fügt noch den Faktor $\frac{1}{2}$ hinzu, so wird die Größe

(8) $$\frac{1}{2\sqrt{a}} \frac{\partial(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} \equiv D_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0)$$

eine lineare absolute Kovariante von A und $\mathfrak{M}_0$. Ihr vollständiger Ausdruck ist

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \begin{vmatrix} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2, & a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 \\ m_1 \quad , & m_2 \end{vmatrix}$$

oder in den Bezeichnungen der Flächentheorie, wenn $\mathsf{A} = ds^2$ genommen und $\delta u, \delta v$ für du, dv geschrieben wird,

(9) $$\frac{1}{T} \begin{vmatrix} E\delta u + F\delta v, & F\delta u + G\delta v \\ m_1 \quad , & m_2 \end{vmatrix} \equiv$$

$$\frac{E m_2 - F m_1}{T} \delta u + \frac{F m_2 - G m_1}{T} \delta v.$$

Sie gibt, gleich Null gesetzt, die orthogonale Trajektorie c' der durch $\mathfrak{M}_0 = 0$ dargestellten Kurve c (vgl. S. 130 (3)).

Aus dem auf S. 153 bei der Umwandlung von $\Delta_a(\varphi, \psi)$ angegebenen Grunde ist es für manche Zwecke nützlich, die lineare Kovariante anders zu schreiben. Bei einer Ausdehnung der formen-

theoretischen Untersuchung über das binäre Gebiet hinaus wird dies sogar nötig; denn man hat dann fast überall, wo man für $n = 2$ mit der Bildung einer Funktionaldeterminante ausreicht, allgemeinere Operationen anzuwenden. Setzt man (S. 133 (11))

$$\frac{E}{T} = T\alpha_{22}, \qquad \frac{-F}{T} = T\alpha_{12}, \qquad \frac{G}{T} = T\alpha_{11},$$

so wird

$$D_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0) = T((\alpha_{12}m_1 + \alpha_{22}m_2)\delta u - (\alpha_{11}m_1 + \alpha_{12}m_2)\delta v)$$

oder für

(10) $$-T\delta v = y_1, \qquad T\delta u = y_2:$$

(11) $$D_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0) = \sum_{i,k} \alpha_{ik} m_i y_k.$$

Diese Größe ist vom Typus der im § 44 ((27) und (29)) vorkommenden Kovarianten. y_1 und y_2 sind die Koeffizienten von ξ_1 und ξ_2 in dem Ausdruck

$$\xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 \equiv -T(du\,\delta v - dv\,\delta u),$$

der der Kovarianz

(12) $$T(du\,\delta v - dv\,\delta u) = T'(du'\delta v' - dv'\delta u')$$

genügt. Die Kontragredienz der Größen y_1, y_2 für sich kann man aus den Gleichungen

$$\delta u = \frac{\partial u}{\partial u'}\delta u' + \frac{\partial u}{\partial v'}\delta v'$$

$$\delta v = \frac{\partial v}{\partial u'}\delta u' + \frac{\partial v}{\partial v'}\delta v'$$

unmittelbar mit Hilfe der Umkehrungsformeln und der Transformationsgleichung für T schließen.

Setzt man

(13) $$\frac{m_2}{T} = \mu_1, \qquad -\frac{m_1}{T} = \mu_2,$$

so erhält die lineare Kovariante (9) den Wert

$$(E\mu_1 + F\mu_2)\delta u + (F\mu_1 + G\mu_2)\delta v \equiv (a_{11}\mu_1 + a_{12}\mu_2)\xi_1 + (a_{12}\mu_1 + a_{22}\mu_2)\xi_2,$$

d. h. man hat

(14) $$D_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0) = \sum_{i,k} a_{ik}\xi_i \mu_k.$$

Bei der gleichzeitigen Betrachtung der Kurve c und der orthogonalen Trajektorie c' ist diese Darstellung der Schreibweise (11) vorzuziehen, weil in ihr die Differentiale nicht durch andere Größen

ersetzt sind, sondern so vorkommen wie auch in $\mathfrak{M}_0$. Die beiden Formeln (14) und (11) für $D_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0)$ entsprechen den beiden Ausdrücken der Grundform A selbst, in der ursprünglichen Gestalt

$$\sum_{i,k} a_{ik}\, \xi_i\, \xi_k$$

und in der Form

$$\sum_{i,k} \alpha_{ik}\, x_i\, x_k$$

(§ 44 (12) in Verbindung mit (8)).

§ 49.

Anwendung auf die geometrischen Ableitungen. Simultane Transformation zweier quadratischen Formen in algebraische Summen von Quadraten linearer Formen.

Diese verschiedenen Formeln gestatten nun, die geometrischen Ableitungen einer willkürlichen Funktion, die in den Paragraphen 40 und 41 für eine spezielle Voraussetzung angegeben worden sind, auch für die Annahme aufzustellen, daß die Grundkurve der Operationen durch Nullsetzung einer beliebigen linearen Differentialform definiert ist. Es handelt sich immer um die Division des Differentials von $\chi(u, v)$ durch ein Bogenelement, und zwar für $\Theta\chi$ das von c, für $\Theta'\chi$ das der orthogonalen Trajektorie c'. Zu dem Zweck hat man das Verhältnis der Differentiale der Variablen im ersten Fall aus

(1) $$\mathfrak{M}_0 = 0,$$

im zweiten aus

(2) $$D_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0) = 0$$

zu entnehmen, von den beiden auftretenden Vorzeichen eines zu fixieren und das andere einer bestimmten Äquivalenz gemäß zu wählen; alles genau so wie auf S. 130—131 beschrieben.

Nun ist nach (1)

$$du : dv = m_2 : -m_1,$$

sodaß

(3) $$\frac{1}{T^2}(Gm_1^2 - 2Fm_1 m_2 + Em_2^2) \equiv \sum_{i,k} \alpha_{ik}\, m_i\, m_k \equiv H_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0^2)$$

(S. 163) an die Stelle von $\Delta^1\varphi$ tritt. So lange eine genauere Bezeichnung nicht erforderlich ist, möge der Kürze wegen

(4) $$H_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0^2) = \Delta$$

gesetzt werden.

Für die Kurve c' ist

$$\delta u : \delta v = \frac{Gm_1 - Fm_2}{T} : \frac{Em_2 - Fm_1}{T}$$

in $\frac{\delta \chi}{\delta s} \equiv \Theta' \chi$ einzuführen. Obwohl hierbei der Nenner T in den Proportionalitätsfaktor aufgenommen, m. a. W. von vornherein weggelassen werden könnte, so ist es doch zweckmäßig ihn beizubehalten, um die Bedeutung der beiden Größen

$$\sum_l a_{1l}\mu_l, \qquad \sum_l a_{2l}\mu_l$$

als Koeffizienten der Kovariante $D_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0)$ nicht aus dem Auge zu verlieren. Im Nenner von $\Theta'\chi$ erscheint dann, der Größe $\sqrt{\Delta}$ entsprechend, die Quadratwurzel aus

$$\sum_{i,k} \alpha_{ik} \Big(\sum_l a_{il}\mu_l\Big)\Big(\sum_m a_{km}\mu_m\Big) \equiv \sum_{l,m} a_{lm}\mu_l\mu_m .$$

Wegen der Werte von μ_1 und μ_2 ist dieser Ausdruck aber wieder gleich Δ.

Wählt man nun auch die Vorzeichen dem Früheren entsprechend, so erhält man

(5) $$\Theta\chi = \frac{1}{T\sqrt{\Delta}}\left(m_2 \frac{\partial \chi}{\partial u} - m_1 \frac{\partial \chi}{\partial v}\right)$$

(6) $$\Theta'\chi = \frac{1}{T^2\sqrt{\Delta}}\left((Gm_1 - Fm_2)\frac{\partial \chi}{\partial u} - (Fm_1 - Em_2)\frac{\partial \chi}{\partial v}\right).$$

Für $\mathfrak{M}_0 = d\varphi$ gehen diese Ausdrücke in § 40 (16) (S. 134) und § 41 (2) (S. 138):

(7) $$\Theta\chi = \sum_\nu \varphi_\nu \frac{\partial \chi}{\partial u_\nu} \equiv \frac{D_a(\chi, \varphi)}{\sqrt{\Delta_a^1 \varphi}}$$

(8) $$\Theta'\chi = \sum_\nu \varphi'_\nu \frac{\partial \chi}{\partial u_\nu} \equiv \frac{\Delta_a(\chi, \varphi)}{\sqrt{\Delta_a^1 \varphi}}$$

über. Ebenso wie hierin mögen auch in den Formeln (5) und (6) die Koeffizienten der homogenen linearen Funktionen von $\frac{\partial \chi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \chi}{\partial v}$ abgekürzt bezeichnet werden, und zwar sei

(9) $$\frac{m_2}{T\sqrt{\Delta}} = \mu_{11}, \qquad \frac{-m_1}{T\sqrt{\Delta}} = \mu_{12}$$

(10) $$\frac{Gm_1 - Fm_2}{T^2\sqrt{\Delta}} = \mu_{21}, \qquad \frac{Em_2 - Fm_1}{T^2\sqrt{\Delta}} = \mu_{22},$$

sodaß

(11) $$\Theta\chi = \sum_\nu \mu_{1\nu} \frac{\partial \chi}{\partial u_\nu}$$

(12) $$\Theta'\chi = \sum_\nu \mu_{2\nu} \frac{\partial \chi}{\partial u_\nu}$$

wird. Setzt man

(13) $$\Theta\chi = \vartheta_1 \chi, \qquad \Theta'\chi = \vartheta_2 \chi,$$

so kann man die beiden Formeln noch in die eine

(14) $$\vartheta_i \chi = \sum_\nu \mu_{i\nu} \frac{\partial \chi}{\partial u_\nu}$$

zusammenfassen; eine Schreibweise, die nicht nur für die Verallgemeinerung der Theorie wichtig, sondern auch im binären Gebiete zur Vereinfachung mancher Rechnungen nützlich ist.

Den zweiten Ausdrücken in (7) und (8) entsprechend darf man setzen

(15) $$\Theta\chi = \frac{D_a(d\chi, \mathfrak{M}_0)}{\sqrt{H_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0^2)}}$$

(16) $$\Theta'\chi = \frac{H_a(\mathsf{A}, d\chi . \mathfrak{M}_0)}{\sqrt{H_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0^2)}}.$$

Den Gleichungen (11, 12) oder (14) zwischen den gewöhnlichen und den geometrischen Ableitungen einer willkürlichen Funktion treten solche zwischen den Differentialen der Variablen und bestimmten homogenen linearen Funktionen dieser Größen an die Seite. Erinnert man sich der Kontragredienz der Differentialquotienten gegen die Differentiale (S. 159) und bedenkt, daß für die Kontragredienz zweier Größensysteme nur die Form der Beziehungen auf S. 155, aber nicht die Bedeutung der darin vorkommenden Variablen und Substitutionskoeffizienten maßgebend ist, so kann man zur Bestimmung der gesuchten Funktionen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ sofort den Ansatz

(17) $$du_\nu = \sum_i \mu_{i\nu} \mathfrak{M}_i$$

machen. Einfacher: Die Koeffizienten $m_{11}, \ldots m_{22}$ der linearen Differentialformen

(18) $$\mathfrak{M}_i \equiv \sum_\nu m_{i\nu} du_\nu$$

ergeben sich durch Vergleichung von

$$d\chi = \sum_\nu \frac{\partial \chi}{\partial u_\nu} du_\nu$$

mit

(19) $$d\chi = \sum_i \vartheta_i \chi \cdot \mathfrak{M}_i \equiv \sum_i \Big(\sum_\nu \mu_{i\nu} \frac{\partial \chi}{\partial u_\nu}\Big)\Big(\sum_k m_{ik} du_k\Big).$$

Man erhält

(20) $$\sum_i m_{ik}\mu_{i\nu} = \varepsilon_{k\nu},$$

d. h., wie es nach der Theorie der Kontragredienz sein muß, die Grundformeln der Determinantentheorie. Einzeln haben die gesuchten Koeffizienten folgende Werte:

(21) $$m_{11} = \frac{Em_2 - Fm_1}{T\sqrt{\Delta}}, \qquad m_{12} = \frac{Fm_2 - Gm_1}{T\sqrt{\Delta}}$$

(22) $$m_{21} = \frac{m_1}{\sqrt{\Delta}}, \qquad m_{22} = \frac{m_2}{\sqrt{\Delta}}.$$

Sie liefern

(23) $$\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} D_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0)$$

(24) $$\mathfrak{M}_2 = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \mathfrak{M}_0 .$$

Unter der Menge von Relationen, die zwischen den Koeffizienten m_{ik} bestehen, können die wichtigsten aus der Tatsache abgelesen werden, daß das Quadrat der Funktionaldeterminante von A und $\mathfrak{M}_0$ als ganze rationale Funktion dieser beiden Formen selbst darstellbar ist. Ordnet man $D_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0)$, ohne den Ausdruck durch eine Determinante zweiten Grades aufzugeben, das eine Mal, wie bisher, nach m_1 und m_2, das andere Mal nach ξ_1 und ξ_2, so erhält man

$$D_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0)^2 = \frac{1}{T^2}\begin{vmatrix} E\xi_1 + F\xi_2, & F\xi_1 + G\xi_2 \\ m_1, & m_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2 \\ Gm_1 - Fm_2, & -Fm_1 + Em_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2, & a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 \\ m_1, & m_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2 \\ \alpha_{11}m_1 + \alpha_{12}m_2, & \alpha_{21}m_1 + \alpha_{22}m_2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sum_\lambda a_{1\lambda}\xi_\lambda, & \sum_\lambda a_{2\lambda}\xi_\lambda \\ m_1, & m_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \xi_1, & \xi_2 \\ \sum_\mu \alpha_{1\mu}m_\mu, & \sum_\mu \alpha_{2\mu}m_\mu \end{vmatrix}.$$

Bei der Komposition von Zeilen mit Zeilen werden die Elemente der Produktdeterminante der Reihe nach:

$$\sum_i\Big(\sum_\lambda a_{i\lambda}\xi_\lambda\Big)\xi_i = \mathsf{A}$$

$$\sum_i\Big(\sum_\lambda a_{i\lambda}\xi_\lambda\Big)\Big(\sum_\mu \alpha_{i\mu}m_\mu\Big) = \sum_{\lambda,\mu}\varepsilon_{\lambda\mu}\xi_\lambda m_\mu = \sum_\lambda m_\lambda\xi_\lambda = \mathfrak{M}_0$$

$$\sum_i m_i\xi_i = \mathfrak{M}_0$$

$$\sum_i m_i\sum_\mu \alpha_{i\mu}m_\mu = \Delta.$$

Die gesuchte Beziehung hat mithin die Form

(25) $$D_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0)^2 = \begin{vmatrix} \mathsf{A}, & \mathfrak{M}_0 \\ \mathfrak{M}_0, & \Delta \end{vmatrix} = \mathsf{A}\Delta - \mathfrak{M}_0^2$$

oder

$$\left(\frac{D_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0)}{\sqrt{\Delta}}\right)^2 + \left(\frac{\mathfrak{M}_0}{\sqrt{\Delta}}\right)^2 = \mathsf{A}$$

oder endlich, nach (23, 24):

(26) $$\mathfrak{M}_1^2 + \mathfrak{M}_2^2 = \mathsf{A}.$$

Diese Gleichung lehrt, daß man die Bestimmung von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ auch an eine Grundaufgabe der Theorie der quadratischen Formen knüpfen kann, die uns schon früher (§ 28) begegnet ist, nämlich zwei solche Formen simultan in Summen von Quadraten linearer Formen zu transformieren. Nur handelt es sich hier um den Grenzfall, daß die zweite quadratische Form als Quadrat einer linearen, nämlich gleich $\mathfrak{M}_0^2$, gegeben ist. Legt man also jetzt die Gleichung (26) zugrunde, so hat man

(27) $$l_1 \mathfrak{M}_1^2 + l_2 \mathfrak{M}_2^2 = \mathfrak{M}_0^2$$

zu ihr hinzuzunehmen. Nach S. 88 sind dann zunächst aus der quadratischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} El - m_1^2, & Fl - m_1 m_2 \\ Fl - m_1 m_2, & Gl - m_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

die Wurzeln l_1 und l_2 zu bestimmen, deren eine für die vorliegende Annahme verschwindet; und zwar ist nach der hier gewählten Bezeichnung l_1 gleich Null zu setzen. Die andere Wurzel l_2 erhält den Wert Δ, und die Gleichung (27) nimmt die Form

$$\mathfrak{M}_2^2 = \frac{\mathfrak{M}_0^2}{\Delta}$$

an, aus der unter Hinzunahme einer Vorzeichenbestimmung rückwärts die Formeln (22) hervorgehen. Die Ausgangsgleichung (26) führt dann, der Identität (25) zufolge, auf

$$\mathfrak{M}_1^2 = \frac{D_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0)^2}{\Delta},$$

d. h., wieder nach Entscheidung über ein Vorzeichen, auf die Formeln (21).

Aus (21) und (22) ergibt sich für die Determinante

$$m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21} \equiv m$$

der Wert

(28) $$m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21} = T \equiv \sqrt{a}.$$

Die Relationen nun, die unmittelbar aus (26), d. h. aus

$$\sum_\lambda \Big(\sum_i m_{\lambda i}\xi_i\Big)\Big(\sum_k m_{\lambda k}\xi_k\Big) = \sum_{i,k} a_{ik}\xi_i\xi_k$$

folgen, lauten

(29) $$\sum_\lambda m_{\lambda i} m_{\lambda k} = a_{ik}.$$

Was die Größen μ_{ik} angeht, so betrachten wir sie von dem jetzt eingenommenen Standpunkt aus als durch die Formeln (20) definiert. Als Grundgleichungen der Determinantentheorie müssen sich diese auch in der Gestalt

(30) $$\sum_i m_{ki}\mu_{\nu i} = \varepsilon_{k\nu}$$

schreiben lassen. Hieraus findet man nach Multiplikation von (29) mit μ_{pi} und Summation über i:

$$\sum_{\lambda, i} m_{\lambda i} m_{\lambda k}\mu_{pi} \equiv \sum_\lambda \varepsilon_{\lambda p} m_{\lambda k} \equiv m_{pk} = \sum_i a_{ik}\mu_{pi}$$

oder

(31) $$m_{ik} = \sum_\lambda a_{\lambda k}\mu_{i\lambda},$$

und durch Auflösung nach den Größen μ:

(32) $$\mu_{ik} = \sum_\lambda \alpha_{k\lambda} m_{i\lambda}.$$

Mittels dieser Formeln ergeben sich die weiteren Relationen

(33) $$\sum_{p,q} a_{pq}\mu_{ip}\mu_{kq} = \varepsilon_{ik}$$

(34) $$\sum_{p,q} \alpha_{pq} m_{ip} m_{kq} = \varepsilon_{ik},$$

und nach (28) und (29):

(35) $$\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21} = \frac{1}{T} \equiv \frac{1}{\sqrt{a}}$$

(36) $$\sum_\lambda \mu_{\lambda i}\mu_{\lambda k} = \alpha_{ik}.$$

Um endlich zu den Invarianten $\vartheta_1\chi \equiv \Theta\chi$ und $\vartheta_2\chi \equiv \Theta'\chi$ zurückzukehren, die für $\mathsf{A} = ds^2$ die geometrischen Ableitungen von χ für die Differentiationen senkrecht zu den Kurven $\mathfrak{M}_1 = 0$ und $\mathfrak{M}_2 = 0$ darstellen, so kann man setzen

(37) $$\vartheta_1\chi = D_a(d\chi, \mathfrak{M}_2)$$

(38) $$\vartheta_2\chi = D_a(\mathfrak{M}_1, d\chi).$$

§ 50.

Verallgemeinerung der Christoffelschen Kovariante.

Wenn in einer flächentheoretischen Untersuchung außer den Formenkoeffizienten m_1, m_2 auch deren erste Ableitungen auftreten, wie bei der Berechnung der Tangentialkrümmung g einer Flächenkurve $\mathfrak{M}_0 = 0$, so wird man nach § 47 erwarten dürfen, die größte Übersichtlichkeit der Resultate vermittelst einer bestimmten Kovariante des Formenpaares $(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0)$ zu erreichen, die als Verallgemeinerung der Christoffelschen für $\mathfrak{M}_0 = d\varphi$ zu definieren wäre. Die Existenz und das Bildungsgesetz einer solchen Kovariante läßt sich aus den Formeln des § 47 selbst unmittelbar entnehmen. Man braucht nur die Gleichungen (1) durch die Transformationsgleichungen der Form $\mathfrak{M}_0$, nämlich

(1) $$m_i = \sum_h m'_h \frac{\partial u'_h}{\partial u_i}$$

(S. 172 (5)) zu ersetzen und im übrigen genau wie dort zu verfahren, indem man

$$\frac{\partial m_i}{\partial u_k} = \sum_h m'_h \frac{\partial^2 u'_h}{\partial u_i \partial u_k} + \sum_{\lambda, \mu} \frac{\partial m'_\lambda}{\partial u'_\mu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}$$

bildet und die zweiten Ableitungen der neuen Variablen nach den alten mittels der Christoffelschen Formeln eliminiert. Setzt man, der Gleichung S. 169 (4) entsprechend,

(2) $$\frac{\partial m_i}{\partial u_k} - \sum_\nu \begin{Bmatrix} i\,k \\ \nu \end{Bmatrix} m_\nu = \overline{m}_{ik},$$

so findet man (vgl. a. a. O. (5))

(3) $$\overline{m}_{ik} = \sum_{\lambda, \mu} \overline{m}'_{\lambda\mu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}$$

oder

(4) $$\overline{m}_{ik} = \sum_{\lambda, \mu} \overline{m}'_{\lambda\mu} s_{\lambda i} s_{\mu k}.$$

Es ist aber jetzt nicht allgemein $\overline{m}_{ki}$ gleich $\overline{m}_{ik}$, sondern nur dann, wenn die Differentialform $\mathfrak{M}_0$ der Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial m_i}{\partial u_k} = \frac{\partial m_k}{\partial u_i}$$

genügt. Man kommt infolgedessen hier mit einer quadratischen Kovariante nicht mehr aus, sondern hat die Beziehungen (3) als Transformationsgleichungen einer bilinearen Differentialform

(5) $$\sum_{i,k} \overline{m}_{ik}\, du_i\, \delta u_k \equiv \mathsf{M}$$

aufzufassen, die ebenfalls als Christoffelsche Kovariante, nämlich der Formen A und $\mathfrak{M}_0$, bezeichnet werden soll.

Die Grundlage für die Berechnung von g bildete im § 40 die Formel (15) (S. 134)

$$g = -\sum A\Theta A',$$

in die jetzt die Ausdrücke

$$A \equiv \Theta x \equiv \vartheta_1 x = \sum_\nu \mu_{1\nu} \frac{\partial x}{\partial u_\nu} \tag{6}$$

$$A' \equiv \Theta' x \equiv \vartheta_2 x = \sum_\nu \mu_{2\nu} \frac{\partial x}{\partial u_\nu} \tag{7}$$

einzusetzen sind. Die ersten Schritte der dort angestellten Rechnung liefern, allein durch Vertauschung von

$$\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_1' \quad \varphi_2'$$

gegen

$$\mu_{11} \quad \mu_{12} \quad \mu_{21} \quad \mu_{22}:$$

$$-g = \sum_{i,k,l} \mu_{1i}\,\mu_{1l}\,\mu_{2k} \begin{bmatrix} k\,l \\ i \end{bmatrix} + \sum_{i,k,l} a_{ik}\,\mu_{1i}\,\mu_{1l} \frac{\partial \mu_{2k}}{\partial u_l} \tag{8}$$

(vgl. S. 135 (20)), und man würde auch bei weiterer Verfolgung jener Operationen ohne Schwierigkeit im voraus den Wert beurteilen können, den die einzige hier vorkommende Funktion der Differentialquotienten $\frac{\partial \mu_{2k}}{\partial u_l}$ schließlich annimmt. Statt dessen mögen die Einzelausdrücke dieser Ableitungen, deren Kenntnis für manche Untersuchungen nützlich ist, aufgestellt und dabei, wie oben angedeutet, grundsätzlich die Koeffizienten $\overline{m}_{ik}$ der Christoffelschen Kovariante benutzt werden. Endlich wollen wir auch die Differentialquotienten der übrigen Größen, die in die Theorie des Formenpaares (A, $\mathfrak{M}_0$) eingeführt worden sind, hier gleich hinzunehmen.

Da in den Ausdrücken $\overline{m}_{ik}$ die Christoffelschen Verbindungen aus den Koeffizienten von A auftreten, so müssen die Ableitungen der Koeffizienten, wo sie vorkommen, ebenfalls durch diese Verbindungen dargestellt werden. Zu dem Ende werde in

$$\begin{bmatrix} k\,l \\ i \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l} + \frac{\partial a_{il}}{\partial u_k} - \frac{\partial a_{kl}}{\partial u_i}\right)$$

(S. 135 (18)) k mit i vertauscht und die entsprechende Gleichung

$$\begin{bmatrix} i\,l \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l} + \frac{\partial a_{kl}}{\partial u_i} - \frac{\partial a_{il}}{\partial u_k}\right)$$

zu der ursprünglichen addiert, wodurch sich

(9) $$\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l} = \begin{bmatrix} k\ l \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i\ l \\ k \end{bmatrix}$$

ergibt. Zieht man die Gleichung S. 137 (23)

$$\sum_\lambda \alpha_{l\lambda} \begin{bmatrix} i\ k \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} i\ k \\ l \end{Bmatrix}$$

hinzu, die aufgelöst

(10) $$\begin{bmatrix} i\ k \\ l \end{bmatrix} = \sum_\varrho a_{\varrho l} \begin{Bmatrix} i\ k \\ \varrho \end{Bmatrix}$$

liefert, so geht (9) in

(11) $$\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l} = \sum_\varrho \left(a_{\varrho i} \begin{Bmatrix} k\ l \\ \varrho \end{Bmatrix} + a_{\varrho k} \begin{Bmatrix} i\ l \\ \varrho \end{Bmatrix} \right)$$

über.

Zu diesem Formelsystem gehört ein zweites für die Größen $\frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial u_l}$, deren Berechnung im § 40 bereits angebahnt, aber nicht ausgeführt worden ist, weil von den einzelnen Ableitungen dort kein Gebrauch gemacht werden sollte. Es war (S. 136 (22))

(12) $$\frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial u_l} = -\sum_{\lambda, \mu} \alpha_{\lambda i} \alpha_{\mu k} \frac{\partial a_{\lambda \mu}}{\partial u_l};$$

mithin folgt aus (11) mittels der oft ausgeführten Reduktionen und Bezeichnungs-Änderungen:

(13) $$\frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial u_l} = -\sum_\varrho \left(\alpha_{\varrho i} \begin{Bmatrix} \varrho\ l \\ k \end{Bmatrix} + \alpha_{\varrho k} \begin{Bmatrix} \varrho\ l \\ i \end{Bmatrix} \right).$$

Im ganzen liegen 2 . 4 Größen m_{ik} und μ_{ik} vor, deren erste Differentialquotienten berechnet werden sollen. Sie enthalten nach S. 178 (21, 22) und S. 176 (9, 10) sämtlich den Nenner $\sqrt{\Delta}$, dessen Ableitungen daher vor allem gebraucht werden. Die Definitionsgleichung für Δ war (S. 175 (3, 4))

(14) $$\sum_{i,k} \alpha_{ik} m_i m_k = \Delta,$$

und es folgt aus ihr

$$\frac{\partial \Delta}{\partial u_l} = \sum_{i,k} \alpha_{ik} m_i \frac{\partial m_k}{\partial u_l} + \sum_{i,k} \alpha_{ik} m_k \frac{\partial m_i}{\partial u_l} + \sum_{i,k} m_i m_k \frac{\partial \alpha_{ik}}{\partial u_l}.$$

Wegen $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$ lassen sich die beiden ersten Summen, nach Vertauschung der Summationsbuchstaben i und k in der zweiten, zu

$$2 \sum_{i,k} \alpha_{ik} m_i \frac{\partial m_k}{\partial u_l}$$

vereinigen, und dieser Ausdruck wird bei Hinzuziehung der Formeln (2) gleich

$$2\sum_{i,k}\alpha_{ik}m_i\left(\overline{m}_{kl}+\sum_\nu\left\{\begin{smallmatrix}k\ l\\ \nu\end{smallmatrix}\right\}m_\nu\right).$$

Der noch fehlende Bestandteil von $\frac{\partial\Delta}{\partial u_l}$ geht nach (13) in

$$-\sum_{i,k,\varrho}m_i m_k\left(\alpha_{i\varrho}\left\{\begin{smallmatrix}\varrho\ l\\ k\end{smallmatrix}\right\}+\alpha_{k\varrho}\left\{\begin{smallmatrix}\varrho\ l\\ i\end{smallmatrix}\right\}\right)$$

über,

$$\equiv-\sum_{i,\nu,k}m_i m_\nu\alpha_{ik}\left\{\begin{smallmatrix}k\ l\\ \nu\end{smallmatrix}\right\}-\sum_{\nu,i,k}m_\nu m_i\alpha_{ik}\left\{\begin{smallmatrix}k\ l\\ \nu\end{smallmatrix}\right\}$$

$$\equiv-2\sum_{i,k,\nu}m_i m_\nu\left\{\begin{smallmatrix}k\ l\\ \nu\end{smallmatrix}\right\}.$$

Addiert man beide Ausdrücke, so fallen die Christoffelschen Verbindungen, soweit sie explizite vorkommen, weg, und es bleibt

$$\frac{\partial\Delta}{\partial u_l}=2\sum_{i,k}\alpha_{ik}m_i\overline{m}_{kl}. \tag{15}$$

Demnach wird

$$\frac{\partial\sqrt{\Delta}}{\partial u_l}=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_k\overline{m}_{kl}\sum_i\alpha_{ik}m_i.$$

Nach S. 180(32) (für $i=2$) in Verbindung mit S. 178(22) oder auch direkt nach S. 176(10) kann

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_i\alpha_{ik}m_i=\mu_{2k} \tag{16}$$

gesetzt werden. Die gesuchte Formel heißt also

$$\frac{\partial\sqrt{\Delta}}{\partial u_l}=\sum_\varrho\mu_{2\varrho}\overline{m}_{\varrho l}. \tag{17}$$

Von den Größen $m_{11},\ldots\mu_{22}$ haben m_{21} und m_{22} die einfachsten Ausdrücke, nämlich nach der eben schon benutzten Gleichung S. 178(22):

$$m_{2k}=\frac{m_k}{\sqrt{\Delta}}. \tag{18}$$

Die Differentiation liefert

$$\frac{\partial(m_{2k}\sqrt{\Delta})}{\partial u_l}=\frac{\partial m_k}{\partial u_l},$$

d. h. nach (2) und (17)

$$\sqrt{\Delta}\frac{\partial m_{2k}}{\partial u_l}=-m_{2k}\sum_\varrho\mu_{2\varrho}\overline{m}_{\varrho l}+\overline{m}_{kl}+\sum_\nu\left\{\begin{smallmatrix}k\ l\\ \nu\end{smallmatrix}\right\}m_\nu.$$

Da nun (S. 178 (20))

$$m_{1k}\mu_{1\varrho} + m_{2k}\mu_{2\varrho} = \varepsilon_{k\varrho}$$

ist, so wird

$$\sqrt{\Delta}\frac{\partial m_{2k}}{\partial u_l} = \sum_\varrho \overline{m}_{\varrho l}(m_{1k}\mu_{1\varrho} - \varepsilon_{k\varrho}) + \overline{m}_{kl} + \sum_\nu \begin{Bmatrix} k\ l \\ \nu \end{Bmatrix} m_\nu$$

$$= m_{1k}\sum_\varrho \mu_{1\varrho}\overline{m}_{\varrho l} + \sum_\nu \begin{Bmatrix} k\ l \\ \nu \end{Bmatrix} m_\nu$$

(19) $$\frac{\partial m_{2k}}{\partial u_l} = \frac{m_{1k}}{\sqrt{\Delta}}\sum_\varrho \mu_{1\varrho}\overline{m}_{\varrho l} + \sum_\varrho \begin{Bmatrix} k\ l \\ \varrho \end{Bmatrix} m_{2\varrho}.$$

Alle übrigen Ableitungen lassen sich direkt mittels der vorher aufgestellten Relationen berechnen, ohne daß es der nochmaligen Benutzung der Gleichungen (2) bedarf. Zunächst ist nach S. 180 (29)

$$m_{1k}^2 = a_{kk} - m_{2k}^2$$

$$m_{1k}\frac{\partial m_{1k}}{\partial u_l} = \frac{1}{2}\frac{\partial a_{kk}}{\partial u_l} - m_{2k}\frac{\partial m_{2k}}{\partial u_l}$$

$$= \sum_\varrho a_{\varrho k}\begin{Bmatrix} k\ l \\ \varrho \end{Bmatrix} - m_{2k}\left(\frac{m_{1k}}{\sqrt{\Delta}}\sum_\varrho \mu_{1\varrho}\overline{m}_{\varrho l} + \sum_\varrho \begin{Bmatrix} k\ l \\ \varrho \end{Bmatrix} m_{2\varrho}\right),$$

wobei außer (19) die Gleichung (11) für $i = k$ verwendet ist.

$$m_{1k}\frac{\partial m_{1k}}{\partial u_l} = \sum_\varrho \begin{Bmatrix} k\ l \\ \varrho \end{Bmatrix}\left(\sum_\lambda m_{\lambda\varrho}m_{\lambda k} - m_{2k}m_{2\varrho}\right) - m_{1k}\frac{m_{2k}}{\sqrt{\Delta}}\sum_\varrho \mu_{1\varrho}\overline{m}_{\varrho l}$$

(20) $$\frac{\partial m_{1k}}{\partial u_l} = -\frac{m_{2k}}{\sqrt{\Delta}}\sum_\varrho \mu_{1\varrho}\overline{m}_{\varrho l} + \sum_\varrho \begin{Bmatrix} k\ l \\ \varrho \end{Bmatrix} m_{1\varrho}.$$

Mit Hilfe von S. 179 (28) folgt aus den Gleichungen (19) und (20) durch eine einfache Rechnung

(21) $$\frac{\partial \log\sqrt{a}}{\partial u_l} = \sum_\varrho \begin{Bmatrix} \varrho\ l \\ \varrho \end{Bmatrix}$$

oder

(22) $$\frac{\partial a}{\partial u_l} = 2a\sum_\varrho \begin{Bmatrix} \varrho\ l \\ \varrho \end{Bmatrix},$$

ein Ausdruck, der natürlich auch direkt aus (11) abgeleitet werden kann, weil er in Wirklichkeit mit der Form $\mathfrak{M}_0$ gar nichts zu tun hat.

Zur Darstellung der Differentialquotienten der Größen μ_{ik} können nunmehr die Gleichungen S. 180 (32)

(23) $$\mu_{ik} = \sum_\lambda \alpha_{k\lambda}m_{i\lambda}$$

benutzt werden. Für $i = 2$ liefern sie, unter sofortiger Heranziehung von (13) und (19),

$$\frac{\partial \mu_{2k}}{\partial u_l} = \sum_{\lambda} \alpha_{k\lambda} \frac{m_{1\lambda}}{\sqrt{\Delta}} \sum_{\varrho} \mu_{1\varrho} \overline{m}_{\varrho l} + \sum_{\lambda,\varrho} \alpha_{k\lambda} m_{2\varrho} \left\{ \begin{matrix} \lambda\, l \\ \varrho \end{matrix} \right\}$$

$$- \sum_{\lambda,\varrho} \alpha_{\varrho\lambda} m_{2\lambda} \left\{ \begin{matrix} \varrho\, l \\ k \end{matrix} \right\} - \sum_{\lambda,\varrho} \alpha_{\varrho k} m_{2\lambda} \left\{ \begin{matrix} \varrho\, l \\ \lambda \end{matrix} \right\}.$$

Vertauscht man in der zweiten Doppelsumme ϱ mit λ, so sieht man, daß sie sich gegen die vierte streichen läßt. Die nochmalige Verwendung von (23), auch für $i = 1$, ergibt

$$\text{(24)} \qquad \frac{\partial \mu_{2k}}{\partial u_l} = \frac{\mu_{1k}}{\sqrt{\Delta}} \sum_{\varrho} \mu_{1\varrho} \overline{m}_{\varrho l} - \sum_{\varrho} \left\{ \begin{matrix} \varrho\, l \\ k \end{matrix} \right\} \mu_{2\varrho}.$$

In genau derselben Weise folgt

$$\text{(25)} \qquad \frac{\partial \mu_{1k}}{\partial u_l} = - \frac{\mu_{2k}}{\sqrt{\Delta}} \sum_{\varrho} \mu_{1\varrho} \overline{m}_{\varrho l} - \sum_{\varrho} \left\{ \begin{matrix} \varrho\, l \\ k \end{matrix} \right\} \mu_{1\varrho}.$$

§ 51.

Weitere Umformungen des Ausdruckes der Tangentialkrümmung. Die Integrabilitäts-Invariante einer linearen Differentialform.

Von den vier Systemen (19), (20), (24) und (25) werden zur unmittelbaren Einführung in (8) speziell die Ausdrücke (24) gebraucht. Wendet man außerdem sofort die Gleichungen (10) an, so wird

$$- g = \sum_{i,k,l,\varrho} \mu_{1i} \mu_{1l} \mu_{2k} a_{\varrho i} \left\{ \begin{matrix} k\, l \\ \varrho \end{matrix} \right\} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k,l,\varrho} a_{ik} \mu_{1i} \mu_{1l} \mu_{1k} \mu_{1\varrho} \overline{m}_{\varrho l}$$

$$- \sum_{i,k,l,\varrho} a_{ik} \mu_{1i} \mu_{1l} \left\{ \begin{matrix} \varrho\, l \\ k \end{matrix} \right\} \mu_{2\varrho}.$$

Nach Vertauschung von k mit ϱ hebt sich die erste Summe gegen die dritte. In der zweiten ist

$$\sum_i a_{ik} \mu_{1i} = m_{1k}$$

(S. 180 (31)), und hierauf

$$\sum_k m_{1k} \mu_{1k} = 1$$

(a. a. O. (30)) zu setzen. Für die Tangentialkrümmung ergibt sich dann, wenn i, k für ϱ, l geschrieben wird,

(1) $$g = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k} \mu_{1i} \mu_{1k} \overline{m}_{ik};$$

ein Ausdruck, der dem im § 40 abgeleiteten (S. 137 (26)) entspricht und dessen Verallgemeinerung darstellt.

Aus der Gleichung § 50 (8) können aber für die Tangentialkrümmung noch mannigfache andere Formeln abgeleitet werden. Behält man die Ableitungen $\frac{\partial \mu_{2k}}{\partial u_l}$ zunächst bei, verfährt aber im übrigen wie eben, so findet man

$$-g = \sum_{i,k,l,\varrho} a_{\varrho i} \mu_{1i} \mu_{1l} \mu_{2k} \left\{ {k\ l \atop \varrho} \right\} + \sum_{i,k,l} a_{ik} \mu_{1i} \mu_{1l} \frac{\partial \mu_{2k}}{\partial u_l}$$

(2) $$-g = \sum_{k,l,\varrho} m_{1\varrho} \mu_{1l} \mu_{2k} \left\{ {k\ l \atop \varrho} \right\} + \sum_{k,l} m_{1k} \mu_{1l} \frac{\partial \mu_{2k}}{\partial u_l}.$$

Unter dem zweiten Summenzeichen steht, mit μ_{1l} multipliziert, ein Teil der Ableitung nach u_l von

$$\sum_k m_{1k} \mu_{2k};$$

eine Summe, die nach S. 180 (30) gleich Null ist. Man kann also setzen:

$$g = \sum_{k,l} \mu_{1l} \mu_{2k} \frac{\partial m_{1k}}{\partial u_l} - \sum_{k,l,\varrho} \mu_{1l} \mu_{2k} \left\{ {k\ l \atop \varrho} \right\} m_{1\varrho}$$

$$= \sum_{i,k} \mu_{2i} \mu_{1k} \left(\frac{\partial m_{1i}}{\partial u_k} - \sum_{\nu} \left\{ {i\ k \atop \nu} \right\} m_{1\nu} \right)$$

oder, für

(3) $$\frac{\partial m_{1i}}{\partial u_k} - \sum_{\nu} \left\{ {i\ k \atop \nu} \right\} m_{1\nu} = \overline{m}_{1,ik}:$$

(4) $$g = \sum_{i,k} \mu_{2i} \mu_{1k} \overline{m}_{1,ik}.$$

Die Größen $\overline{m}_{1,ik}$ sind aus den Koeffizienten der Form $\mathfrak{M}_1 \equiv m_{11} du + m_{12} dv$ genau so gebildet wie die Größen $\overline{m}_{ik}$ aus denen von $\mathfrak{M}_0$. Sie können also als Koeffizienten der Christoffelschen Kovariante von A und $\mathfrak{M}_1$ aufgefaßt werden.

Anstatt in (2) m_{1k} als Faktor zu μ_{2k} hinzuzuziehen, kann man auch, nachdem man die Formel in der Gestalt

$$-g = \sum_{k,l} m_{1k} \mu_{1l} \left(\frac{\partial \mu_{2k}}{\partial u_l} + \sum_{\varrho} \left\{ {\varrho\ l \atop k} \right\} \mu_{2\varrho} \right)$$

geschrieben hat, m_{1k} mit μ_{1l} zusammenfassen und mit Benutzung von S. 178 (20) und dann, wie oben, der Gleichung S. 186 (24),

$$-g = \sum_{k,l} (\varepsilon_{kl} - m_{2k}\mu_{2l}) \left(\frac{\partial \mu_{2k}}{\partial u_l} + \sum_{\varrho} \left\{ \begin{matrix} \varrho & l \\ & k \end{matrix} \right\} \mu_{2\varrho} \right)$$

$$= \sum_{l} \left(\frac{\partial \mu_{2l}}{\partial u_l} + \sum_{\varrho} \left\{ \begin{matrix} \varrho & l \\ & l \end{matrix} \right\} \mu_{2\varrho} \right) - \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{k,l,\varrho} m_{2k}\mu_{2l}\mu_{1k}\mu_{1\varrho}\overline{m}_{\varrho l}$$

setzen. Der zweite Teil

$$-\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{l,\varrho} \mu_{2l}\,\mu_{1\varrho}\,\overline{m}_{\varrho l} \sum_{k} m_{2k}\mu_{1k}$$

fällt weg, weil nach einer wiederholt benutzten Relation

$$\sum_{k} m_{2k}\mu_{1k} = 0$$

ist. Wendet man auf den übrig gebliebenen Ausdruck

$$-g = \sum_{l} \frac{\partial \mu_{2l}}{\partial u_l} + \sum_{l,\varrho} \left\{ \begin{matrix} l & \varrho \\ & \varrho \end{matrix} \right\} \mu_{2l}$$

die Formel S. 185 (21) an, so wird

$$-g = \sum_{l} \frac{\partial \mu_{2l}}{\partial u_l} + \sum_{l} \mu_{2l} \frac{\partial \log \sqrt{a}}{\partial u_l}$$

(5)
$$-g = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{l} \frac{\partial (\mu_{2l}\sqrt{a})}{\partial u_l}$$

oder

$$-g = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial (T\mu_{21})}{\partial u} + \frac{\partial (T\mu_{22})}{\partial v} \right),$$

d. h. endlich, nach § 49 (10, 21):

(6)
$$g = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial m_{12}}{\partial u} - \frac{\partial m_{11}}{\partial v} \right)$$

oder ausgeschrieben

(7)
$$g = -\frac{1}{T} \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{G m_1 - F m_2}{\sqrt{G m_1^2 - 2 F m_1 m_2 + E m_2^2}} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{F m_1 - E m_2}{\sqrt{G m_1^2 - 2 F m_1 m_2 + E m_2^2}} \right).$$

Für $\mathfrak{M}_0 = d\varphi$ heißt diese Formel:

(8)
$$g = -\frac{1}{T} \left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{G \frac{\partial \varphi}{\partial u} - F \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 - 2F \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + E \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2}} - \frac{\partial}{\partial v} \frac{F \frac{\partial \varphi}{\partial u} - E \frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{G \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right)^2 - 2F \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial v} + E \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right)^2}} \right).$$

Sie läßt unmittelbar hervortreten, daß in der Tangentialkrümmung die Größen m_1 und m_2 oder $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ nur in ihrem Verhältnis vorkommen (vgl. S. 171—172). Die Hauptbedeutung des Ausdruckes aber beruht auf dem einfachen Zusammenhange mit einer Größe, deren Verschwinden für die Integrabilität einer linearen Differentialform charakteristisch ist.

Bevor dies weiter verfolgt wird, müssen die Formeln für die Tangentialkrümmung der Kurve c noch durch die entsprechenden für die orthogonale Trajektorie c' ergänzt werden. Führt man die auf S. 182 angegebenen Vertauschungen nunmehr in der Gleichung S. 138 (4) aus, so erhält man

$$g' = \sum_{i,k,l} \mu_{1i}\,\mu_{2l}\,\mu_{2k} \begin{bmatrix} k\ l \\ i \end{bmatrix} + \sum_{i,k,l} a_{ik}\,\mu_{1i}\,\mu_{2l}\,\frac{\partial \mu_{2k}}{\partial u_l}$$

und weiter nach demselben Verfahren wie oben

$$g' = \sum_{i,k,l,\varrho} \mu_{1i}\,\mu_{2l}\,\mu_{2k}\,a_{\varrho i} \begin{Bmatrix} k\ l \\ \varrho \end{Bmatrix} + \cdots\cdots$$

$$g' = \sum_{k,l,\varrho} m_{1\varrho}\,\mu_{2l}\,\mu_{2k} \begin{Bmatrix} k\ l \\ \varrho \end{Bmatrix} + \sum_{k,l} m_{1k}\,\mu_{2l}\,\frac{\partial \mu_{2k}}{\partial u_l}. \tag{9}$$

Die Benutzung von S. 186 (24) führt auf

$$g' = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k} \mu_{1i}\,\mu_{2k}\,\overline{m}_{ik}. \tag{10}$$

Diese Gleichung entspricht der Formel (1).

Nach dem zweiten Verfahren, das auf der Hinzuziehung der Relation

$$\sum_k m_{1k}\,\mu_{2k} = 0$$

beruhte, wird

$$-g' = \sum_{k,l} \mu_{2l}\,\mu_{2k}\,\frac{\partial m_{1k}}{\partial u_l} - \sum_{k,l,\varrho} \mu_{2l}\,\mu_{2k} \begin{Bmatrix} k\ l \\ \varrho \end{Bmatrix} m_{1\varrho}$$

$$g' = -\sum_{i,k} \mu_{2i}\,\mu_{2k}\,\overline{m}_{1,ik}, \tag{11}$$

dem Ausdruck (4) entsprechend.

Die dritte Art der Umwandlung hätte von der Gleichung (9) auszugehen, wenn sie in der Gestalt

$$g' = \sum_{k,l} m_{1k}\,\mu_{2l} \left(\frac{\partial \mu_{2k}}{\partial u_l} + \sum_{\varrho} \begin{Bmatrix} \varrho\ l \\ k \end{Bmatrix} \mu_{2\varrho} \right)$$

geschrieben wird. Der Umstand, daß die Formeln für g', von einem Vorzeichen abgesehen, sich von denen für g nur durch das Auftreten von μ_{2l} statt μ_{1l} im allgemeinen Gliede unterscheiden, verhindert aber hier die Benutzung der Relation S. 178 (20); und wenn man sofort die Gleichung S. 186 (24) anwendet, so kommt man naturgemäß nur wieder auf den Ausdruck (10). Dennoch wird man wegen des gegenseitigen Entsprechens von g und g', $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ erwarten dürfen, daß für g' ein Ausdruck ähnlicher Gestalt wie (6) existiert. Man wird also versuchen müssen, eine der gefundenen Gleichungen so umzuformen, daß die Ableitungen der Größen m_{21} und m_{22} auftreten. Mit Hilfe der im Anfange dieses Paragraphen zitierten Formelsysteme, die übereinstimmend die Verbindung $\sum_\varrho \mu_{1\varrho}\,\overline{m}_{\varrho l}$ enthalten, ist dies ohne weiteres möglich, und zwar kommt speziell in den Gleichungen S. 186 (25), wenn man darin $l=k$ annimmt, gerade die Größe vor, die auch in (10) enthalten ist, nämlich

$$\frac{\mu_{2k}}{\sqrt{\Delta}}\sum_i \mu_{1i}\,\overline{m}_{ik} = -\frac{\partial \mu_{1k}}{\partial u_k} - \sum_\varrho \begin{Bmatrix}\varrho\ k\\ k\end{Bmatrix}\mu_{1\varrho}.$$

Es folgt, wenn wie vorher l für k gesetzt und in der Doppelsumme ϱ mit l vertauscht wird,

$$-g' = \sum_l \frac{\partial \mu_{1l}}{\partial u_l} + \sum_l \mu_{1l}\sum_\varrho \begin{Bmatrix}l\ \varrho\\ \varrho\end{Bmatrix}$$

$$= \sum_l \frac{\partial \mu_{1l}}{\partial u_l} + \sum_l \mu_{1l}\,\frac{\partial \log\sqrt{a}}{\partial u_l}$$

(12) $$-g' = \frac{1}{\sqrt{a}}\sum_l \frac{\partial(\mu_{1l}\sqrt{a})}{\partial u_l}$$

$$-g' = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial(T\mu_{11})}{\partial u} + \frac{\partial(T\mu_{12})}{\partial v}\right)$$

oder nach § 49 (9, 22):

(13) $$g' = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial m_{21}}{\partial v} - \frac{\partial m_{22}}{\partial u}\right).$$

Dieser Ausdruck gehört zu (6). Er lautet vollständig:

(14) $$g' = -\frac{1}{T}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{T m_2}{\sqrt{G m_1^2 - 2F m_1 m_2 + E m_2^2}} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{T m_1}{\sqrt{G m_1^2 - 2F m_1 m_2 + E m_2^2}}\right),$$

und für $\mathfrak{M}_0 = d\varphi$:

$$(15)\qquad g' = -\frac{1}{T}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{T\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{T\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}}\right).$$

Es sei nun

$$p_1 du + p_2 dv \equiv \mathfrak{P}_0$$

eine beliebige lineare Differentialform. Die Bedingung für ihre Integrabilität ist

$$\frac{\partial p_2}{\partial u} - \frac{\partial p_1}{\partial v} = 0.$$

Sie hängt von den Variablen, die zur Darstellung von $\mathfrak{P}_0$ dienen, nicht ab, und dies findet seinen Ausdruck in der aus den Transformationsgleichungen

$$p_i = \sum_h p'_h \frac{\partial u'_h}{\partial u_i}$$

hervorgehenden Beziehung

$$(16)\qquad \frac{\partial p_2}{\partial u} - \frac{\partial p_1}{\partial v} = \left(\frac{\partial p'_2}{\partial u'} - \frac{\partial p'_1}{\partial v'}\right)\triangle'.$$

Durch Division mit

$$T = T'\triangle'$$

wird die Invarianz in eine absolute verwandelt:

$$(17)\qquad \frac{1}{T}\left(\frac{\partial p_2}{\partial u} - \frac{\partial p_1}{\partial v}\right) = \frac{1}{T'}\left(\frac{\partial p'_2}{\partial u'} - \frac{\partial p'_1}{\partial v'}\right).$$

Die Größe

$$(18)\qquad \frac{1}{T}\left(\frac{\partial p_2}{\partial u} - \frac{\partial p_1}{\partial v}\right) \equiv J_a(\mathfrak{P}_0),$$

eine simultane Invariante des Formenpaares $(\mathsf{A}, \mathfrak{P}_0)$, heißt die **Integrabilitäts-Invariante** der Differentialform $\mathfrak{P}_0$. Wo ein Zweifel nicht entstehen kann, soll nicht nur die Bezugnahme auf die Grundform A in Benennung und Bezeichnung unterbleiben, sondern auch der Ausdruck $J(\mathfrak{P}_0)$ einfach als Invariante von $\mathfrak{P}_0$ bezeichnet werden.

Durch solche Invarianten also lassen sich g und g' nach (6) und (13) darstellen, und zwar ist

$$(19)\qquad g = J(\mathfrak{M}_1)$$

$$(20)\qquad g' = -J(\mathfrak{M}_2).$$

Dabei ging $\mathfrak{M}_1$ aus der Kovariante $D_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0)$, $\mathfrak{M}_2$ aus $\mathfrak{M}_0$ selbst durch Division mit $\sqrt{\Delta}$ hervor:

$$(21)\qquad \mathfrak{M}_1 = \frac{1}{T\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} Edu + Fdv, & Fdu + Gdv \\ m_1 \quad , & m_2 \end{vmatrix}.$$

$$(22)\qquad \mathfrak{M}_2 = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}(m_1 du + m_2 dv)$$

(S. 178 (23), (24)).

§ 52.

Die geodätische Windung.

Von den Größen, die in den allgemeinen Frenetschen Formeln als Koeffizienten von Richtungskosinus aufgetreten sind, ist nun noch eine zu berechnen: die geodätische Windung (S. 60), definiert durch die Gleichung

$$(1)\qquad \sum X\Theta A' = t$$

(S. 54 (14)). Sie ist zwar im § 17 (S. 61) zu der Windung selbst und zu einem bestimmten Winkel in Beziehung gesetzt worden, aber die Darstellung durch die Bestimmungsgrößen der Flächenkurve c steht noch aus.

Ebenso wie bei der Normal- und Tangentialkrümmung (§ 18 und 39) soll auch hier zuerst mit Differentialen operiert werden.

Wegen der zusammengesetzten Ausdrücke der Richtungskosinus A', B', C' (S. 54 (9)) ist es zweckmäßig, die Identität

$$\sum XA' = 0$$

zu benutzen und demnach

$$(2)\qquad t = -\sum A'\Theta X$$

als Ausgangsformel zu betrachten. Sie ist gleichbedeutend mit

$$-t = \sum A' \frac{dX}{ds} = \sum (CY - BZ)\frac{dX}{ds}$$

$$(3)\qquad -t ds^2 = \sum (Ydz - Zdy)dX$$

oder in Determinantenform

$$(4)\qquad t ds^2 = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ X & Y & Z \\ dX & dY & dZ \end{vmatrix}.$$

Dieser Ausdruck ist schon in der Theorie der Normalkrümmung (S. 94) vorgekommen. Und zwar lieferte er, gleich Null gesetzt, die beiden

Haupttangenten der Fläche, sodaß die dort mit (21) bezeichnete Gleichung sich direkt in die von früher (§ 24) her bekannte Bestimmungsgleichung dieser Tangenten mußte überführen lassen. Jedenfalls ergibt sich sofort der Satz, daß die geodätische Windung einer Kurve, deren Tangente mit einer Haupttangente zusammenfällt, gleich Null ist.

Die Umwandlung der rechten Seite von (4) für die Flächendarstellung (I) ist mit Hilfe der Formeln S. 126(4) ausführbar, die u. a. als Spezialfälle von S. 57(1) aufgefaßt werden können und sich in

$$(5)\quad Ydz - Zdy = \frac{1}{T}\left[\left(-F\frac{\partial x}{\partial u} + E\frac{\partial x}{\partial v}\right)du + \left(-G\frac{\partial x}{\partial u} + F\frac{\partial x}{\partial v}\right)dv\right]$$

zusammenziehen lassen. Multipliziert man mit

$$dX \equiv \frac{\partial X}{\partial u}du + \frac{\partial X}{\partial v}dv,$$

summiert, wie die Gleichung (3) es fordert, und benutzt die zweiten Werte der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung (S. 75(4)), so findet man

$$(6)\quad Ttds^2 = (EM - FL)du^2 + (EN - GL)du\,dv + (FN - GM)dv^2.$$

Dieser Ausdruck ist in der Tat mit der linken Seite von S. 76(5) identisch, d. h. es wird

$$(7)\quad t = \frac{1}{Tds^2}\begin{vmatrix} Edu + Fdv, & Fdu + Gdv \\ Ldu + Mdv, & Mdu + Ndv \end{vmatrix}.$$

Um das Bildungsgesetz im formentheoretischen Sinne zu beschreiben, hat man den Faktor $\frac{1}{T}$ zum Zähler hinzuzuziehen. Dieser Zähler ist dann die, durch Division mit $4T$ in eine absolute Kovariante verwandelte Funktionaldeterminante der beiden Grundformen A und B. Die Form

$$D_a(\mathsf{A}, \mathsf{B}) \equiv \frac{1}{T}\begin{vmatrix} Edu + Fdv, & Fdu + Gdv \\ Ldu + Mdv, & Mdu + Ndv \end{vmatrix}$$

soll als die quadratische Kovariante des Formenpaares (A, B) bezeichnet, und

$$(8)\quad D_a(\mathsf{A}, \mathsf{B}) = \Gamma$$

gesetzt werden. Die geodätische Windung hat den Wert

$$(9)\quad t = \frac{\Gamma}{\mathsf{A}}.$$

Für die Kurvendarstellungen $\mathfrak{M}_0 = 0$ und $\varphi(u, v) = C$ können die Formeln für t hieraus sofort abgelesen werden. Man bekommt

$$(10)\qquad t=\frac{(EM-FL)m_2^2-(EN-GL)m_2m_1+(FN-GM)m_1^2}{T(Em_2^2-2Fm_2m_1+Gm_1^2)},$$

und speziell für $\mathfrak{M}_0 = d\varphi$

$$(11)\qquad t=\frac{(EM-FL)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2-(EN-GL)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+(FN-GM)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2}{T\left(E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2-2F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2\right)}.$$

Nach dem, was in den Paragraphen 44, 45, 48 und im Anfange von 49 auseinandergesetzt worden ist, kann man diese Ausdrücke noch in verschiedener Weise formal verändern. Wird

$$(12)\qquad \Gamma = c_{11}du^2+2c_{12}du\,dv+c_{22}dv^2\equiv\sum_{i,k}c_{ik}du_i du_k,$$

also

$$(13)\qquad c_{11}=\frac{EM-FL}{T},\qquad c_{12}=\frac{EN-GL}{2T},\qquad c_{22}=\frac{FN-GM}{T}$$

gesetzt, so nimmt z. B. der Zähler von (11) $\left(\text{mit dem Faktor } \frac{1}{T}\right)$ die Form

$$c_{22}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2-2c_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+c_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2$$

an, wird also gleich dem Zähler des mittels der Grundform Γ gebildeten Differentialparameters erster Ordnung der Funktion φ. Dividiert man nun, statt durch die Determinante von Γ, durch die der Form A und bezeichnet

$$(14)\qquad \frac{1}{a}\left(c_{22}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2-2c_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+c_{11}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\right)=\Delta_{ac}^1\varphi,$$

so erhält man

$$(15)\qquad t=\frac{\Delta_{ac}^1\varphi}{\Delta_a^1\varphi}.$$

Beiläufig bemerkt, würde bei dieser Schreibweise für die Normalkrümmung nach S. 64 (10) die Formel

$$(16)\qquad n=\frac{\Delta_{ab}^1\varphi}{\Delta_a^1\varphi}$$

gelten.

Von den Ausdrücken, auf die man durch die Formentheorie geführt wird, sind die in Summenform besonders wichtig (vgl. S. 153). Für den Zähler von t tritt das Bildungsgesetz einer solchen Darstellung am deutlichsten hervor, wenn die quadratische Kovariante von A und B,

$$D_a(\mathsf{A},\mathsf{B})\equiv\frac{1}{\sqrt{a}}\begin{vmatrix}a_{11}\xi_1+a_{12}\xi_2, & a_{21}\xi_1+a_{22}\xi_2\\ b_{11}\xi_1+b_{12}\xi_2, & b_{21}\xi_1+b_{22}\xi_2\end{vmatrix},$$

zunächst zu einer bilinearen,

$$D_a(\mathsf{A}, \bar{\mathsf{B}}) \equiv \frac{1}{\sqrt{a}} \begin{vmatrix} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2, & a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 \\ b_{11}\eta_1 + b_{12}\eta_2, & b_{21}\eta_1 + b_{22}\eta_2 \end{vmatrix}$$

verallgemeinert wird. Entwickelt man diesen Ausdruck nach den Produkten $\xi_i\eta_k$, erweitert, um die Größen $\alpha_{\lambda\mu}$ einzuführen, mit $\sqrt{a}$ und setzt

$$\sqrt{a}\,\xi_1 = x_2, \qquad -\sqrt{a}\,\xi_2 = x_1,$$

so findet man

$$D_a(\mathsf{A}, \bar{\mathsf{B}}) = \sum_{\lambda, i, k} \alpha_{\lambda i} b_{\lambda k} x_i \eta_k. \tag{17}$$

Mittels der Theorie der kogredienten und kontragredienten Größensysteme kann man diese Form auf mannigfache andere Arten als kovariant nachweisen; doch handelt es sich für die vorliegende Anwendung hierum nicht. Die Formel (10) geht aus (17) und

$$\mathsf{A} = \sum_{i,k} a_{ik} \xi_i \xi_k$$

dadurch hervor, daß ξ_1 und η_1 übereinstimmend durch m_2, ξ_2 und η_2 durch $-m_1$, also x_1 durch $\sqrt{a}\,m_1$ und x_2 durch $\sqrt{a}\,m_2$ ersetzt werden. Zähler und Nenner für sich verlieren dabei den Charakter der absoluten Invarianz, der aber durch Erweiterung mit $T^{-2} \equiv a^{-1}$ wiederhergestellt wird. Der Nenner erhält dann den Wert Δ (S. 175), und der Zähler wird, für

$$\frac{m_2}{T} = \mu_1, \qquad -\frac{m_1}{T} = \mu_2$$

(S. 174 (13)), gleich

$$\sum_{\lambda, i, k} \alpha_{\lambda i} b_{\lambda k} m_i \mu_k.$$

Für die Kurvendarstellung $\mathfrak{M}_0 = 0$ wird demnach die geodätische Windung durch die Formel

$$t = \frac{\sum\limits_{\lambda, i, k} \alpha_{\lambda i} b_{\lambda k} m_i \mu_k}{\sum\limits_{i,k} \alpha_{ik} m_i m_k} \tag{18}$$

bestimmt.

Sie ist u. a. für den Übergang zur orthogonalen Trajektorie c' nützlich. Die Koeffizienten m_i von $\mathfrak{M}_0$ werden hierbei durch die der Kovariante $D_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0)$, nämlich

$$\sum_i a_{il} \mu_i$$

(S. 176) vertreten, und demnach die kontragredienten Größen μ_i durch

$$-\sum_\lambda \alpha_{i\lambda} m_\lambda.$$

Der Nenner des Ausdruckes bleibt für diese Substitutionen ungeändert (a. a. O.). Der Zähler von t' erhält den Wert

$$\sum_{\lambda, i, k} \alpha_{\lambda i} b_{\lambda k} \Big(\sum_{p} a_{ip} \mu_p\Big)\Big(\sum_{q} - \alpha_{kq} m_q\Big)$$

$$= -\sum_{k, p, q} b_{pk} \alpha_{kq} \mu_p m_q \equiv -\sum_{\lambda, k, i} \alpha_{\lambda i} b_{k\lambda} m_i \mu_k,$$

und es folgt

(19) $$t' = -t.$$

Die geodätischen Windungen zweier zueinander senkrechten Flächenkurven haben entgegengesetzt gleiche Werte.

Da der Nenner in der Formel (18) gleich Δ war, ferner die Gleichungen

$$\frac{m_i}{\sqrt{\Delta}} = m_{2i} \qquad (\S\ 49\,(22))$$

$$\sum_{i} \alpha_{\lambda i} m_{2i} = \mu_{2\lambda} \qquad (\S\ 49\,(32))$$

$$\frac{\mu_k}{\sqrt{\Delta}} = \mu_{1k} \qquad (\S\ 48\,(13);\ \S\ 49\,(9))$$

gelten, so kann man

(20) $$t = \sum_{k, \lambda} \mu_{1k} \mu_{2\lambda} b_{k\lambda}$$

setzen. In dieser Gestalt würde man den Ausdruck erhalten haben, wenn man in die Gleichung (2), nämlich

$$t = -\sum \Theta' x \,.\, \Theta X,$$

sofort die Werte der geometrischen Ableitungen, und zwar für die Kurvendarstellung $\mathfrak{M}_0 = 0$, eingeführt hätte.

Zwischen der geodätischen Windung und der Normalkrümmung besteht ein einfacher Zusammenhang, der darauf beruht, daß das Quadrat der Funktionaldeterminante von A und B sich in ähnlicher Weise darstellen läßt wie auf S. 179 das Quadrat der Funktionaldeterminante von A und einer linearen Form $\mathfrak{M}_0$. Da die Koeffizienten von du^2, $du\,dv$ und dv^2 auf der rechten Seite von (6) die drei Determinanten zweiten Grades sind, die sich aus der Matrix

$$\begin{Vmatrix} E & F & G \\ L & M & N \end{Vmatrix}$$

bilden lassen, so kann man den Ausdruck selbst als Determinante dritten Grades schreiben:

$$\begin{vmatrix} Edu+Fdv, & Fdu+Gdv \\ Ldu+Mdv, & Mdu+Ndv \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E & F & G \\ L & M & N \\ dv^2 & -du\,dv & du^2 \end{vmatrix}.$$

Übrigens ist uns diese Determinante gelegentlich einer speziellen Untersuchung über Flächentangenten bereits begegnet (S. 114). Wir multiplizieren sie mit sich selbst, ändern aber im zweiten Faktor die Anordnung der Elemente, wie es ja bei der Anwendung des Multiplikationstheorems der Determinanten häufig von Nutzen ist. In der Produktdeterminante treten die Formen A und B selbst als Elemente auf, wenn man bildet:

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} E & F & G \\ L & M & N \\ dv^2 & -du\,dv & du^2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} du^2 & 2du\,dv & dv^2 \\ G & -2F & E \\ N & -2M & L \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} Edu^2+2Fdudv+Gdv^2, & 2(EG-F^2), & GL-2FM+EN \\ Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2, & GL-2FM+EN, & 2(LN-M^2) \\ 0, & Edu^2+2Fdudv+Gdv^2, & Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathsf{A} & 2T^2 & HT^2 \\ \mathsf{B} & HT^2 & 2KT^2 \\ 0 & \mathsf{A} & \mathsf{B} \end{vmatrix}$$

(nach S. 77 (19, 20)). Hiernach wird

$$(21)\qquad D_a(\mathsf{A}, \mathsf{B})^2 = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathsf{A} & 2 & H \\ \mathsf{B} & H & 2K \\ 0 & \mathsf{A} & \mathsf{B} \end{vmatrix}$$

$$(22)\qquad \Gamma^2 = -K\mathsf{A}^2 + H\mathsf{A}\mathsf{B} - \mathsf{B}^2.$$

Dieser elementare Satz der Formentheorie ist von der Bedeutung von A und B völlig unabhängig, wofern nur unter H und K die beiden im § 45 (S. 160) definierten simultanen Invarianten des Paares (A, B) verstanden werden. Auf die gegenwärtige flächentheoretische Untersuchung angewendet, liefert er:

$$(23)\qquad t^2 = -K + Hn - n^2$$

oder

$$(24)\qquad t^2 = (n_1 - n)(n - n_2),$$

also einen Ausdruck des Quadrats der geodätischen Windung einer Kurve durch die Normalkrümmung dieser Kurve und die beiden Hauptkrümmungen.

§ 53.

Die allgemeinen Frenetschen Formeln für die orthogonale Trajektorie einer gegebenen Kurve.

Die Fragen, die sich an die allgemeinen Frenetschen Formeln knüpften (S. 56), sind nunmehr vollständig beantwortet; das Bildungsgesetz sämtlicher Glieder der Formeln ist bekannt, und zwar unter Annahme beliebiger krummliniger Koordinaten und für die allgemeinste Darstellung der Flächenkurve c. Im unmittelbaren Anschluß an die entsprechenden Formeln der allgemeinen Theorie der Raumkurven enthalten die Gleichungen § 16 (a), (b), (c) (S. 55) die geometrischen Ableitungen bestimmter Richtungskosinus für eine Differentiation längs der Kurve c. Aber auch die Differentiation senkrecht zur Kurve hat im Vorhergehenden beständig benutzt werden müssen, und vom Standpunkt der Flächentheorie aus war sie sogar als Grundoperation zu betrachten (S. 130). Es bietet sich also die Aufgabe dar, die Formeln des § 16 durch ein zweites System zu ergänzen, in welchem die geometrischen Ableitungen derselben Richtungskosinus wie dort für eine Differentiation längs der orthogonalen Trajektorie c' auftreten.

Einer wesentlich neuen Untersuchung bedarf es hierzu nicht. Man hat nur die Festsetzungen über bestimmte Größen und Richtungen, die für die Kurve c getroffen worden sind, auf c' als Grundkurve anzuwenden. Nun ist bereits bestimmt worden, daß t', die positive Richtung der Tangentialnormale von c, für die Trajektorie c' dieselbe Bedeutung habe wie t für c, sodaß $\Theta'\chi$ für die Kurve c' der Ableitung $\Theta\chi$ für die Linie c entspricht. Der Ausdruck von $\Theta'\chi$ ist aufgestellt worden (S. 138, 176). Wird vorübergehend unter t_1 diejenige Richtung der Tangentialnormale von c' verstanden, die zu t' so liegt wie t' zu t, sodaß

$$t', t_1 \sim t, t'$$

oder einfach

$$t_1 \sim -t$$

ist, so mögen alle Größen, die von t_1 abhängen, außer mit einem Akzent (als auf die Kurve c' bezüglich) auch mit einem Index 1 versehen werden. Dies gilt namentlich für die geometrische Ableitung $\Theta_1'\chi$, die für c' der Ableitung $\Theta'\chi$ für c entspricht, ferner für die Richtungskosinus $A_1' \equiv \Theta_1' x, \ldots$, und endlich für die Größen t_1' und g_1', wie sie durch formalen Übergang von c zu c' zu definieren sind, nämlich nach S. 54 (14) und S. 55 (15):

$$t_1' = \sum X\,\Theta' A_1'$$

$$g_1' = \sum A_1' \Theta' A'.$$

Dagegen bedarf es der Beifügung des Index nicht bei der Normalkrümmung von c',

(1) $$n' = \sum X \Theta' A'.$$

Die ersten Formeln der drei Systeme (a), (b), (c) heißen dann für die Kurve c'

$$\Theta' A' = \quad g_1' A_1' + n' X$$

$$\Theta' A_1' = - g_1' A' + t_1' X$$

$$\Theta' X = - n' A' - t_1' A_1'.$$

Um in der Tangentialebene nicht drei Richtungen, von denen zwei einander entgegengesetzt sind, berücksichtigen zu müssen, ist aber ferner (S. 138) die positive Tangentialnormale von c' als mit t (nicht t_1) zusammenfallend angenommen, und demnach die Tangentialkrümmung der Trajektorie durch die Gleichung § 41 (3) (a. a. O.)

$$g' = \sum A \Theta' A'$$

erklärt worden. Wegen

$$A_1' = - A, \ldots$$

kann g_1' unmittelbar auf g' zurückgeführt werden:

$$g_1' = - \sum A \, \Theta' A' = - g'.$$

Für t_1' ergibt sich in gleicher Weise der Ausdruck

$$- \sum X \Theta' A \equiv \sum A \, \Theta' X.$$

Berechnet man diese Größe direkt nach dem im vorigen Paragraphen (S. 196) angedeuteten Verfahren, so erhält man

$$t_1' = \sum \Theta x \,.\, \Theta' X$$

$$= \sum \Big(\sum_i \mu_{1i} \frac{\partial x}{\partial u_i} \Big) \Big(\sum_k \mu_{2k} \frac{\partial X}{\partial u_k} \Big)$$

$$= - \sum_{i,k} \mu_{1i} \mu_{2k} b_{ik},$$

also

$$t_1' = - t.$$

Was die Größe n' angeht, so läßt sich ihr Wert mittels des Überganges von c zu c', also von $\mathfrak{M}_0$ zu $D_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0)$, aus dem von n ablesen:

(2) $$n' = \frac{N(Em_2 - Fm_1)^2 - 2M(Em_2 - Fm_1)(Fm_2 - Gm_1) + L(Fm_2 - Gm_1)^2}{T^2(Gm_1^2 - 2Fm_1 m_2 + Em_2^2)}.$$

Im formentheoretischen Sinne übersichtlicher wird der Ausdruck beim Ausgehen von der Gleichung (1) oder

(3) $$n' = -\sum A'\Theta' X \equiv -\sum \Theta' x \,.\, \Theta' X,$$

nämlich:

$$n' = -\sum\left(\sum_i \mu_{2i}\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)\left(\sum_k \mu_{2k}\frac{\partial X}{\partial u_k}\right)$$

(4) $$n' = \sum_{i,k} \mu_{2i}\mu_{2k} b_{ik}.$$

Die Größe n selbst würde nach ihrer ursprünglichen Definition

$$n = \sum X\Theta A,$$

d. h.

(5) $$n = -\sum A\Theta X \equiv -\sum \Theta x \,.\, \Theta X,$$

bei Benutzung des allgemeinen Ausdruckes von $\Theta\chi$ die Form

$$n = -\sum\left(\sum_i \mu_{1i}\frac{\partial x}{\partial u_i}\right)\left(\sum_k \mu_{1k}\frac{\partial X}{\partial u_k}\right)$$

(6) $$n = \sum_{i,k} \mu_{1i}\mu_{1k} b_{ik}$$

annehmen. Aus (4) und (6) folgt

$$\begin{aligned} n + n' &= \sum_{i,k} b_{ik} \sum_\lambda \mu_{\lambda i}\mu_{\lambda k} \\ &= \sum_{i,k} b_{ik}\alpha_{ik} && \text{(S. 180 (36))} \\ &= H_a(\mathsf{A}, \mathsf{B}) && \text{(S. 160 (3))} \\ &= H && \text{(S. 162).} \end{aligned}$$

Man erhält also aus den allgemeinsten Formeln für n und n' auf direktem Wege die Relation

(7) $$n + n' = n_1 + n_2$$

wieder, die früher (S. 85 (4)) aus dem Eulerschen Satze geschlossen worden ist.

Nach Elimination sämtlicher Größen mit dem Index 1 lauten nun die Ergänzungsformeln, vollständig zusammengestellt:

(a') $$\begin{aligned} \Theta' A &= -g'A' + tX \\ \Theta' B &= -g'B' + tY \\ \Theta' C &= -g'C' + tZ \end{aligned}$$

$$\text{(b}') \qquad \begin{aligned} \Theta' A' &= g' A + n' X \\ \Theta' B' &= g' B + n' Y \\ \Theta' C' &= g' C + n' Z \end{aligned}$$

$$\text{(c}') \qquad \begin{aligned} \Theta' X &= -tA - n' A' \\ \Theta' Y &= -tB - n' B' \\ \Theta' Z &= -tC - n' C' \end{aligned}$$

oder in symbolischer Schreibweise, wie S. 56 (17):

$$(8) \qquad \begin{pmatrix} \Theta' A, & \Theta' B, & \Theta' C \\ \Theta' A', & \Theta' B', & \Theta' C' \\ \Theta' X, & \Theta' Y, & \Theta' Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -g' & t \\ g' & 0 & n' \\ -t & -n' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & A' & X \\ B & B' & Y \\ C & C' & Z \end{pmatrix}.$$

Diese Gleichungen sollen von nun an unter der Bezeichnung „allgemeine Frenetsche Formeln“ mit verstanden werden. Die sechs Gleichungssysteme zusammen enthalten erst die vollständige Verallgemeinerung der Frenetschen Formeln aus der Kurventheorie. Denn im zweidimensionalen Gebiete handelt es sich um zwei verschiedene Ableitungen einer Funktion, $\frac{\partial \chi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \chi}{\partial v}$, und diese werden durch die geometrischen Ableitungen $\Theta \chi$ und $\Theta' \chi$ vertreten. Aus diesem Grunde reicht aber auch die Bedeutung der geometrischen Ableitungen weit über ihr Vorkommen in den allgemeinen Frenetschen Formeln hinaus.

§ 54.

Die Vertauschungsformel für geometrische Differentiationen.

Als homogene lineare Funktionen von $\frac{\partial \chi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \chi}{\partial v}$ gehorchen die geometrischen Ableitungen den elementaren Regeln über die Differentiation von Summen, Produkten, Quotienten, wie sie auch wiederholt bereits angewendet worden sind. Aber sobald man über die erste Ordnung der Differentiationen hinausgeht, müssen neue Untersuchungen eintreten, und vor allem ist es wichtig festzustellen, was aus der Vertauschbarkeit der Differentiationsfolge, durch die Gleichung

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \chi}{\partial v \, \partial u} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial u \, \partial v} = 0$$

dargestellt, über die geometrischen Ableitungen zweiter Ordnung geschlossen werden kann.

Hierzu sind $\frac{\partial \chi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \chi}{\partial v}$ durch $\Theta \chi$ und $\Theta' \chi$ auszudrücken. Soll das Resultat in eine einzige Formel zusammengefaßt werden, so hat man nicht nur, wie gewöhnlich, die Variablen, sondern auch die

geometrischen Ableitungen mit Indizes zu belegen. Die Auflösung der Gleichungen

(2) $$\vartheta_k \chi = \sum_\nu \mu_{k\nu} \frac{\partial \chi}{\partial u_\nu}$$

(S. 177 (14)) liefert dann

(3) $$\frac{\partial \chi}{\partial u_i} = \sum_\lambda m_{\lambda i} \vartheta_\lambda \chi$$

oder, nunmehr getrennt:

(4) $$\frac{\partial \chi}{\partial u} = m_{11} \Theta \chi + m_{21} \Theta' \chi$$
$$\frac{\partial \chi}{\partial v} = m_{12} \Theta \chi + m_{22} \Theta' \chi$$

(vgl. a. a. O. (19)).

Aus (3) folgt weiter

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial u_k \partial u_i} = \sum_\lambda m_{\lambda i} \vartheta_\lambda \Big(\sum_\nu m_{\nu k} \vartheta_\nu \chi \Big) = \sum_{\lambda, \nu} m_{\lambda i} (m_{\nu k} \vartheta_\lambda \vartheta_\nu \chi + \vartheta_\nu \chi \vartheta_\lambda m_{\nu k}),$$

mithin

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial u_k \partial u_i} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial u_i \partial u_k} = \sum_{\lambda, \nu} (m_{\lambda i} m_{\nu k} - m_{\lambda k} m_{\nu i}) \vartheta_\lambda \vartheta_\nu \chi$$
$$+ \sum_\nu \vartheta_\nu \chi \sum_\lambda (m_{\lambda i} \vartheta_\lambda m_{\nu k} - m_{\lambda k} \vartheta_\lambda m_{\nu i}).$$

Der Koeffizient von $\vartheta_\nu \chi$ in dem zweiten Summenausdruck kann von vornherein einfacher in der Form

$$\frac{\partial m_{\nu k}}{\partial u_i} - \frac{\partial m_{\nu i}}{\partial u_k}$$

geschrieben werden. Setzt man dann $i = 1$, $k = 2$, so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial u_2 \partial u_1} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial u_1 \partial u_2} = \sum_{\lambda, \nu} (m_{\lambda 1} m_{\nu 2} - m_{\lambda 2} m_{\nu 1}) \vartheta_\lambda \vartheta_\nu \chi$$
$$+ \sum_\nu \Big(\frac{\partial m_{\nu 2}}{\partial u_1} - \frac{\partial m_{\nu 1}}{\partial u_2} \Big) \vartheta_\nu \chi.$$

Bei der Ausrechnung der ersten Summe ist nur $\lambda \gtrless \nu$, also $\lambda = 1$, $\nu = 2$ und $\lambda = 2$, $\nu = 1$ zu berücksichtigen, außerdem die Gleichung S. 179 (28)

$$m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21} = \sqrt{a}$$

hinzuzuziehen. Es wird

(5) $$\frac{\partial^2 \chi}{\partial u_2 \partial u_1} - \frac{\partial^2 \chi}{\partial u_1 \partial u_2} = \sqrt{a} (\vartheta_1 \vartheta_2 \chi - \vartheta_2 \vartheta_1 \chi)$$
$$+ \Big(\frac{\partial m_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial m_{11}}{\partial u_2} \Big) \vartheta_1 \chi + \Big(\frac{\partial m_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial m_{21}}{\partial u_2} \Big) \vartheta_2 \chi.$$

Geht man nun zu (1) zurück und benutzt die Formeln S. 188 (6),

S. 190 (13), ohne aber auch die Größen g noch mit Indizes zu versehen, so erhält man die gesuchte Beziehung

(6) $$\vartheta_1\vartheta_2\chi - \vartheta_2\vartheta_1\chi + g\vartheta_1\chi - g'\vartheta_2\chi = 0$$

oder

(7) $$\Theta'\Theta\chi - \Theta\Theta'\chi = g\Theta\chi - g'\Theta'\chi.$$

Die Invarianten von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$, die in der Flächentheorie die Tangentialkrümmungen der Kurven c und c' darstellen, gewinnen hierdurch eine besondere Bedeutung für die allgemeine Theorie der Theta-Operationen.

Die Gleichung (1) ist die Integrabilitätsbedingung für die Differentialform $\frac{\partial\chi}{\partial u}du + \frac{\partial\chi}{\partial v}dv$, und die linke Seite von (5), durch $\sqrt{a}$ dividiert, repräsentiert die Invariante dieser Form (S. 191). Demnach muß die Gleichung (5) selbst als Spezialfall in einer Formel enthalten sein, die die Invariante einer beliebigen linearen Differentialform $\mathfrak{P}_0$ durch die Invarianten von $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ und bestimmte andere Invarianten des Formensystems $(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0, \mathfrak{P}_0)$ ausdrückt. In $\mathfrak{P}_0 \equiv p_1 du + p_2 dv$ werden $\frac{\partial\chi}{\partial u}$ und $\frac{\partial\chi}{\partial v}$ durch p_1 und p_2 vertreten, das Gleichungspaar (2) durch die Definitionsformeln

(8) $$\mathfrak{p}_k = \sum_\nu \mu_{k\nu} p_\nu,$$

aus denen

(9) $$p_i = \sum_\lambda m_{\lambda i}\mathfrak{p}_\lambda$$

folgt. Gesucht wird ein Ausdruck für

$$J_a(\mathfrak{P}_0) \equiv \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial p_2}{\partial u_1} - \frac{\partial p_1}{\partial u_2}\right)$$

(S. 191 (18)). Genau wie eben ergibt sich

$$\frac{\partial p_k}{\partial u_i} - \frac{\partial p_i}{\partial u_k} = \sum_{\lambda,\nu}(m_{\lambda i}m_{\nu k} - m_{\lambda k}m_{\nu i})\,\vartheta_\lambda\mathfrak{p}_\nu + \sum_\nu\left(\frac{\partial m_{\nu k}}{\partial u_i} - \frac{\partial m_{\nu i}}{\partial u_k}\right)\mathfrak{p}_\nu$$

$$\frac{\partial p_2}{\partial u_1} - \frac{\partial p_1}{\partial u_2} = \sqrt{a}(\vartheta_1\mathfrak{p}_2 - \vartheta_2\mathfrak{p}_1) + \left(\frac{\partial m_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial m_{11}}{\partial u_2}\right)\mathfrak{p}_1 + \left(\frac{\partial m_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial m_{21}}{\partial u_2}\right)\mathfrak{p}_2,$$

und nach Division mit $\sqrt{a}$:

(10) $$J(\mathfrak{P}_0) = \vartheta_1\mathfrak{p}_2 - \vartheta_2\mathfrak{p}_1 + J(\mathfrak{M}_1)\mathfrak{p}_1 + J(\mathfrak{M}_2)\mathfrak{p}_2.$$

Die spezielle Gleichung (7) oder (6), die aus (10) für $\mathfrak{P}_0 = d\chi$ hervorgeht, soll im Folgenden als Vertauschungsformel zitiert werden.

VI. Abschnitt.

Die drei Fundamentalgleichungen.

§ 55.

Drei Relationen zwischen geometrischen Größen und ihren Ableitungen.

Die allgemeinen Frenetschen Formeln in ihrer Gesamtheit ermöglichen es, die geometrischen Differentialquotienten beliebiger Ordnung der Richtungskosinus der Flächennormale, sowie der Tangente und Tangentialnormale einer Flächenkurve als homogene lineare Funktionen dieser Richtungskosinus selbst darzustellen, und zwar z. B. eine beliebige Ableitung von A als Funktion von A, A', X, und entsprechend für die übrigen Kosinus. Die Koeffizienten in den abgeleiteten Gleichungen werden aus denen in den Ausgangsgleichungen und ihren geometrischen Ableitungen zusammengesetzt.

Schon bei den Differentiationen zweiter Ordnung müssen sich äquivalente Resultate herausstellen, wenn man auf einen und denselben Kosinus einmal die Operation $\Theta'\Theta$, dann $\Theta\Theta'$ anwendet. Die Wirkung der Vertauschungsformel für $\chi = A$, A' und X zu untersuchen, ist von grundlegender Wichtigkeit. Bei Fortsetzung der Operationen sind dann, ebenso wie in der gewöhnlichen Differentialrechnung, die Ergebnisse leicht zu überblicken.

Bildet man $\Theta'\Theta A$ und $\Theta\Theta' A$ aus den ersten Gleichungen (a) und (a') (S. 55 und 200), so findet man, unter sofortiger Benutzung der ersten Gleichungen der übrigen Systeme $(b), (c), (b'), (c')$,

$$\Theta'\Theta A = g(g'A + n'X) + A'\Theta' g - n(tA + n'A') + X\Theta' n$$

$$\Theta\Theta' A = g'(gA - tX) - A'\Theta g' - t(nA + tA') + X\Theta t.$$

Der Kosinus A fällt bei der Subtraktion weg und kann auch auf der rechten Seite der Vertauschungsformel

$$\Theta'\Theta A - \Theta\Theta' A = g\Theta A - g'\Theta' A$$

nicht wieder auftreten. Es wird

$$\Theta'\Theta A - \Theta\Theta' A = g(gA' + nX) + g'(g'A' - tX),$$

und die entstehende Gleichung erhält die Form

$$\alpha A' + \beta X = 0.$$

Die Größen α und β, nur vorübergehend eingeführt, haben die Ausdrücke

$$\alpha = \Theta' g + \Theta g' - g^2 - g'^2 - (nn' - t^2)$$
$$\beta = \Theta' n - \Theta t + 2g't - (n - n')g$$

und behalten diese Werte, wenn man in der Rechnung B, B', Y oder C, C', Z an die Stelle von A, A', X treten läßt. Die drei Gleichungen

$$\alpha A' + \beta X = 0, \qquad \alpha B' + \beta Y = 0, \qquad \alpha C' + \beta Z = 0$$

liefern, mit A', B', C', dann mit X, Y, Z multipliziert und addiert,

$$\alpha = 0, \qquad \beta = 0.$$

Vergleicht man nun weiter $\Theta'\Theta A'$ mit $\Theta\Theta' A'$, so bekommt man eine neue Gruppe von drei homogenen linearen Gleichungen unter den Richtungskosinus, und zwar

$$\alpha A + \beta' X = 0, \qquad \alpha B + \beta' Y = 0, \qquad \alpha C + \beta' Z = 0,$$

wo α denselben Wert hat wie oben, und

$$\beta' = \Theta n' - \Theta' t + 2gt - (n' - n)g'$$

aus β durch unmittelbar ersichtliche Vertauschungen abgelesen werden kann. Zu den beiden Bedingungen von vorher tritt

$$\beta' = 0.$$

Die Berechnung von $\Theta'\Theta X - \Theta\Theta' X$ liefert nichts Neues, wegen der Abhängigkeit der dritten Systeme allgemeiner Frenetscher Formeln von den beiden ersten. Man erhält nur

$$\beta A - \beta' A' = 0, \ldots,$$

drei Gleichungen, die aus den ersten sechs abgeleiteten durch Elimination von X, Y, Z hervorgehen.

Hiernach ergeben sich unter den Größen n, n', t, g, g' und bestimmten ihrer geometrischen Ableitungen drei Relationen:

(A) $$\Theta' g + \Theta g' - g^2 - g'^2 = nn' - t^2$$

(B) $$\Theta' n - \Theta t + 2g't - (n - n')g = 0$$
$$\Theta n' - \Theta' t + 2gt - (n' - n)g' = 0.$$

Alle hierin vorkommenden Größen sind, rein analytisch aufgefaßt, Invarianten des Formensystems (A, B, $\mathfrak{M}_0$); geometrisch betrachtet, Größen, die mit einer Flächenkurve c zusammenhängen, aber von dem

Koordinatensystem auf der Fläche unabhängig sind. Die Gleichung (A) ist vor den beiden anderen dadurch ausgezeichnet, daß der viergliedrige Ausdruck auf ihrer linken Seite eine Invariante des Formenpaares (A, $\mathfrak{M}_0$) allein ist. Denn sowohl g und g' wie auch die geometrischen Ableitungen sind von den Fundamentalgrößen zweiter Ordnung frei.

§ 56.

Kurveninvarianten und Punktinvarianten. Der Bonnetsche Ausdruck des Krümmungsmaßes.

Die rechte Seite der Gleichung (A) läßt noch eine Vereinfachung zu. Nach S. 197 (23) war nämlich

$$t^2 = -K + Hn - n^2$$

und nach S. 200 (7)

$$n + n' = H.$$

Führt man in die erste dieser Relationen mittels der zweiten die Größe n' ein, so folgt

$$t^2 = -K + (n + n')n - n^2,$$

d. h.

$$nn' - t^2 = K. \tag{1}$$

Ganz direkt kann man dies aus den Formeln für n, n' und t (S. 200 (6, 4) und S. 196 (20))

$$n = \sum_{i,k} \mu_{1i}\mu_{1k}b_{ik} \tag{2}$$

$$n' = \sum_{i,k} \mu_{2i}\mu_{2k}b_{ik} \tag{3}$$

$$t = \sum_{i,k} \mu_{1i}\mu_{2k}b_{ik} \tag{4}$$

dadurch ableiten, daß man wieder einmal, abgesehen von den Bezeichnungen, die Identität S. 34 (10) anwendet. Sie lautet hier

$$\begin{vmatrix} \sum_i \mu_{1i} \sum_k \mu_{1k} b_{ik}, & \sum_i \mu_{1i} \sum_k \mu_{2k} b_{ik} \\ \sum_i \mu_{2i} \sum_k \mu_{1k} b_{ik}, & \sum_i \mu_{2i} \sum_k \mu_{2k} b_{ik} \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$= \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \sum_k \mu_{1k} b_{1k}, & \sum_k \mu_{1k} b_{2k} \\ \sum_k \mu_{2k} b_{1k}, & \sum_k \mu_{2k} b_{2k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{vmatrix}^2 \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix},$$

führt also wegen

$$\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

(S. 180(35)) auf

$$(6) \qquad nn' - t^2 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Hier tritt der bemerkenswerte Umstand ein, daß die Größenverbindung auf der linken Seite, deren einzelne Bestandteile ihrer Erklärung nach aus der Theorie der Flächenkurven hervorgegangen sind, die Bestimmungsgrößen der Kurve c, und damit auch der orthogonalen Trajektorie c', gar nicht mehr enthält, vielmehr nur von den krummlinigen Koordinaten des Flächenpunktes abhängt, durch den die beiden Kurven hindurchgehen. Um einen solchen Gegensatz kurz zu kennzeichnen, kann man Größen wie n, n', t, g, g' und deren geometrische Ableitungen, sowohl einzeln wie auch gruppenweise zusammengefaßt, als Kurveninvarianten bezeichnen, dagegen z. B. H und K als Punktinvarianten. Die letzteren sind simultane Invarianten der Formen A und B oder auch Invarianten einer einzigen von ihnen; für die ersteren muß immer noch eine lineare Differentialform $\mathfrak{M}_0$ bei der Invariantenbildung hinzutreten.

Das in der Gleichung (1) oder (6) enthaltene Ergebnis kann hiernach dahin ausgesprochen werden, daß $nn' - t^2$ nur scheinbar eine Kurveninvariante, tatsächlich aber eine Punktinvariante ist. Etwas anders: Das Produkt der Normalkrümmung einer Flächenkurve mit der Normalkrümmung ihrer orthogonalen Trajektorie, vermindert um das Quadrat der geodätischen Windung einer (oder jeder) dieser Kurven, ist für einen bestimmten Flächenpunkt von der Lage des Kurvenpaares unabhängig, nämlich gleich dem Produkt der Hauptkrümmungen der Fläche für diesen Punkt.

Seine Hauptbedeutung gewinnt dieser Satz allerdings erst beim Zurückgreifen auf die Gleichung (A). Da die rechte Seite eine Punktinvariante ist, so muß es auch die linke sein. D. h. der Ausdruck $\Theta' g + \Theta g' - g^2 - g'^2$, der aus den Tangentialkrümmungen von c und c' sowie je einer geometrischen Ableitung dieser beiden Größen zusammengesetzt ist und in seinen Bestandteilen die Koeffizienten m_1 und m_2 der Form $\mathfrak{M}_0$ enthält, muß ebenfalls für jede Lage des durch einen bestimmten Punkt gehenden orthogonalen Kurvenpaares denselben Wert haben. Es bietet sich die Aufgabe dar, diesen Wert wirklich zu berechnen; denn da er von den Fundamentalgrößen zweiter Ordnung nicht abhängt, so ist er von dem Ausdruck rechts, $\frac{LN - M^2}{EG - F^2}$, notwendig verschieden.

Über das Ergebnis kann freilich, nachdem der Gaußsche Satz bereits bewiesen ist (§ 36), von vornherein kein Zweifel sein: es ist

der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung S. 120 (7), den man wiedererhalten muß. Jedoch ist zu erwarten, daß man auf diesem natürlichen Wege zu einem übersichtlicheren Bildungsgesetz gelangen wird als dort.

Daß das Krümmungsmaß sich mittels der Tangentialkrümmung durch den obigen Ausdruck darstellen läßt, ist von Bonnet angegeben worden.

§ 57.

Herleitung des Gaußschen Ausdruckes für das Krümmungsmaß aus dem Bonnetschen.

Zur Reduktion des Aggregates

$$\Theta' g + \Theta g' - g^2 - g'^2$$

wird man sich am zweckmäßigsten der Darstellung von g und g' durch Summen gleichbezeichneter Glieder bedienen:

$$(1) \qquad g = \frac{-1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k} \mu_{1i} \mu_{1k} \overline{m}_{ik} \qquad (\S\ 51(1))$$

$$(2) \qquad g' = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k} \mu_{1i} \mu_{2k} \overline{m}_{ik}, \qquad (\S\ 51(10))$$

in denen die Koeffizienten der Christoffelschen Kovariante durch die Formeln

$$(3) \qquad \overline{m}_{ik} = \frac{\partial m_i}{\partial u_k} - \sum_{\nu} \begin{Bmatrix} i\ k \\ \nu \end{Bmatrix} m_\nu \qquad (\S\ 50(2))$$

erklärt waren. g und g' haben beide den Nenner $\sqrt{\Delta}$, dessen geometrische Ableitungen aus den im § 50 ausschließlich gebrauchten Formeln S. 184 (17) für die gewöhnlichen partiellen Ableitungen,

$$\frac{\partial \sqrt{\Delta}}{\partial u_k} = \sum_i \mu_{2i} \overline{m}_{ik},$$

sofort folgen:

$$(4) \qquad \Theta(\sqrt{\Delta}) = \sum_{i,k} \mu_{1k} \mu_{2i} \overline{m}_{ik}$$

$$(5) \qquad \Theta'(\sqrt{\Delta}) = \sum_{i,k} \mu_{2k} \mu_{2i} \overline{m}_{ik}.$$

Nun wird nach (1) und (2)

$$(6) \quad \Theta(g' \sqrt{\Delta}) = \sum_l \mu_{1l} \sum_{i,k} \mu_{1i} \mu_{2k} \frac{\partial \overline{m}_{ik}}{\partial u_l} + \sum_l \mu_{1l} \sum_{i,k} \overline{m}_{ik} \left(\mu_{1i} \frac{\partial \mu_{2k}}{\partial u_l} + \mu_{2k} \frac{\partial \mu_{1i}}{\partial u_l} \right)$$

$$(7) \quad \Theta'(g \sqrt{\Delta}) = -\sum_l \mu_{2l} \sum_{i,k} \mu_{1i} \mu_{1k} \frac{\partial \overline{m}_{ik}}{\partial u_l} - \sum_l \mu_{2l} \sum_{i,k} \overline{m}_{ik} \left(\mu_{1i} \frac{\partial \mu_{1k}}{\partial u_l} + \mu_{1k} \frac{\partial \mu_{1i}}{\partial u_l} \right).$$

Zweite Ableitungen der Größen m_1 und m_2 sind nur in den Differentialquotienten $\frac{\partial m_{ik}}{\partial u_l}$ enthalten, und auf das Auftreten dieser in dem Bonnetschen Ausdruck hat man also zuerst sein Augenmerk zu richten. Die beiden ersten Summen auf den rechten Seiten von (6) und (7) geben zusammen

$$(8)\qquad \sum_{i,l,k}\mu_{1i}\,\mu_{1k}\,\mu_{2l}\frac{\partial \overline{m}_{il}}{\partial u_k}-\sum_{i,k,l}\mu_{1i}\,\mu_{1k}\,\mu_{2l}\frac{\partial \overline{m}_{ik}}{\partial u_l}\equiv \sum_{i,k,l}\mu_{1i}\,\mu_{1k}\,\mu_{2l}\left(\frac{\partial \overline{m}_{il}}{\partial u_k}-\frac{\partial \overline{m}_{ik}}{\partial u_l}\right).$$

Weiter folgt aus (3) durch Differentiation nach u_l, wenn die dabei auftretenden ersten Ableitungen der Größen m_ν mittels derselben Gleichungen (3) durch die Koeffizienten der Christoffelschen Kovariante dargestellt werden,

$$\frac{\partial \overline{m}_{ik}}{\partial u_l}=\frac{\partial^2 m_i}{\partial u_k\partial u_l}-\sum_\nu\begin{Bmatrix}i\,k\\ \nu\end{Bmatrix}\left(\overline{m}_{\nu l}+\sum_\varrho\begin{Bmatrix}\nu\,l\\ \varrho\end{Bmatrix}m_\varrho\right)-\sum_\nu m_\nu\frac{\partial\begin{Bmatrix}i\,k\\ \nu\end{Bmatrix}}{\partial u_l},$$

und bei Vertauschung von k mit l

$$\frac{\partial \overline{m}_{il}}{\partial u_k}=\frac{\partial^2 m_i}{\partial u_k\partial u_l}-\sum_\nu\begin{Bmatrix}i\,l\\ \nu\end{Bmatrix}\left(\overline{m}_{\nu k}+\sum_\varrho\begin{Bmatrix}\nu\,k\\ \varrho\end{Bmatrix}m_\varrho\right)-\sum_\nu m_\nu\frac{\partial\begin{Bmatrix}i\,l\\ \nu\end{Bmatrix}}{\partial u_k},$$

also

$$(9)\qquad \frac{\partial \overline{m}_{il}}{\partial u_k}-\frac{\partial \overline{m}_{ik}}{\partial u_l}=\sum_\nu\left(\begin{Bmatrix}i\,k\\ \nu\end{Bmatrix}\overline{m}_{\nu l}-\begin{Bmatrix}i\,l\\ \nu\end{Bmatrix}\overline{m}_{\nu k}\right)+\sum_\nu m_\nu\left[\frac{\partial\begin{Bmatrix}i\,k\\ \nu\end{Bmatrix}}{\partial u_l}-\frac{\partial\begin{Bmatrix}i\,l\\ \nu\end{Bmatrix}}{\partial u_k}+\sum_\varrho\left(\begin{Bmatrix}i\,k\\ \varrho\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\,l\\ \nu\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}i\,l\\ \varrho\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\,k\\ \nu\end{Bmatrix}\right)\right].$$

Für den Koeffizienten von m_ν in der zweiten Summe möge eine bleibende abkürzende Bezeichnung eingeführt werden,

$$(10)\qquad \frac{\partial\begin{Bmatrix}i\,k\\ \nu\end{Bmatrix}}{\partial u_l}-\frac{\partial\begin{Bmatrix}i\,l\\ \nu\end{Bmatrix}}{\partial u_k}+\sum_\varrho\left(\begin{Bmatrix}i\,k\\ \varrho\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\,l\\ \nu\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}i\,l\\ \varrho\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\,k\\ \nu\end{Bmatrix}\right)=\{i\nu kl\}.$$

Ein Teil des Wertes von $\Theta(g'\sqrt{\Delta})+\Theta'(g\sqrt{\Delta})$ ist dann nach (8) und (9):

$$(11)\quad \sum_{i,k,l,\nu}\mu_{1i}\mu_{1k}\mu_{2l}\begin{Bmatrix}i\,k\\ \nu\end{Bmatrix}\overline{m}_{\nu l}-\sum_{i,k,l,\nu}\mu_{1i}\mu_{1k}\mu_{2l}\begin{Bmatrix}i\,l\\ \nu\end{Bmatrix}\overline{m}_{\nu k}+\sum_{i,k,l,\nu}\mu_{1i}\mu_{1k}\mu_{2l}\{i\nu kl\}m_\nu.$$

Zur Umwandlung des zweiten Teiles kann man die Formeln S. 186 (24, 25)

$$(12)\qquad \frac{\partial \mu_{2k}}{\partial u_l} = \frac{\mu_{1k}}{\sqrt{\Delta}} \sum_{\nu} \mu_{1\nu} \overline{m}_{\nu l} - \sum_{\varrho} \left\{ {\varrho\, l \atop k} \right\} \mu_{2\varrho}$$

$$(13)\qquad \frac{\partial \mu_{1k}}{\partial u_l} = \frac{-\mu_{2k}}{\sqrt{\Delta}} \sum_{\nu} \mu_{1\nu} \overline{m}_{\nu l} - \sum_{\varrho} \left\{ {\varrho\, l \atop k} \right\} \mu_{1\varrho}$$

benutzen. Werden zuerst die vier Ausdrücke zusammengefaßt, die die Größen $\overline{m}$ enthalten, so findet sich

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k,l,\nu} \mu_{1l} \mu_{1i} \overline{m}_{ik} \mu_{1k} \mu_{1\nu} \overline{m}_{\nu l} - \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k,l,\nu} \mu_{1l} \mu_{2k} \overline{m}_{ik} \mu_{2i} \mu_{1\nu} \overline{m}_{\nu l}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k,l,\nu} \mu_{2l} \mu_{1i} \overline{m}_{ik} \mu_{2k} \mu_{1\nu} \overline{m}_{\nu l} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k,l,\nu} \mu_{2l} \mu_{1k} \overline{m}_{ik} \mu_{2i} \mu_{1\nu} \overline{m}_{\nu l}$$

$$\equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \Big[\Big(\sum_{i,k} \mu_{1i} \mu_{1k} \overline{m}_{ik}\Big) \Big(\sum_{\nu,l} \mu_{1\nu} \mu_{1l} \overline{m}_{\nu l}\Big) - \Big(\sum_{i,k} \mu_{2k} \mu_{2i} \overline{m}_{ik}\Big) \Big(\sum_{\nu,l} \mu_{1\nu} \mu_{1l} \overline{m}_{\nu l}\Big)$$

$$+ \Big(\sum_{i,k} \mu_{1i} \mu_{2k} \overline{m}_{ik}\Big) \Big(\sum_{\nu,l} \mu_{1\nu} \mu_{2l} \overline{m}_{\nu l}\Big) + \Big(\sum_{i,k} \mu_{1k} \mu_{2i} \overline{m}_{ik}\Big) \Big(\sum_{\nu,l} \mu_{1\nu} \mu_{2l} \overline{m}_{\nu l}\Big) \Big].$$

Nach (2, 3, 4, 5) nimmt dieser Ausdruck die einfache Form an

$$(14)\qquad g^2 \sqrt{\Delta} + g\,\Theta'(\sqrt{\Delta}) + g'^2 \sqrt{\Delta} + g'\,\Theta(\sqrt{\Delta}).$$

Da die linken Seiten von (6) und (7) addiert

$$(15)\qquad g'\,\Theta(\sqrt{\Delta}) + \sqrt{\Delta}\,\Theta g' + g\,\Theta'(\sqrt{\Delta}) + \sqrt{\Delta}\,\Theta' g$$

liefern, so heben sich links und rechts die geometrischen Ableitungen von $\sqrt{\Delta}$ heraus.

Endlich bleiben, aus den zweiten Teilen der Formeln (12) und (13), rechts noch folgende Aggregate zu berücksichtigen:

$$- \sum_{i,k,l,\varrho} \mu_{1l} \mu_{1i} \mu_{2\varrho} \left\{ {\varrho\, l \atop k} \right\} \overline{m}_{ik} - \sum_{i,k,l,\varrho} \mu_{1l} \mu_{2k} \mu_{1\varrho} \left\{ {\varrho\, l \atop i} \right\} \overline{m}_{ik}$$

$$+ \sum_{i,k,l,\varrho} \mu_{2l} \mu_{1i} \mu_{1\varrho} \left\{ {\varrho\, l \atop k} \right\} \overline{m}_{ik} + \sum_{i,k,l,\varrho} \mu_{2l} \mu_{1k} \mu_{1\varrho} \left\{ {\varrho\, l \atop i} \right\} \overline{m}_{ik}.$$

Vertauscht man in der ersten Summe ϱ mit l, so sieht man, daß sie sich gegen die dritte streichen läßt. Die beiden anderen können mit den beiden ersten, in (11) auftretenden verglichen werden. Die zweite ist nämlich gleich

$$- \sum_{\nu,l,k,i} \mu_{1k} \mu_{2l} \mu_{1i} \left\{ {i\, k \atop \nu} \right\} \overline{m}_{\nu l},$$

und die vierte

$$\sum_{\nu,k,l,i} \mu_{2l} \mu_{1k} \mu_{1i} \left\{ {i\, l \atop \nu} \right\} \overline{m}_{\nu k}.$$

Sie heben sich also gegen jene weg.

Demnach bleiben in der aus (6) und (7) durch Addition hervorgegangenen Gleichung folgende Größen stehen: Links das zweite und vierte Glied des Ausdruckes (15), rechts das erste und dritte Glied von (14) und die dritte Summe in (11). Die Gleichung selbst wird nach Division mit $\sqrt{\Delta}$

(16) $$\overline{\Theta g'} + \Theta' g = g^2 + g'^2 + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k,l,\nu} \mu_{1i}\mu_{1k}\mu_{2l} m_\nu \{i\nu kl\}.$$

Durch den Wegfall der Koeffizienten der Christoffelschen Kovariante sind auch die ersten Ableitungen von m_1 und m_2 verschwunden. Diese Größen selbst müssen, soweit sie explizite vorkommen, der Gleichförmigkeit wegen noch durch Größen μ ersetzt werden, was nach den Formeln

$$\frac{m_\nu}{\sqrt{\Delta}} = m_{2\nu} \qquad (\S\ 49\ (22))$$

$$m_{2\nu} = \sum_p a_{p\nu}\mu_{2p} \qquad (\S\ 49\ (31))$$

zu geschehen hat. Setzt man dann

(17) $$\sum_\nu a_{p\nu}\{i\nu kl\} = [ipkl],$$

so erhält man

(18) $$\Theta g' + \Theta' g - g^2 - g'^2 = \sum_{i,k,l,p} \mu_{1i}\mu_{1k}\mu_{2l}\mu_{2p}[ipkl].$$

Wird hier zuerst über k und l summiert, so sind nur die beiden Wertepaare $k=1$, $l=2$ und $k=2$, $l=1$ beizubehalten. Denn für $k=l$ verschwindet $\{i\nu kl\}$ und damit auch $[ipkl]$, wie aus den Definitionsgleichungen unmittelbar ersichtlich ist. Die Darstellung (18) geht also in

$$\Theta g' + \Theta' g - g^2 - g'^2 = \sum_{i,p} \mu_{1i}\mu_{2p}(\mu_{11}\mu_{22}[ip12] + \mu_{12}\mu_{21}[ip21])$$

über. Die Gleichungen (10) und (17) liefern aber allgemeiner

(19) $$\{i\nu lk\} = -\{i\nu kl\}$$

(20) $$[iplk] = -[ipkl],$$

sodaß

(21) $$\Theta g' + \Theta' g - g^2 - g'^2 = (\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21})\sum_{i,p} \mu_{1i}\mu_{2p}[ip12]$$

wird.

Für das erste Argumentenpaar (i, p) läßt sich nun von den Größen $[ipkl]$ dieselbe Eigenschaft aussagen wie für das zweite. Setzt man nämlich diese Größen in Beziehung zu den zweiten Ableitungen der Formenkoeffizienten a_{ik}, indem man aus S. 183 (11)

$$(22)\quad \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial u_l \partial u_p} = \sum_\varrho \left[a_{\varrho i} \frac{\partial \left\{ {k\,l \atop \varrho} \right\}}{\partial u_p} + \left\{ {k\,l \atop \varrho} \right\} \sum_\lambda \left(a_{\lambda\varrho} \left\{ {i\,p \atop \lambda} \right\} + a_{\lambda i} \left\{ {\varrho\,p \atop \lambda} \right\} \right) \right]$$

$$+ \sum_\varrho \left[a_{\varrho k} \frac{\partial \left\{ {i\,l \atop \varrho} \right\}}{\partial u_p} + \left\{ {i\,l \atop \varrho} \right\} \sum_\lambda \left(a_{\lambda\varrho} \left\{ {k\,p \atop \lambda} \right\} + a_{\lambda k} \left\{ {\varrho\,p \atop \lambda} \right\} \right) \right]$$

bildet, so findet man

$$(23)\quad \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial u_l \partial u_p} - \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial u_p \partial u_l} = \sum_\varrho a_{\varrho i} \{k \varrho l p\} + \sum_\varrho a_{\varrho k} \{i \varrho l p\}$$

$$= [k i l p] + [i k l p],$$

also

$$[k i l p] + [i k l p] = 0,$$

oder in den hier gebrauchten Bezeichnungen

$$(24)\quad [p i k l] = -[i p k l].$$

Hiernach ist

$$\sum_{i,p} \mu_{1i} \mu_{2p} [i p 1 2] = (\mu_{11} \mu_{22} - \mu_{12} \mu_{21}) [1212],$$

d. h. schließlich, der Relation

$$\mu_{11} \mu_{22} - \mu_{12} \mu_{21} = \frac{1}{\sqrt{a}}$$

zufolge,

$$(25)\quad \Theta g' + \Theta' g - g^2 - g'^2 = \frac{1}{a} [1 2 1 2] \equiv \frac{1}{a} \sum_\nu a_{2\nu} \{1 \nu 1 2\}.$$

Mittels der Gleichungen (19), (20), (24) läßt sich die Invariante auf der rechten Seite in mannigfachen verschiedenen Formen darstellen. Zu weiterer Abkürzung werde

$$(26)\quad \frac{1}{a} [1 2 1 2] = K_a$$

gesetzt, wo also K_a z. B. in der aus § 36 bekannten Weise durch a_{11}, a_{12}, a_{22}, die sechs ersten Ableitungen dieser Größen und drei bestimmte zweite Ableitungen ausgedrückt werden kann. Die Gleichung (25) ist dann zu schreiben:

$$(27)\quad \Theta g' + \Theta' g - g^2 - g'^2 = K_a.$$

§ 58.

Die Bedeutung des Gaußschen Satzes.

Es ist wichtig, sich klar zu machen, welche von den Ergebnissen der beiden letzten Paragraphen rein formentheoretischer Natur sind und welche nur für die Flächentheorie gelten. Daß die letzte Gleichung

keine Beziehungen der Formenkoeffizienten a_{ik} und m_ν zur Geometrie voraussetzt, leuchtet ein. Denn denkt man sich die Größen $g, g', \Theta g, \Theta g'$ durch ihre analytischen Ausdrücke definiert, so liefert die eben angestellte, nur nach Identitäten fortschreitende Rechnung die Gleichung (27) wieder. Die Reduktion des Bonnetschen Ausdruckes führt also auf eine Invariante der quadratischen Differentialform A allein, die als Gaußsche Invariante bezeichnet werden soll. Der Inhalt der Gleichung (27) läßt sich schließlich dahin aussprechen, daß die Bonnetsche Kovariante einer beliebigen quadratischen Differentialform A und einer ebenfalls beliebigen linearen Differentialform $\mathfrak{M}_0$ gleich der Gaußschen Invariante von A ist. Aber freilich würde man vom rein formentheoretischen Gesichtspunkt aus nicht darauf gekommen sein, den Bonnetschen Ausdruck auf die Möglichkeit des Wegfallens von m_1 und m_2 zu untersuchen, und überhaupt schon diesen Ausdruck vor anderen auszuzeichnen, die irgendwie aus g, g' und deren vier ersten geometrischen Ableitungen zusammengesetzt sind.

Daß auch die Gleichung S. 207 (6)

$$nn' - t^2 = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} \equiv \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

für ein beliebiges System von zwei quadratischen und einer linearen Form gilt, bedarf kaum der Erwähnung. Sie folgte mittels der drei Ausdrücke S. 206 (2, 3, 4), die man formentheoretisch als Definitionen von n, n' und t auffassen kann, aus einer oft benutzten Identität. Bezeichnet man den Quotienten der beiden Determinanten von A und B, die von A immer als Nenner genommen, mit K_{ab}, setzt also

(1) $$\frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} = K_{ab},$$

so heißt das Resultat

(2) $$nn' - t^2 = K_{ab}.$$

Soll auf der linken Seite die Verbindung mit der Differentialgeometrie auch äußerlich aufgehoben werden, so sind die Größen n, n', t durch ihre Ausdrücke zu ersetzen, wobei die Operationszeichen D_a und H_a oder Δ angewendet werden können (S. 193—194). Doch mögen die verschiedenen Formen, in die sich dann auch dieses Ergebnis setzen läßt, hier übergangen werden, weil sie für die Flächentheorie keine neue Einsicht liefern, nachdem man sich überhaupt einmal mit der Bedeutung jener Operationszeichen vertraut gemacht hat.

Im Gegensatz zu den beiden eben besprochenen Resultaten enthält die Gleichung S. 205 (A), die infolge von (2) und § 57 (27), also

nach Zurückführung der linken und rechten Seite auf Punktinvarianten, die Gestalt

(C) $$K_a = K_{ab}$$

annimmt, einen Lehrsatz der Differentialgeometrie. Denn diese Gleichung ist (zusammen mit dem System (B)) aus den allgemeinen Frenetschen Formeln gefolgt, die ihrerseits wieder in den Beziehungen der sechs Formenkoeffizienten $a_{11}, a_{12}, a_{22}; b_{11}, b_{12}, b_{22}$ zu den drei Funktionen $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ ihren Grund haben.

§ 59.

Die allgemeinen Frenetschen Formeln für die Koordinatenlinien.

Aus den allgemeinen Frenetschen Formeln können durch Spezialisierung der Kurve c leicht Gleichungssysteme abgeleitet werden, die nur gewöhnliche partielle Differentialquotienten enthalten. Die Grundkurve der geometrischen Differentiationen falle z. B. mit der Koordinatenlinie $v = C$ zusammen. Dann wird die Funktion $\varphi(u, v)$ gleich v selbst oder wenigstens gleich einer Funktion von v allein; oder allgemeiner, in der Differentialgleichung $\mathfrak{M}_0 = 0$, die mit $dv = 0$ identisch werden muß, ist m_1 gleich Null zu setzen, und m_2 darf gleich Eins angenommen werden. Die in den geometrischen Ableitungen (S. 176 (5, 6)) vorkommende Größe $\Delta \equiv \frac{1}{T^2}(Gm_1^2 - 2Fm_1m_2 + Em_2^2)$ wird gleich $\frac{E}{T^2}$, also $T\sqrt{\Delta}$ gleich $\sqrt{E}$, sodann

(1) $$\Theta_v \chi = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \chi}{\partial u}$$

(2) $$\Theta'_v \chi = \frac{1}{T\sqrt{E}}\left(E \frac{\partial \chi}{\partial v} - F \frac{\partial \chi}{\partial u}\right).$$

Im besonderen ergibt sich aus (1) für $\chi = x$ der schon auf S. 29 ermittelte Wert

(3) $$A_v = \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial x}{\partial u}$$

wieder, und dazu tritt nach (2)

(4) $$A'_v = \frac{1}{T\sqrt{E}}\left(E \frac{\partial x}{\partial v} - F \frac{\partial x}{\partial u}\right).$$

Von den geometrischen Größen, die ursprünglich als Koeffizienten in den allgemeinen Frenetschen Formeln aufgetreten waren, sind g_v und g'_v im § 41 (S. 139) berechnet worden:

$$(5)\qquad g_v = \frac{TJ_2}{E\sqrt{E}} \equiv \frac{1}{TE\sqrt{E}}\left(E\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial v} - \frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u}\right)$$

$$(6)\qquad g_v' = \frac{FJ_2 - EJ_2'}{E\sqrt{E}} \equiv \frac{1}{T^2 E\sqrt{E}}\left(EF\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}F^2\frac{\partial E}{\partial u} - \frac{1}{2}E^2\frac{\partial G}{\partial u}\right).$$

Die drei übrigen haben die Werte

$$(7)\qquad n_v = \frac{L}{E}$$

$$(8)\qquad n_v' = \frac{NE^2 - 2MEF + LF^2}{T^2 E}$$

$$(9)\qquad t_v = \frac{EM - FL}{TE}.$$

Setzt man nun die Ausdrücke (3), (4), (5) und (7) in die erste Formel (a) (S. 55) ein, behält aber die Größe X, als von der Grundkurve der geometrischen Differentiationen unabhängig, in der Gleichung bei, so findet man

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u}\right) = \frac{J_2}{E^2}\left(E\frac{\partial x}{\partial v} - F\frac{\partial x}{\partial u}\right) + \frac{L}{E}X,$$

also, wenn man links die Differentiation ausführt, für $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ eine homogene lineare Funktion von $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$ und X,

$$(10)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \lambda\frac{\partial x}{\partial u} + \lambda'\frac{\partial x}{\partial v} + \lambda'' X.$$

Die Koeffizienten λ und λ' sind bestimmte Funktionen der Fundamentalgrößen erster Ordnung und ihrer ersten Ableitungen, während λ'' offenbar gleich L ist. Vermöge der zweiten und dritten Gleichung (a) treten die beiden Relationen

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = \lambda\frac{\partial y}{\partial u} + \lambda'\frac{\partial y}{\partial v} + \lambda'' Y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \lambda\frac{\partial z}{\partial u} + \lambda'\frac{\partial z}{\partial v} + \lambda'' Z$$

hinzu.

Die erste Formel (b) (S. 55) liefert

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{E\frac{\partial x}{\partial v} - F\frac{\partial x}{\partial u}}{T\sqrt{E}} = -\frac{TJ_2}{E^2}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{EM - FL}{TE}X$$

oder reduziert und unter Benutzung von (10)

$$(11)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v} = \mu\frac{\partial x}{\partial u} + \mu'\frac{\partial x}{\partial v} + \mu'' X,$$

wo μ'' sofort gleich M gefunden wird und für μ und μ' Entsprechendes gilt wie für λ und λ'.

Endlich wird nach (c)

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{L}{E\sqrt{E}}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{EM-FL}{T^2E\sqrt{E}}\left(E\frac{\partial x}{\partial v} - F\frac{\partial x}{\partial u}\right),$$

d. h.

$$(12)\qquad \frac{\partial X}{\partial u} = \eta_{11}\frac{\partial x}{\partial u} + \eta_{12}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Die Koeffizienten sind hier rationale Funktionen der Fundamentalgrößen beider Reihen.

Die Formeln (10, 11, 12), die bei Hinzunahme zweiter Ableitungen von y und z, erster Ableitungen von Y und Z zusammen drei Systeme von je drei Gleichungen darstellen, sind nicht die einzigen ihrer Art. Man bekommt vielmehr noch drei andere Systeme, wenn man die obige Annahme auch in die Formeln (a'), (b'), (c') (S. 200—201) einführt. Die Gleichungen haben die Gestalt

$$(13)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \mu_1\frac{\partial x}{\partial u} + \mu_1'\frac{\partial x}{\partial v} + \mu_1'' X$$

$$(14)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \nu\frac{\partial x}{\partial u} + \nu'\frac{\partial x}{\partial v} + \nu'' X$$

$$(15)\qquad \frac{\partial X}{\partial v} = \eta_{21}\frac{\partial x}{\partial u} + \eta_{22}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Die erste kann nichts Neues liefern, denn mit (11) zusammengestellt gibt sie

$$(\mu - \mu_1)\frac{\partial x}{\partial u} + (\mu' - \mu_1')\frac{\partial x}{\partial v} + (\mu'' - \mu_1'')X = 0,$$

und entsprechend

$$(\mu - \mu_1)\frac{\partial y}{\partial u} + (\mu' - \mu_1')\frac{\partial y}{\partial v} + (\mu'' - \mu_1'')Y = 0$$

$$(\mu - \mu_1)\frac{\partial z}{\partial u} + (\mu' - \mu_1')\frac{\partial z}{\partial v} + (\mu'' - \mu_1'')Z = 0;$$

drei in $\mu - \mu_1$, $\mu' - \mu_1'$, $\mu'' - \mu_1''$ homogene lineare Gleichungen, deren Determinante gleich T ist. Die Koeffizienten in (11) und (13) müssen also paarweise einander gleich sein.

Da diese einfache Überlegung ebenfalls platzgreifen würde, wenn für $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ oder $\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$ zwei Ausdrücke gleicher Form vorlägen, so muß sich die Gesamtheit aller fünf Gleichungssysteme (10), (11), (14); (12), (15) aus den allgemeinen Frenetschen Formeln auch dadurch herleiten lassen, daß die andere Koordinatenlinie $u = C'$ als Grund-

kurve der Θ-Operationen angenommen wird. Trotzdem mögen die dann den Gleichungen (1) bis (9) entsprechenden hier vollständig aufgeführt werden, weil in einigen von ihnen ein Vorzeichen zu beachten ist, das sich unter der Annahme eines orthogonalen Koordinatennetzes besonders bemerkbar macht. Die Formeln heißen:

(16) $$\Theta_u \chi = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \chi}{\partial v}$$

(17) $$\Theta'_u \chi = \frac{1}{T\sqrt{G}} \left(G \frac{\partial \chi}{\partial u} - F \frac{\partial \chi}{\partial v} \right)$$

(18) $$A_u = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial x}{\partial v}$$

(19) $$A'_u = \frac{1}{T\sqrt{G}} \left(G \frac{\partial x}{\partial u} - F \frac{\partial x}{\partial v} \right)$$

(20) $$g_u = \frac{TJ''_1}{G\sqrt{G}} \equiv \frac{1}{TG\sqrt{G}} \left(G \frac{\partial F}{\partial v} - \tfrac{1}{2} G \frac{\partial G}{\partial u} - \tfrac{1}{2} F \frac{\partial G}{\partial v} \right)$$

(21) $$g'_u = \frac{GJ'_1 - FJ''_1}{G\sqrt{G}} \equiv \frac{-1}{T^2 G\sqrt{G}} \left(FG \frac{\partial F}{\partial v} - \tfrac{1}{2} F^2 \frac{\partial G}{\partial v} - \tfrac{1}{2} G^2 \frac{\partial E}{\partial v} \right)$$

(22) $$n_u = \frac{N}{G}$$

(23) $$n'_u = \frac{NF^2 - 2MFG + LG^2}{T^2 G}$$

(24) $$t_u = \frac{FN - GM}{TG}.$$

Über die Bedeutung des Vorzeichens ist jedoch bereits im § 41 das Nötige gesagt worden, und es gilt auch hier, daß man für $F = 0$ am zweckmäßigsten nur die Hälfte aller Formeln, als völlig ausreichend, in Rechnung zieht.

§ 60.

Die allgemeinen Frenetschen Formeln als Gleichungen zwischen gewöhnlichen Ableitungen.

Die Formeln für die geometrischen Größen, die mit den Koordinatenlinien zusammenhängen, können hier und da bei Einzeluntersuchungen von Nutzen sein. Wendet man z. B. die Gleichung

$$A' = YC - ZB,$$

die infolge der Orthogonalität von t' zu n und t stattfindet, auf die erste Koordinatenlinie an, so ergibt sich

$$\frac{1}{T\sqrt{E}}\left(E\frac{\partial x}{\partial v} - F\frac{\partial x}{\partial u}\right) = Y\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial z}{\partial u}\right) - Z\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial y}{\partial u}\right),$$

d. h.

(1) $$Y\frac{\partial z}{\partial u} - Z\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{T}\left(E\frac{\partial x}{\partial v} - F\frac{\partial x}{\partial u}\right).$$

Dieselbe Ausgangsgleichung liefert für die zweite Koordinatenlinie

(2) $$Y\frac{\partial z}{\partial v} - Z\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{1}{T}\left(- G\frac{\partial x}{\partial u} + F\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Das sind zwei Relationen, die schon im § 39 bei der Berechnung der Tangentialkrümmung gebraucht wurden und dort rein analytisch aus den Ausdrücken von Y und Z hergeleitet worden sind. Über eine etwas veränderte Auffassung vgl. S. 193.

Aber auch in manchen Untersuchungen allgemeinen Charakters können die gewöhnlichen Differentialquotienten nicht entbehrt werden, wenigstens bei dem Standpunkt, den man heute bestimmten Gruppen flächentheoretischer Probleme gegenüber einnimmt. Handelt es sich z. B. um die Ermittelung einer Klasse von Flächen mit einer vorgeschriebenen geometrischen Eigenschaft, und will man die partielle Differentialgleichung, auf die die Aufgabe führt, hinsichtlich der Möglichkeit und vollständigen Durchführbarkeit ihrer Integration etwa nach den klassischen Methoden von Monge und Ampère untersuchen, so kann man dazu die geometrischen Ableitungen nicht gebrauchen. Mit diesen Ableitungen so weit wie möglich zu operieren, wird allerdings nach dem bisher Auseinandergesetzten bei jeder flächentheoretischen Aufgabe zweckmäßig sein.

Der im vorigen Paragraphen vollzogene Übergang von den allgemeinen Frenetschen Formeln zu fünf Gleichungssystemen, in denen die Theta-Operationen durch Differentiationen im gewöhnlichen Sinne ersetzt sind, ist in verschiedener Hinsicht unbefriedigend. Die Rechnung ist nicht symmetrisch oder wird es wenigstens nur unter der beschränkenden Voraussetzung $F = 0$. Infolgedessen ist das Bildungsgesetz der Koeffizienten $\lambda, \lambda', \ldots$ nicht ohne weiteres zu überblicken. Namentlich aber erkennt man aus dem eingeschlagenen Verfahren nicht sofort, ob das ursprüngliche und das abgeleitete Gleichungssystem sich gegenseitig ersetzen.

Die natürlichste Methode, die gewöhnlichen Ableitungen in die Frenetschen Formeln einzuführen, besteht nun offenbar darin, die allgemeinen Übergangsformeln zwischen den gewöhnlichen und den geometrischen Differentialquotienten zu benutzen, ohne durch die Theorie der Koordinatenlinien hindurchzugehen.

Schreibt man die geometrischen Ableitungen in der Indizesbezeichnung und setzt für A und A' ihre Ausdrücke ein, so erhält man als erste Gleichungen der sechs Systeme Frenetscher Formeln:

$$\text{(a)} \qquad \vartheta_1\vartheta_1 x = g\,\vartheta_2 x + nX$$

$$\text{(b)} \qquad \vartheta_1\vartheta_2 x = -g\,\vartheta_1 x + tX$$

$$\text{(c)} \qquad \vartheta_1 X = -n\,\vartheta_1 x - t\,\vartheta_2 x$$

$$\text{(a}'\text{)} \qquad \vartheta_2\vartheta_1 x = -g'\vartheta_2 x + tX$$

$$\text{(b}'\text{)} \qquad \vartheta_2\vartheta_2 x = g'\vartheta_1 x + n'X$$

$$\text{(c}'\text{)} \qquad \vartheta_2 X = -t\,\vartheta_1 x - n'\vartheta_2 x.$$

Bevor mit ihnen operiert wird, und abgesehen von den Ergebnissen, die aus dem vorigen Paragraphen bereits bekannt sind, ist zu bemerken, daß die vier Gleichungen (a, b, a', b') sicher nicht mehr als drei Formelsysteme der hier betrachteten Art liefern können. Denn die Vergleichung von (b) mit (a') ergibt auf Grund der Vertauschungsformel lediglich eine Identität.

Die beiden Gleichungen (a) und (a') können in eine von der Form

$$(3) \qquad \vartheta_i\vartheta_1 x = p_i\vartheta_2 x + q_i X$$

vereinigt werden, ebenso (b) und (b') in

$$(4) \qquad \vartheta_i\vartheta_2 x = -p_i\vartheta_1 x + r_i X;$$

endlich (c) und (c') in

$$(5) \qquad \vartheta_i X = -q_i\vartheta_1 x - r_i\vartheta_2 x.$$

Eine weitere Zusammenfassung ist für den vorliegenden Zweck nicht erforderlich.

Durch Anwendung der Übergangsformeln S. 202 (3)

$$(6) \qquad \frac{\partial \chi}{\partial u_l} = \sum_i m_{il}\vartheta_i\chi$$

folgt nun aus (3) und (4)

$$(7) \qquad \frac{\partial \vartheta_1 x}{\partial u_l} = \vartheta_2 x \sum_i m_{il} p_i + X \sum_i m_{il} q_i$$

$$(8) \qquad \frac{\partial \vartheta_2 x}{\partial u_l} = -\vartheta_1 x \sum_i m_{il} p_i + X \sum_i m_{il} r_i.$$

Von diesen Gleichungen kann man jederzeit mittels der inversen Operation zu den Ausgangsformeln zurückkehren, d. h. diese und die abgeleiteten können einander vertreten, und es handelt sich nur noch um eine formale Umgestaltung der letzteren.

Der Koeffizient von $\vartheta_2(x)$ in (7) hat den Wert $m_{11}g - m_{21}g'$, d. h. nach S. 187(1) und S. 189(10)

$$-\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(m_{11}\sum_{i,k}\mu_{1i}\mu_{1k}\overline{m}_{ik} + m_{21}\sum_{i,k}\mu_{1i}\mu_{2k}\overline{m}_{ik}\right).$$

$$\equiv -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{\lambda} m_{\lambda 1}\sum_{i,k}\mu_{1i}\mu_{\lambda k}\overline{m}_{ik}$$

$$\equiv -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i,k}\mu_{1i}\overline{m}_{ik}\sum_{\lambda} m_{\lambda 1}\mu_{\lambda k}$$

$$\equiv -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i,k}\mu_{1i}\overline{m}_{ik}\varepsilon_{lk}, \qquad \text{(S. 178(20))}$$

mithin

(9) $$m_{11}g - m_{21}g' = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{\varrho}\mu_{1\varrho}\overline{m}_{\varrho l}.$$

Der Koeffizient von X in derselben Gleichung ist $m_{11}n + m_{21}t$, also wegen S. 200 (6) und S. 196 (20)

$$m_{11}\sum_{i,k}\mu_{1i}\mu_{1k}b_{ik} + m_{21}\sum_{i,k}\mu_{1i}\mu_{2k}b_{ik}$$

$$\equiv \sum_{i,k}\mu_{1i}b_{ik}\sum_{\lambda} m_{\lambda 1}\mu_{\lambda k},$$

(10) $$m_{11}n + m_{21}t = \sum_{\varrho}\mu_{1\varrho}b_{\varrho l}.$$

Auf der linken Seite wird

$$\frac{\partial \vartheta_1 x}{\partial u_l} = \frac{\partial}{\partial u_l}\sum_k \mu_{1k}\frac{\partial x}{\partial u_k}$$

$$= \sum_k \mu_{1k}\frac{\partial^2 x}{\partial u_k \partial u_l} + \sum_k \frac{\partial x}{\partial u_k}\frac{\partial \mu_{1k}}{\partial u_l}$$

oder nach S. 186 (25)

$$\frac{\partial \vartheta_1 x}{\partial u_l} = \sum_k \mu_{1k}\frac{\partial^2 x}{\partial u_k \partial u_l} - \sum_k \frac{\partial x}{\partial u_k}\frac{\mu_{2k}}{\sqrt{\Delta}}\sum_{\varrho}\mu_{1\varrho}\overline{m}_{\varrho l}$$
$$-\sum_k \frac{\partial x}{\partial u_k}\sum_{\varrho}\left\{\begin{matrix}\varrho\, l\\ k\end{matrix}\right\}\mu_{1\varrho}.$$

Da der zweite Teil gleich

$$-\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\vartheta_2 x\sum_{\varrho}\mu_{1\varrho}\overline{m}_{\varrho l}$$

gesetzt werden kann, so hebt sich $\vartheta_2 x$ links und rechts heraus, und die Gleichung (7) geht in

(11) $$\sum_k \mu_{1k}\frac{\partial^2 x}{\partial u_k \partial u_l} = \sum_{k,\varrho}\left\{\begin{matrix}\varrho\, l\\ k\end{matrix}\right\}\mu_{1\varrho}\frac{\partial x}{\partial u_k} + X\sum_{\varrho}\mu_{1\varrho}b_{\varrho l}$$

über.

Berechnet man in derselben Weise die einzelnen Glieder von (8), so findet man für den Koeffizienten von X

(12) $$m_{1l}t + m_{2l}n' = \sum_{\varrho} \mu_{2\varrho} b_{\varrho l},$$

und für die linke Seite mit Hilfe von S. 186 (24)

$$\frac{\partial \vartheta_2 x}{\partial u_l} = \sum_k \mu_{2k} \frac{\partial^2 x}{\partial u_k \partial u_l} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \vartheta_1 x \sum_{\varrho} \mu_{1\varrho} \overline{m}_{\varrho l}$$
$$- \sum_{k,\varrho} \frac{\partial x}{\partial u_k} \begin{Bmatrix} \varrho\, l \\ k \end{Bmatrix} \mu_{2\varrho}.$$

Die Gleichung selbst wird

(13) $$\sum_k \mu_{2k} \frac{\partial^2 x}{\partial u_k \partial u_l} = \sum_{k,\varrho} \begin{Bmatrix} \varrho\, l \\ k \end{Bmatrix} \mu_{2\varrho} \frac{\partial x}{\partial u_k} + X \sum_{\varrho} \mu_{2\varrho} b_{\varrho l}.$$

Multipliziert man jetzt (11) mit m_{1i}, (13) mit m_{2i} und addiert, so ergibt sich, wenn in dem Ergebnis k für l geschrieben wird,

(d) $$\frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_k} = \sum_{\nu} \begin{Bmatrix} i\, k \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_\nu} + b_{ik} X.$$

Bei gleicher Behandlung der Gleichungen (c) und (c′) ist keine neue Koeffizientenberechnung vorzunehmen, vielmehr liegen die Resultate, abgesehen vom Vorzeichen, in den Formeln (10) und (12) bereits vor. Die abgeleitete Gleichung heißt

$$\frac{\partial X}{\partial u_l} = - \vartheta_1 x \sum_{\varrho} \mu_{1\varrho} b_{\varrho l} - \vartheta_2 x \sum_{\varrho} \mu_{2\varrho} b_{\varrho l}$$
$$\equiv - \sum_{\varrho} b_{\varrho l} \sum_{\lambda} \mu_{\lambda\varrho} \vartheta_\lambda x$$
$$= - \sum_{\varrho} b_{\varrho l} \sum_{\lambda,\nu} \mu_{\lambda\varrho} \mu_{\lambda\nu} \frac{\partial x}{\partial u_\nu}$$
$$= - \sum_{\nu,\varrho} \alpha_{\nu\varrho} b_{\varrho l} \frac{\partial x}{\partial u_\nu}. \qquad \text{(S. 180 (36))}$$

Wird nun bleibend

(14) $$- \sum_{\varrho} \alpha_{\nu\varrho} b_{\varrho l} = \eta_{l\nu}$$

gesetzt, so folgt, wie schon S. 216 angegeben,

(e) $$\frac{\partial X}{\partial u_i} = \sum_{\nu} \eta_{i\nu} \frac{\partial x}{\partial u_\nu}.$$

Die Gleichungen (d) und (e) sind es, die den Inhalt der Frenetschen Formeln in den gewöhnlichen Bezeichnungen der Differentialrechnung wiedergeben.

§ 61.

Die Gaußschen und die Weingartenschen Gleichungen.

Da auch diese Gleichungen schließlich in den Ausdrücken für die Fundamentalgrößen ihren Grund haben müssen, so muß man sie unter Verzicht auf ihre geometrische Bedeutung in einfacher Weise aus den Definitionen von E, F, G; L, M, N herleiten können. Die Bezeichnung durch Indizes soll nicht benutzt werden, auch die Christoffelschen Verbindungen, die in dem Bildungsgesetz der Gleichungen (d) eine Rolle spielen, nicht im voraus bekannt sein; kurz, es sollen nur die elementarsten Hilfsmittel angewendet werden.

Die drei partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$ stehen in der Definitionsgleichung für die erste Fundamentalgröße zweiter Ordnung,

$$X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = L. \tag{1}$$

Außerdem treten sie bei der Differentiation der Gleichungen

$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = E, \qquad \sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = F$$

nach u auf. Nun sind die ersten Ableitungen der Fundamentalgrößen erster Ordnung im § 36 vollständig aufgestellt worden; die hier gebrauchten Formeln lauten

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} \tag{2}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}. \tag{3}$$

Bei der Auflösung von (1, 2, 3) nach den einzelnen zweiten Ableitungen wird die Nennerdeterminante, wie bekannt, gleich T, und der Zähler von $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$ hat den Ausdruck

$$\begin{vmatrix} L & Y & Z \\ \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} \equiv LTX - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\left(Y\frac{\partial z}{\partial v} - Z\frac{\partial y}{\partial v}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right)\left(Y\frac{\partial z}{\partial u} - Z\frac{\partial y}{\partial u}\right).$$

Zur Reduktion des zweiten und dritten Gliedes dienen die im vorigen Paragraphen unter (1) und (2) wieder angegebenen Gleichungen. Benutzt man die Bezeichnungen S. 127(5) oder vielmehr, da hier für

m und n die Ausdrücke bereits eingesetzt sind, die Gleichungen S. 137(27), so erhält man

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = J_1 \frac{\partial x}{\partial u} + J_2 \frac{\partial x}{\partial v} + LX.$$

Das ist die erste der Gleichungen (d). Aus den Gruppen

$$X\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = M$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}$$

und

$$X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + Y\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + Z\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = N$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}$$

folgt in gleicher Weise

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = J_1' \frac{\partial x}{\partial u} + J_2' \frac{\partial x}{\partial v} + MX$$

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = J_1'' \frac{\partial x}{\partial u} + J_2'' \frac{\partial x}{\partial v} + NX.$$

Die drei Formeln (4, 5, 6) bleiben gültig, wenn x durch y und z, X durch Y und Z ersetzt wird. Die neun Gleichungen zusammen sollen als **Gaußsche Gleichungen** bezeichnet werden.

Schreibt man (4, 5, 6) in der Form

$$(7) \qquad x_{11} = LX, \qquad x_{12} = MX, \qquad x_{22} = NX$$

(vgl. S. 129(10)), wo x_{11}, x_{12}, x_{22} die Koeffizienten der Christoffelschen Kovariante der Funktion $x(u, v)$ sind, so sieht man, daß diese Relationen als Ausdruck für das identische Bestehen der Gleichung

$$(8) \quad x_{11}du^2 + 2x_{12}du\,dv + x_{22}dv^2 = X(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2),$$

d. h.

$$(9) \qquad \Xi = X\mathrm{B}$$

aufgefaßt werden können.

Um die partiellen Ableitungen der Richtungskosinus der Normale zu bilden, hat man von den Definitionsgleichungen für L, M, N in der zweiten Form auszugehen. Es ist (S. 75(4))

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial u}=-L$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}=-M.$$

Stellt man diese Gleichungen mit

$$X\frac{\partial X}{\partial u}+Y\frac{\partial Y}{\partial u}+Z\frac{\partial Z}{\partial u}=0$$

zusammen und löst auf, so bekommt man als Nenner, wie vorher, die Größe T, und als Zähler von $\frac{\partial X}{\partial u}$

$$\begin{vmatrix} -L & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ -M & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ 0 & Y & Z \end{vmatrix} \equiv L\left(Y\frac{\partial z}{\partial v}-Z\frac{\partial y}{\partial v}\right)-M\left(Y\frac{\partial z}{\partial u}-Z\frac{\partial y}{\partial u}\right).$$

Ebenso führen die Formeln

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v}=-M$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial v}=-N$$

zusammen mit

$$X\frac{\partial X}{\partial v}+Y\frac{\partial Y}{\partial v}+Z\frac{\partial Z}{\partial v}=0$$

auf den Ausdruck von $\frac{\partial X}{\partial v}$. Die Resultate, die mit (e) übereinstimmen und als Weingartensche Gleichungen bezeichnet werden, lauten, wenn wieder aus jeder Gruppe von Formeln nur eine angegeben wird,

(10) $$\frac{\partial X}{\partial u}=\eta_{11}\frac{\partial x}{\partial u}+\eta_{12}\frac{\partial x}{\partial v}$$

(11) $$\frac{\partial X}{\partial v}=\eta_{21}\frac{\partial x}{\partial u}+\eta_{22}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Die Koeffizienten einzeln haben folgende Werte:

(12) $$\eta_{11}=\frac{FM-GL}{EG-F^2},\qquad \eta_{12}=\frac{FL-EM}{EG-F^2}$$
$$\eta_{21}=\frac{FN-GM}{EG-F^2},\qquad \eta_{22}=\frac{FM-EN}{EG-F^2}.$$

Die Weingartenschen Gleichungen werden häufig auch in der nach $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, ... aufgelösten Form gebraucht. Die dann als Nenner auftretende Determinante ist

$$\begin{vmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} \\ \eta_{21} & \eta_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{(EG-F^2)^2} \begin{vmatrix} F & -G \\ -E & F \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M & L \\ N & M \end{vmatrix} = \frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

(13) $$\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21} = K,$$

und man erhält

(14) $$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{K}\left(\eta_{22}\frac{\partial X}{\partial u} - \eta_{12}\frac{\partial X}{\partial v}\right)$$

(15) $$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{K}\left(-\eta_{21}\frac{\partial X}{\partial u} + \eta_{11}\frac{\partial X}{\partial v}\right).$$

Durch die Gleichung (13) wird das Produkt der Hauptkrümmungen vermittelst der Größen η_{ik} dargestellt. Die Formel für die Summe lautet

(16) $$-(\eta_{11} + \eta_{22}) = H,$$

mithin die quadratische Gleichung für die Hauptkrümmungen:

(17) $$n^2 + (\eta_{11} + \eta_{22})n + \eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21} = 0.$$

Die Gleichung der Haupttangenten ist

(18) $$-\eta_{12} - (\eta_{22} - \eta_{11})\lambda + \eta_{21}\lambda^2 = 0.$$

Betrachtet man X, Y, Z als kartesische Koordinaten der Einheitskugel

(19) $$\sum X^2 = 1,$$

auf die die Fläche durch parallele Normalen abgebildet ist, so kann man aus (10) und (11) die Fundamentalgrößen erster Ordnung dieser Kugel berechnen. Es werde bleibend

(20) $$\begin{aligned} \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial u}\right)^2 &= \mathfrak{E} \\ \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} &= \mathfrak{F} \\ \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial v}\right)^2 &= \mathfrak{G} \end{aligned}$$

gesetzt, sodaß das Quadrat des Linienelements der Kugel durch die Formel

(21) $$d\sigma^2 = \mathfrak{E}du^2 + 2\mathfrak{F}du\,dv + \mathfrak{G}dv^2$$

dargestellt wird. Die Weingartenschen Gleichungen liefern

(22) $$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= E\eta_{11}^2 + 2F\eta_{11}\eta_{12} + G\eta_{12}^2 \\ \mathfrak{F} &= E\eta_{11}\eta_{21} + F(\eta_{11}\eta_{22} + \eta_{12}\eta_{21}) + G\eta_{12}\eta_{22} \\ \mathfrak{G} &= E\eta_{21}^2 + 2F\eta_{21}\eta_{22} + G\eta_{22}^2. \end{aligned}$$

Nun ist

$$(23)\qquad \begin{aligned} E\eta_{11} + F\eta_{12} &= -L \\ F\eta_{11} + G\eta_{12} &= -M \\ E\eta_{21} + F\eta_{22} &= -M \\ F\eta_{21} + G\eta_{22} &= -N \end{aligned}$$

$$(24)\qquad \begin{aligned} L\eta_{11} + M\eta_{12} &= KE - HL \\ M\eta_{11} + N\eta_{12} &= KF - HM \\ L\eta_{21} + M\eta_{22} &= KF - HM \\ M\eta_{21} + N\eta_{22} &= KG - HN, \end{aligned}$$

mithin

$$(25)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{E} &= HL - KE \\ \mathfrak{F} &= HM - KF \\ \mathfrak{G} &= HN - KG \end{aligned}$$

$$(26)\qquad d\sigma^2 = Hnds^2 - Kds^2.$$

Wird noch

$$(27)\qquad \sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2} = \mathfrak{T}$$

gesetzt, so liefern die Formeln (25)

$$(28)\qquad \mathfrak{T}^2 = K^2 T^2,$$

$$(29)\qquad \mathfrak{T} = \varepsilon K T,$$

wo ε das Vorzeichen von K bedeutet.

§ 62.

Die drei Fundamentalgleichungen als Relationen zwischen den Fundamentalgrößen und ihren Ableitungen.

Es bleibt noch übrig, auch die Gleichungen (A, B), mit denen im § 55 die auf den Frenetschen Formeln fußenden Untersuchungen vorläufig abgeschlossen worden sind, in solche zwischen gewöhnlichen Differentialquotienten umzusetzen. Oder wenigstens die Gleichungen (B); denn die Relation (A), die auf den Gaußschen Satz zurückführte, ist schon in den Paragraphen 56 und 57 in der verlangten Weise umgestaltet worden, und zwar durch direkte Ausrechnung der rechten und linken Seite. Will man dieses Verfahren auch auf die beiden anderen Gleichungen anwenden, so wird man doch der Symmetrie wegen die Reduktion nur für eine von ihnen vorzunehmen brauchen. Allerdings könnte man auf Grund einiger Ergebnisse des § 60 zuerst versuchen,

die beiden Gleichungen in passender Weise zusammenzustellen. Wird nämlich die erste,

(1) $$\Theta' n - \Theta t + 2g' t - (n - n')g = 0,$$

mit m_{11}, die zweite,

(2) $$\Theta n' - \Theta' t + 2gt - (n' - n)g' = 0,$$

mit $-m_{21}$ multipliziert und addiert, so erscheint z. B. die Größe $m_{11}\Theta' n + m_{21}\Theta' t$ als Teil einer geometrischen Ableitung des Ausdruckes $m_{11}n + m_{21}t$, für den dort (Formel (10)) ein einfacher Wert gefunden worden ist. Entsprechendes läßt sich über $m_{11}\Theta t + m_{21}\Theta n'$ nach der Formel (12) aussagen. Die geometrischen Ableitungen beziehen sich dann auf Summen von Produkten je zweier Größen, während n, n' und t selbst aus Produkten von je drei Faktoren zusammengesetzt sind. Dafür hat sich aber die Gesamtanzahl der zu reduzierenden geometrischen Ableitungen vergrößert.

Verfährt man demnach ganz direkt, indem man die beiden in (1) vorkommenden Größen $\Theta' n$ und Θt durch gewöhnliche Ableitungen darstellt, so erhält man zunächst

$$\Theta' n = \sum_l \mu_{2l} \sum_{i,k} \mu_{1i}\,\mu_{1k} \frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} + 2\sum_l \mu_{2l} \sum_{i,k} b_{ik}\,\mu_{1i} \frac{\partial \mu_{1k}}{\partial u_l}.$$

Das Weitere gestaltet sich ähnlich wie im § 57; man hat einige Formeln aus dem § 50 anzuwenden, die nicht wieder einzeln aufgeführt zu werden brauchen, und die Summenausdrücke für t, g', ... beständig zu benutzen. Es wird

$$\Theta' n = \sum_{i,k,l} \mu_{1i}\,\mu_{1k}\,\mu_{2l} \frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} - \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\Big(\sum_{i,k} \mu_{1i}\,\mu_{2k}\,b_{ik}\Big)\Big(\sum_{\varrho,l} \mu_{1\varrho}\,\mu_{2l}\,\overline{m}_{\varrho l}\Big)$$
$$- 2\sum_{i,k,l,\varrho} \mu_{1i}\,\mu_{1\varrho}\,\mu_{2l} \begin{Bmatrix} \varrho\, l \\ k \end{Bmatrix} b_{ik}$$

(3) $$\Theta' n + 2g' t = \sum_{i,k,l} \mu_{1i}\,\mu_{1k}\,\mu_{2l} \frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} - 2\sum_{i,k,l,\varrho} \mu_{1i}\,\mu_{1\varrho}\,\mu_{2l} \begin{Bmatrix} \varrho\, l \\ k \end{Bmatrix} b_{ik}.$$

Dazu tritt

$$\Theta t = \sum_l \mu_{1l} \sum_{i,k} \mu_{1i}\,\mu_{2k} \frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} + \sum_l \mu_{1l} \sum_{i,k} b_{ik}\,\mu_{1i} \frac{\partial \mu_{2k}}{\partial u_l}$$
$$+ \sum_l \mu_{1l} \sum_{i,k} b_{ik}\,\mu_{2k} \frac{\partial \mu_{1i}}{\partial u_l}$$
$$= \sum_{i,k,l} \mu_{1i}\,\mu_{1l}\,\mu_{2k} \frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\Big(\sum_{i,k} \mu_{1i}\,\mu_{1k}\,b_{ik}\Big)\Big(\sum_{\varrho,l} \mu_{1\varrho}\,\mu_{1l}\,\overline{m}_{\varrho l}\Big)$$
$$- \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\Big(\sum_{i,k} \mu_{2i}\,\mu_{2k}\,b_{ik}\Big)\Big(\sum_{\varrho,l} \mu_{1\varrho}\,\mu_{1l}\,\overline{m}_{\varrho l}\Big) - \sum_{i,k,l,\varrho} \mu_{1i}\,\mu_{1l}\,\mu_{2\varrho} \begin{Bmatrix} \varrho\, l \\ k \end{Bmatrix} b_{ik}$$
$$- \sum_{i,k,l,\varrho} \mu_{1l}\,\mu_{1\varrho}\,\mu_{2k} \begin{Bmatrix} \varrho\, l \\ i \end{Bmatrix} b_{ik}$$

$$(4) \qquad \Theta t + (n - n')g = \sum_{i,k,l} \mu_{1i}\mu_{1l}\mu_{2k}\frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} - \sum_{i,k,l,\varrho} \mu_{1i}\mu_{1l}\mu_{2\varrho}\left\{{\varrho\, l \atop k}\right\} b_{ik}$$
$$- \sum_{i,k,l,\varrho} \mu_{1l}\mu_{1\varrho}\mu_{2k}\left\{{\varrho\, l \atop i}\right\} b_{ik}.$$

Die linke Seite der Gleichung (1) wird also:

$$\Theta' n + 2g't - (\Theta t + (n - n')g) =$$
$$\sum_{i,k,l} \mu_{1i}\mu_{1k}\mu_{2l}\frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} - \sum_{k,\varrho,l,i} \mu_{1i}\mu_{1k}\mu_{2l}\left\{{i\, l \atop \varrho}\right\} b_{k\varrho}$$
$$- \sum_{i,l,k} \mu_{1i}\mu_{1k}\mu_{2l}\frac{\partial b_{il}}{\partial u_k} + \sum_{\varrho,l,k,i} \mu_{1i}\mu_{1k}\mu_{2l}\left\{{i\, k \atop \varrho}\right\} b_{l\varrho}.$$

Setzt man nun

$$(5) \qquad \frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} - \sum_\varrho \left\{{i l \atop \varrho}\right\} b_{k\varrho} - \left(\frac{\partial b_{il}}{\partial u_k} - \sum_\varrho \left\{{i k \atop \varrho}\right\} b_{l\varrho}\right) = \bar{b}_{ikl},$$

so kann man schreiben:

$$(6) \qquad \Theta' n + 2g't - (\Theta t + (n - n')g) = \sum_{i,k,l} \mu_{1i}\mu_{1k}\mu_{2l}\bar{b}_{ikl}.$$

Da nach (5)

$$(7) \qquad \bar{b}_{ilk} = -\bar{b}_{ikl}$$

und speziell

$$\bar{b}_{ill} = 0$$

ist, so sind bei der Summation über k und l nur zwei Wertepaare zu berücksichtigen. Die rechte Seite von (6) erhält dann den Wert

$$\sum_i \mu_{1i}(\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21})\bar{b}_{i12},$$

sodaß nach S. 180 (35)

$$(8) \qquad \Theta' n + 2g't - (\Theta t + (n - n')g) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_i \mu_{1i}\bar{b}_{i12}$$

wird. Ebenso ist

$$(9) \qquad \Theta n' + 2gt - (\Theta' t + (n' - n)g') = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_i \mu_{2i}\bar{b}_{i21};$$

die Vergleichung zweier entsprechenden Glieder, z. B. der Anfangsglieder von $\Theta' n$ und $\Theta n'$, reicht aus, um dies zu erkennen.

Hiernach liefern die beiden Gleichungen (B), die zweite nach Umkehrung des Vorzeichens,

$$\mu_{11}\bar{b}_{112} + \mu_{12}\bar{b}_{212} = 0$$
$$\mu_{21}\bar{b}_{112} + \mu_{22}\bar{b}_{212} = 0,$$

d. h. wegen des Nichtverschwindens der beständig benutzten Determinante:

$$(10) \qquad \bar{b}_{112} = 0, \quad \bar{b}_{212} = 0$$

oder ausgeschrieben

$$(11)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial b_{11}}{\partial u_2} - \sum_\varrho \left\{ {12 \atop \varrho} \right\} b_{1\varrho} - \left(\frac{\partial b_{12}}{\partial u_1} - \sum_\varrho \left\{ {11 \atop \varrho} \right\} b_{2\varrho} \right) = 0 \\ &\frac{\partial b_{22}}{\partial u_1} - \sum_\varrho \left\{ {12 \atop \varrho} \right\} b_{2\varrho} - \left(\frac{\partial b_{12}}{\partial u_2} - \sum_\varrho \left\{ {22 \atop \varrho} \right\} b_{1\varrho} \right) = 0 \cdot \end{aligned}$$

In den Bezeichnungen der Flächentheorie lauten diese Formeln

$$(\mathrm{D})\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial v} - J_1' L - J_2' M - \left(\frac{\partial M}{\partial u} - J_1 M - J_2 N \right) = 0 \\ &\frac{\partial N}{\partial u} - J_1' M - J_2' N - \left(\frac{\partial M}{\partial v} - J_1'' L - J_2'' M \right) = 0 . \end{aligned}$$

Die drei Relationen zwischen den Fundamentalgrößen, zu denen wir nunmehr gelangt sind, nämlich (C) (S. 214) und (D), sollen als die **Fundamentalgleichungen** bezeichnet werden. Die Gleichung (C), die nach § 36 (1, 7) die Form

$$\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = f\left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial^2 E}{\partial v^2}, \ldots\right)$$

hat, ist vor den beiden anderen dadurch ausgezeichnet, daß sie die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung nur in einer einfachen algebraischen Verbindung enthält, während von denen der ersten Ordnung auch die ersten und drei bestimmte zweite Ableitungen vorkommen. In den beiden anderen Fundamentalgleichungen treten neben den Fundamentalgrößen zweiter Ordnung auch vier von ihren sechs ersten Differentialquotienten auf, außer den Fundamentalgrößen erster Ordnung und ihren ersten Ableitungen. Alle diese Größen sind in den Gleichungen rational enthalten.

Aus der Herleitung folgt, daß die Gleichungssysteme (A, B) und (C, D) einander inhaltlich ersetzen können. In der äußeren Form unterscheiden sich jene Gleichungen von diesen dadurch, daß sie eine Irrationalität, nämlich eine Quadratwurzel, aufweisen, die von den Ausdrücken der geometrischen Ableitungen herrührt und in den mit ihnen zusammenhängenden Größen im allgemeinen ebenfalls auftritt. Man kann demnach, wo eine Unterscheidung nötig ist, die Relationen (A, B) als die Fundamentalgleichungen in der irrationalen Form bezeichnen.

Dieselbe Unterscheidung greift auch schon bei den Gleichungen platz, aus denen (A) und (B) abgeleitet worden sind, nämlich den allgemeinen Frenetschen Formeln ($a, \ldots c'$), verglichen mit den Gauß-Weingartenschen Gleichungen (d, e). Die letzteren enthalten die

Differentialquotienten der kartesischen Koordinaten und der Richtungskosinus der Normale, sowie die Fundamentalgrößen nebst Ableitungen sämtlich rational.

§ 63.

Über die Herleitung der Fundamentalgleichungen aus den Gaußschen Gleichungen.

Die Fundamentalgleichungen in der irrationalen Form hatten für die allgemeinen Frenetschen Formeln die Bedeutung von Integrabilitätsbedingungen. Werden diese Bedingungen für die inhaltlich äquivalenten Gleichungen (d, e) aufgestellt, so müssen die Fundamentalgleichungen unmittelbar in der rationalen Gestalt erscheinen. Nach einer früher (S. 205) gemachten Bemerkung kann man sich dabei auf die Gaußschen Gleichungen (d) beschränken. Es sind die beiden Ausdrücke für $\frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v}$ und $\frac{\partial^3 x}{\partial v \partial u^2}$, dann für $\frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2}$ und $\frac{\partial^3 x}{\partial v^2 \partial u}$ zu vergleichen, die durch Differentiation der Formel (4) des § 61 nach v, der Formel (5) nach u, dann derselben Gleichung nach v und der Gleichung (6) nach u entstehen. Im ersten Falle ergibt sich

$$J_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + J_2 \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + L\frac{\partial X}{\partial v} - \left(J'_1 \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + J'_2 \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + M\frac{\partial X}{\partial u}\right)$$

$$= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial J'_1}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial J'_2}{\partial u} + X\frac{\partial M}{\partial u} - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial J_1}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial J_2}{\partial v} + X\frac{\partial L}{\partial v}\right).$$

Hier ist die rechte Seite eine homogene lineare Funktion von $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, X, und die linke läßt sich in eine solche verwandeln, wenn die Werte der zweiten Ableitungen der kartesischen Koordinaten aus den Gaußschen, die der Größen $\frac{\partial X}{\partial u}$ und $\frac{\partial X}{\partial v}$ aus den Weingartenschen Gleichungen eingesetzt werden. Die Gleichung erhält dann die Form

$$P\frac{\partial x}{\partial u} + P'\frac{\partial x}{\partial v} + P_0 X = 0,$$

und gleichzeitig mit ihr gelten die beiden

$$P\frac{\partial y}{\partial u} + P'\frac{\partial y}{\partial v} + P_0 Y = 0$$

$$P\frac{\partial z}{\partial u} + P'\frac{\partial z}{\partial v} + P_0 Z = 0.$$

Die Determinante des in P, P', P_0 homogenen linearen Systems ist gleich T, mithin müssen die Bedingungen

$$P = 0, \quad P' = 0, \quad P_0 = 0$$

einzeln gelten. In gleicher Weise erhält man im zweiten Fall aus

$$Q\frac{\partial x}{\partial u}+Q'\frac{\partial x}{\partial v}+Q_0X=0$$

die drei Gleichungen

$$Q=0,\quad Q'=0,\quad Q_0=0.$$

Hat man einmal die Werte von P, P' und P_0 berechnet, so folgen die der drei übrigen Größen daraus durch Vertauschung von u und v. Jedenfalls aber scheint es auf den ersten Anblick, als ob man hier mehr Gleichungen bekäme als bei der entsprechenden Behandlung der allgemeinen Frenetschen Formeln mit Hilfe der Vertauschungsformel. Daß dies tatsächlich nicht der Fall ist, lehrt die wirkliche Darstellung der sechs Größen $P, P', \ldots Q_0$. Doch soll diese, da das Resultat der Untersuchung bereits bekannt, diese selbst aber bei aller theoretischen Einfachheit etwas umständlich ist, hier übergangen werden. Es sei nur bemerkt, daß man bei der Reduktion der sechs Gleichungen auf drei, oder genauer, der vier Gleichungen $P=0$, $P'=0$, $Q=0$, $Q'=0$ auf eine einzige, zweckmäßig die Relationen zwischen den Differentialquotienten der Christoffelschen Verbindungen benutzt, die im § 57 abgekürzt angegeben sind. Man findet dann die Identitäten

$$P-Q'\equiv 0$$

und, $F\gtrless 0$ vorausgesetzt,

$$EP+FP'\equiv 0,\qquad FQ+GQ'\equiv 0;$$

die Gleichungen $P'=0$, $Q=0$, $Q'=0$ werden also von $P=0$ abhängig. Nimmt man statt dieser

$$FP+GP'=0\quad\text{oder}\quad EQ+FQ'=0,$$

so erhält man die Gaußsche Relation

(C) $$K_{ab}=K_a$$

wieder. Die beiden übrigen Gleichungen $P_0=0$, $Q_0=0$ liefern unmittelbar die Relationen (D).

Ist $F=0$, so werden $P=0$ und $Q'=0$ identisch erfüllt, und die Gleichungen $P'=0$, $Q=0$ geben übereinstimmend die vereinfachte Gaußsche Relation.

Obwohl, wie früher erwähnt, in fast allen flächentheoretischen Untersuchungen die Christoffelschen Verbindungen an Stelle der ersten Ableitungen von E, F, G verwendet werden müssen, so mögen doch, wie im § 36 die Gaußsche Relation, so hier die beiden anderen Fundamentalgleichungen vollständig entwickelt angegeben werden. Sie lauten:

$$T^2\left(\frac{\partial L}{\partial v}-\frac{\partial M}{\partial u}\right)+\frac{1}{2}L\left(F\frac{\partial G}{\partial u}-G\frac{\partial E}{\partial v}\right)$$

$$+M\left(\frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial u}-\frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial u}+F\frac{\partial E}{\partial v}-F\frac{\partial F}{\partial u}\right)$$

$$+N\left(E\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{1}{2}E\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{1}{2}F\frac{\partial E}{\partial u}\right)=0$$

$$T^2\left(\frac{\partial N}{\partial u}-\frac{\partial M}{\partial v}\right)+L\left(G\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{1}{2}G\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{1}{2}F\frac{\partial G}{\partial v}\right)$$

$$+M\left(\frac{1}{2}E\frac{\partial G}{\partial v}-\frac{1}{2}G\frac{\partial E}{\partial v}+F\frac{\partial G}{\partial u}-F\frac{\partial F}{\partial v}\right)$$

$$+\frac{1}{2}N\left(F\frac{\partial E}{\partial v}-E\frac{\partial G}{\partial u}\right)=0.$$

Will man sich diese Gleichungen mittels einer möglichst einfachen Rechnung vergegenwärtigen, allerdings ohne Rücksicht auf ihren Zusammenhang mit der ersten Fundamentalgleichung, ja überhaupt auf ihre eigentliche Bedeutung, so kann man die Größen

$$\sum X\frac{\partial^3 x}{\partial u^2\partial v} \text{ und } \sum X\frac{\partial^3 x}{\partial v^2\partial u}$$

aus den Definitionsgleichungen für L, M, N,

$$\sum X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}=L,\quad \sum X\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}=M,\ldots,$$

auf je zwei verschiedene Arten bilden, alsdann die zweiten Ableitungen der kartesischen Koordinaten aus den Gaußschen Gleichungen entnehmen und darauf die zweite Darstellung der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung

$$-\sum\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u}=L,\cdots$$

anwenden.

VII. Abschnitt.

Besondere Kurven und Koordinatensysteme auf einer Fläche.

§ 64.

Krümmungslinien. Ihre Bestimmung für Mittelpunktsflächen zweiten Grades.

Die Untersuchungen über Kurven auf Flächen, soweit sie im Vorhergehenden angestellt worden sind, beziehen sich auf ganz beliebige solche Kurven. Unter den Linien von besonderen Eigenschaften ziehen einige nach der Form der bisherigen Ergebnisse von vornherein die Aufmerksamkeit auf sich: diejenigen, für welche eine der geometrischen Größen, deren Betrachtung sich als wichtig erwiesen hat, den Wert Null annimmt. Um sie analytisch zu definieren, hat man auf die Formeln S. 64 (5) für die Normalkrümmung, S. 127 (6) für die Tangentialkrümmung und S. 193 (7) für die geodätische Windung zurückzugreifen. Man erkennt dann, daß die Kurven, deren Tangentialkrümmung verschwindet, durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt werden; diejenigen, für welche die Normalkrümmung oder die geodätische Windung Null ist, durch eine Differentialgleichung erster Ordnung. Da diese außerdem in beiden Fällen vom zweiten Grade in $\frac{dv}{du}$ ist, so liefern die Bedingungen $n = 0$ und $t = 0$ je ein Netz von Kurven auf der Fläche.

Nun ist im § 24 (S. 78) bewiesen worden, daß die Determinante der quadratischen Form in der Gleichung $t = 0$ oder

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} Edu + Fdv, & Fdu + Gdv \\ Ldu + Mdv, & Mdu + Ndv \end{vmatrix} = 0$$

unter den im Anfange gemachten Voraussetzungen immer einen negativen Wert hat. Es gibt also stets ein Netz von Flächenkurven, deren geodätische Windung verschwindet; sie werden als Krümmungslinien der Fläche bezeichnet. Dagegen richtet sich die Determinante der linken Seite der Differentialgleichung

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$$

im Vorzeichen nach dem von K_{ab}, sodaß die durch $n = 0$ dargestellten Kurven nur auf negativ gekrümmten Flächen existieren.

Die Krümmungslinien, die zuerst behandelt werden sollen, können noch durch verschiedene andere geometrische Eigenschaften gekennzeichnet werden. An der eben erwähnten Stelle (§ 24) erschien die Gleichung (1) als Bestimmung für diejenigen Flächentangenten, zu denen Maximum und Minimum der Normalkrümmung gehört; mit diesen Tangenten fallen also in jedem Flächenpunkte die Tangenten der in Rede stehenden Kurven zusammen. Weiter war in der Theorie der Indikatrix (§ 33—34) gezeigt worden, daß die beiden Tangenten den Hauptachsen des Dupinschen Kegelschnitts entsprechen. Aus diesem Grunde werden die Krümmungslinien auch als Haupttangentenkurven bezeichnet. Im einzelnen würde man eine Krümmungslinie durch folgende geometrische Konstruktion erhalten: Man geht von einem beliebigen Flächenpunkte A längs einer der beiden Haupttangenten zu einem unendlichnahen Punkte B über, legt in diesem wieder die beiden Haupttangenten an die Fläche und schreitet längs derjenigen von ihnen, deren Richtung von AB unendlichwenig abweicht, weiter zu einem benachbarten Punkte C fort, und so weiter, so ist der geometrische Ort der Punkte $A, B, C, \ldots$ eine Krümmungslinie der Fläche.

Die in der Theorie der Normalkrümmung aufgestellten Formeln gestatten, die Differentialgleichung der Krümmungslinien für jede Flächendarstellung sofort anzugeben. Für $z = z(x, y)$ z. B. ist sie nach S. 80 (8)

$$(2)\quad (pqt-(1+q^2)s)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+((1+p^2)t-(1+q^2)r)\frac{dy}{dx}+((1+p^2)s-pqr)=0.$$

Bevor nun die allgemeine Theorie der Krümmungslinien weiter verfolgt wird, sollen diese Kurven für die Flächen zweiten Grades, aber abgesehen von den Kegel- und Zylinderflächen, durch Integration der Gleichung (2) wirklich bestimmt werden.

Die Fläche sei zunächst ein dreiachsiges Ellipsoid,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a>b>c).$$

Die Werte von p, q, r, s, t werden nach S. 81

$$p=-\frac{c^2x}{a^2z}, \quad q=-\frac{c^2y}{b^2z},$$

$$r=-\frac{c^4}{a^2z^3}\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right), \quad s=-\frac{c^4xy}{a^2b^2z^3}, \quad t=-\frac{c^4}{b^2z^3}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right),$$

woraus nach einfachen Reduktionen

$$pqt-(1+q^2)s=\frac{c^4(b^2-c^2)xy}{a^2b^4z^3}.$$

Vertauscht man x mit y, a mit b, so kommt

$$pqr-(1+p^2)s=\frac{c^4(a^2-c^2)xy}{a^4b^2z^3}.$$

Endlich ist

$$(1+p^2)t-(1+q^2)r=\frac{1}{s}\left[r(pqt-(1+q^2)s)-t(pqr-(1+p^2)s)\right]$$
$$=\frac{c^4}{a^2b^2z^3}\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2-\frac{b^2-c^2}{b^2}y^2-(a^2-b^2)\right).$$

Setzt man diese Ausdrücke in (2) ein und dividiert die entstehende Gleichung durch $\frac{c^4(a^2-c^2)}{a^4b^2z^3}$, so ergibt sich

$$(3)\quad \frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(x^2-\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}y^2-\frac{a^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2}\right)\frac{dy}{dx}-xy=0.$$

Die Halbachsen a, b, c der Fläche kommen hier nur in den zwei Verbindungen

$$(4)\qquad \frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}=A,\qquad \frac{a^2(a^2-b^2)}{a^2-c^2}=B$$

vor; die Gleichung kann daher geschrieben werden

$$(5)\qquad Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x^2-Ay^2-B)\frac{dy}{dx}-xy=0.$$

Wegen der Größenfolge $a>b>c$ sind A und B positiv.

Zur Integration von (5) bieten sich mehrere Wege dar. Man kann z. B., nach Monge, versuchen, durch einmaliges Weiterdifferentiieren und Zusammenstellung der abgeleiteten Gleichung mit der gegebenen eine Differentialgleichung zweiter Ordnung zu bilden, welche formal einfacher ist als die ursprüngliche, die zwar nur von der ersten Ordnung, aber doch vom zweiten Grade war. Gelingt es, das Integral der neuen Gleichung zu finden, so hat man es so zu spezialisieren, daß auch die gegebene befriedigt wird. Setzt man nun zur Abkürzung

$$\frac{dy}{dx}=y',\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=y''$$

und führt die Differentiation aus, so folgt

$$2Axyy'y''+Ay'^2(xy'+y)+(x^2-Ay^2-B)y''$$
$$+2(x-Ayy')y'-(xy'+y)=0$$

oder

$$(6)\quad (Ay'^2+1)(xy'-y)+2Axyy'y''+(x^2-Ay^2-B)y''=0.$$

Wird jetzt aus (5) und (6) die Größe $(x^2 - Ay^2 - B)$ eliminiert, so ergibt sich nach Weglassung des wesentlich positiven Faktors $(Ay'^2 + 1)$:

(7) $$xyy'' + (xy' - y)y' = 0$$

oder, nach Division mit xyy',

$$\frac{y''}{y'} + \frac{y'}{y} - \frac{1}{x} = 0,$$

welche Gleichung das Integral

$$y\frac{dy}{dx} = Cx$$

liefert. Durch abermalige Integration folgt

$$y^2 = Cx^2 + C',$$

worin noch

$$C' = -\frac{BC}{AC+1}$$

genommen werden muß, um die Gleichung (5) zu befriedigen; C bleibt willkürlich. Demnach projizieren sich die Krümmungslinien des Ellipsoids auf die (xy)-Ebene in Kegelschnitten, deren Gleichung ist

(8) $$Cx^2 - y^2 = \frac{BC}{AC+1}.$$

Diese Integrationsmethode wird freilich nur durch den Erfolg gerechtfertigt. Es möge deshalb noch ein anderes Verfahren angegeben werden, bei dem man nach einer sehr einfachen Transformation auf einen bekannten Typus von Differentialgleichungen erster Ordnung kommt. Multipliziert man nämlich (5) mit xy und setzt dann

$$x^2 = \xi, \qquad y^2 = \eta,$$

so ergibt sich

$$A\xi\eta'^2 + (\xi - A\eta - B)\eta' - \eta = 0$$

oder

(9) $$\eta = \xi\eta' - \frac{B\eta'}{A\eta' + 1}.$$

Diese Gleichung bildet einen Spezialfall der Clairautschen

$$\eta = \xi\eta' + f(\eta'),$$

deren Integral ist

$$\eta = C\xi + f(C).$$

Setzt man hierin

$$f(C) = \frac{-BC}{AC+1}$$

und führt für ξ und η ihre Werte ein, so erhält man die Gleichung (8) wieder.

Die Folgerungen, die man aus (8) ziehen kann, werden übersichtlicher, wenn man die Halbachsen der Fläche anders bezeichnet, die Flächengleichung nämlich in die Form setzt

$$(10) \qquad \frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - \beta^2} + \frac{z^2}{\nu^2 - \gamma^2} = 1.$$

Da ursprünglich

$$a > b > c > 0$$

war, so muß jetzt

$$\nu > \gamma > \beta > 0$$

sein. Für diese Bezeichnungen wird

$$A = \frac{\nu^2(\gamma^2 - \beta^2)}{\gamma^2(\nu^2 - \beta^2)}, \qquad B = \frac{\nu^2\beta^2}{\gamma^2}.$$

An Stelle von C werde eine neue Konstante μ^2 durch die Gleichung

$$AC + 1 = \frac{\beta^2}{\mu^2}$$

eingeführt. Diese Substitution setzt $AC + 1$ als positive Größe voraus. In der Tat, wäre $AC + 1 < 0$, so müßte, da $A > 0$ ist, $C < 0$ sein. Die Gleichung (8) würde dann in der (xy)-Ebene eine imaginäre Kurve darstellen, was der Realität der Krümmungslinien widerspricht. Führt man die neuen Zeichen in (8) ein, so kommt

$$(11) \qquad \frac{\gamma^2 x^2}{\mu^2\nu^2} + \frac{(\gamma^2 - \beta^2)y^2}{(\mu^2 - \beta^2)(\nu^2 - \beta^2)} = 1.$$

Diese Gleichung ist symmetrisch in μ und ν. Sie stellt also, für ν als Parameter, auch die Projektionen der Krümmungslinien der Fläche

$$(12) \qquad \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - \beta^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - \gamma^2} = 1$$

auf die (xy)-Ebene dar. In dieselbe Kurve (für bestimmtes μ und ν) projiziert sich aber drittens die Schnittlinie der beiden Flächen (10) und (12). Denn die Elimination von z liefert

$$\left(\frac{\nu^2 - \gamma^2}{\nu^2} - \frac{\mu^2 - \gamma^2}{\mu^2}\right)x^2 + \left(\frac{\nu^2 - \gamma^2}{\nu^2 - \beta^2} - \frac{\mu^2 - \gamma^2}{\mu^2 - \beta^2}\right)y^2 = \nu^2 - \mu^2,$$

und diese Gleichung führt nach ausgeführter Vereinfachung und Division mit $\nu^2 - \mu^2$ auf (11) zurück.

Im vorliegenden Falle kann man nun aus der Übereinstimmung der Projektionen der beiden Kurven in der (xy)-Ebene auf die Identität der Kurven selbst schließen, ohne noch die Projektion auf eine andere Koordinatenebene zu untersuchen. Denn die Kanten des im räumlichen Koordinatensystem durch die Gleichung (11) dargestellten Projektionszylinders schneiden die Fläche zweiten Grades (10) beider-

seits der (xy)-Ebene nur in je einem Punkte; m. a. W., dieser Zylinder kann die Fläche nicht in einer Krümmungslinie und einer von ihr verschiedenen Kurve, die Schnittlinie mit der Fläche (12) wäre, treffen. Dieses Resultat, auch für die letztere Fläche ausgesprochen, besagt, daß die Durchdringungskurve der Flächen (10) und (12), die Realität vorausgesetzt, Krümmungslinie auf beiden sein muß. Nun findet man leicht, daß für

$$\beta^2 > \mu^2$$

und für

(13) $$\gamma^2 > \mu^2 > \beta^2$$

die Schnittkurve reell ist, für $\mu^2 > \gamma^2$ dagegen nicht. Schreibt man im ersten Fall λ für μ, setzt also

(14) $$\beta^2 > \lambda^2 > 0,$$

so ergibt sich: Die Fläche

(10) $$\frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - \beta^2} + \frac{z^2}{\nu^2 - \gamma^2} = 1$$

wird von den Flächen

(15) $$\frac{x^2}{\lambda^2} - \frac{y^2}{\beta^2 - \lambda^2} - \frac{z^2}{\gamma^2 - \lambda^2} = 1$$

und

(12) $$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - \beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2 - \mu^2} = 1$$

in ihren Krümmungslinien geschnitten; und zwar erhält man die beiden Scharen dieser Kurven, wenn man λ und μ alle Werte beilegt, die den Ungleichungen (14) und (13) genügen. Die durchgeführte Untersuchung lehrt, daß auch jede der Flächen (15) und (12) von den Flächen (10, 12) und (10, 15) in ihren Krümmungslinien geschnitten wird, wobei der Parameter ν alle Werte

$$\nu^2 > \gamma^2$$

zu durchlaufen hat.

Diese Ergebnisse enthalten weit mehr als die Lösung der an die Spitze gestellten Aufgabe. Nicht nur, daß sie die Krümmungslinien auf einer ganzen Schar von Flächen kennen lehren, zu denen die gegebene für einen speziellen Wert von ν gehört: sie liefern diese Kurven auch auf zwei anderen Scharen von Flächen zweiten Grades. Denn daß die Scharen (15) und (12) von (10) tatsächlich verschieden sind, geht aus den Ungleichheitsbedingungen für λ, μ, ν unmittelbar hervor. Während in (10) nur Ellipsoide enthalten sind, stellen die Gleichungen (15) und (12) zweischalige und einschalige Hyperboloide dar.

Wie aus den Gleichungen ersichtlich, haben die Hauptschnitte sämtlicher Flächen dieselben Brennpunkte. Infolge dessen heißen die drei durch (10), (15) und (12) gegebenen Scharen von Flächen zweiten Grades konfokal. Das Resultat der Untersuchung läßt sich demnach schließlich dahin aussprechen, daß konfokale Mittelpunktsflächen zweiten Grades sich gegenseitig in ihren Krümmungslinien schneiden. Auf verschiedenen Wegen, z. B. durch Diskussion der Projektionen der Schnittkurven auf die Koordinatenebenen, kann man sich davon überzeugen, daß konfokale Flächen derselben Art einander niemals treffen, solche von verschiedenen Arten dagegen immer.

Das Schneiden geschieht stets unter rechten Winkeln. Denn es sind z. B. für ein Ellipsoid (10) und ein einschaliges Hyperboloid (12) die Richtungskosinus der Normale den Größen

$$\frac{x}{\nu^2}, \quad \frac{y}{\nu^2-\beta^2}, \quad \frac{z}{\nu^2-\gamma^2}$$

und

$$\frac{x}{\mu^2}, \quad \frac{y}{\mu^2-\beta^2}, \quad \frac{-z}{\gamma^2-\mu^2}$$

proportional, und die Bedingung der Orthogonalität längs der Schnittkurve,

$$\frac{x^2}{\mu^2\nu^2}+\frac{y^2}{(\mu^2-\beta^2)(\nu^2-\beta^2)}-\frac{z^2}{(\gamma^2-\mu^2)(\nu^2-\gamma^2)}=0,$$

ist aus dem Grunde erfüllt, weil sie auch aus (10) und (12) durch Subtraktion erhalten wird.

§ 65.

Elliptische Koordinaten.

Kehrt man jetzt zu dem Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

zurück und nimmt demnach

$$\nu^2=a^2, \qquad \nu^2-\beta^2=b^2, \qquad \nu^2-\gamma^2=c^2$$

an, so findet man aus den Ungleichungen (14), (13)

$$a^2>a^2-\lambda^2>b^2$$

$$b^2>a^2-\mu^2>c^2.$$

Es werde noch

$$a^2-\lambda^2=u, \qquad a^2-\mu^2=v$$

gesetzt; dann ergibt sich nach Umwandlung der Gleichungen (15) und (12):

Das Ellipsoid

$$(1)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

wird von den zweischaligen Hyperboloiden

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2-u}+\frac{y^2}{b^2-u}+\frac{z^2}{c^2-u}=1 \qquad (a^2>u>b^2)$$

und den einschaligen Hyperboloiden

$$(3)\qquad \frac{x^2}{a^2-v}+\frac{y^2}{b^2-v}+\frac{z^2}{c^2-v}=1 \qquad (b^2>v>c^2)$$

in seinen Krümmungslinien geschnitten.

Um die kartesischen Koordinaten der gegebenen Fläche explizite durch die Parameter u, v der Krümmungskurven darzustellen, braucht man nur die in x^2, y^2, z^2 linearen Gleichungen nach diesen Größen aufzulösen. Aber noch einfacher kann man, wie es z. B. Hesse tut, folgenden Schluß machen. Die Gleichungen (1), (2), (3) haben übereinstimmend die Form

$$(4)\qquad \frac{x^2}{a^2-s}+\frac{y^2}{b^2-s}+\frac{z^2}{c^2-s}=1.$$

Für die erste ist nämlich s gleich Null, für die zweite gleich u und für die dritte gleich v. M. a. W., wenn man sich x^2, y^2, z^2 als Funktionen von u und v bestimmt denkt, so hat die in s kubische Gleichung (4) die Wurzeln $s=0,\ u,\ v$. Schafft man die Nenner weg und setzt

$$(5)\qquad x^2(b^2-s)(c^2-s)+y^2(c^2-s)(a^2-s)+z^2(a^2-s)(b^2-s) \\ -(a^2-s)(b^2-s)(c^2-s)=G(s),$$

so wird also die Gleichung

$$G(s)=0$$

durch $s=0$, $s=u$ und $s=v$ befriedigt. Andererseits sind dieselben Werte auch Wurzeln der Gleichung

$$G_1(s)\equiv s(s-u)(s-v)=0.$$

Demnach können sich die beiden ganzen Funktionen G und G_1 nur um einen konstanten Faktor unterscheiden, der aber hier offenbar gleich Eins ist. D. h. es gilt für beliebige Werte von s die Identität

$$x^2(b^2-s)(c^2-s)+\cdots-(a^2-s)(b^2-s)(c^2-s)=s(s-u)(s-v).$$

Setzt man in ihr der Reihe nach $s=a^2$, $s=b^2$, $s=c^2$, so bekommt man

$$
(6) \qquad
\begin{aligned}
x^2 &= \frac{a^2(a^2-u)(a^2-v)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\\
y^2 &= \frac{b^2(b^2-u)(b^2-v)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}\\
z^2 &= \frac{c^2(c^2-u)(c^2-v)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.
\end{aligned}
$$

Diese Darstellung der Koordinaten des Ellipsoids durch sogenannte elliptische Koordinaten ist auf S. 30 bereits angegeben worden. Sie gilt nicht für eine Umdrehungsfläche. Doch läßt sich für solche Flächen die Frage nach den Krümmungslinien allgemein erledigen; vgl. § 69 (S. 255).

Von der Verteilung der Krümmungslinien auf dem dreiachsigen Ellipsoid gewinnt man eine anschauliche Vorstellung, wenn man die Annahme, u oder v seien einem Grenzwerte der für sie geltenden Intervalle gleich, in ihrer Wirkung auf die Darstellung (6) untersucht. Wird zuerst

$$u = a^2$$

eingeführt, so ergibt sich $x = 0$, d. h. der Hauptschnitt, der die mittlere und die kleinste Achse der Fläche enthält. Die zweite und dritte Formel (6) liefern

$$y^2 = \frac{b^2(b^2-v)}{b^2-c^2}, \qquad z^2 = \frac{c^2(v-c^2)}{b^2-c^2}.$$

Läßt man hierin den Parameter v stetig alle Werte von b^2 bis c^2 durchlaufen, so findet man unter Beschränkung auf den im ersten Quadranten gelegenen vierten Teil des Hauptschnitts, daß der Punkt (yz) stetig alle Lagen zwischen den Scheiteln $(0, c)$ und $(b, 0)$ dieses Schnittes durchläuft. Entsprechendes tritt für $v = c^2$, also $z = 0$ ein. Demnach sind die beiden Hauptschnitte, die die mittlere Achse enthalten, in ihrer ganzen Ausdehnung den Krümmungslinien zuzurechnen; der durch die größte Achse gehende der ersten Schar, nämlich $v = \text{const.}$, der andere der zweiten Schar.

Die Annahme, u oder v sei gleich dem gemeinsamen Grenzwerte b^2 beider Parameter, ergibt $y = 0$, den Hauptschnitt durch die größte und kleinste Achse. Die erste und dritte Gleichung (6) erhalten die Form

$$x^2 = \frac{a^2(a^2-t)}{a^2-c^2}, \qquad z^2 = \frac{c^2(t-c^2)}{a^2-c^2}.$$

Ist hierin $t = v$, und durchläuft dieser Parameter alle Werte seines Bereiches, so geht der Punkt (xz), wieder im ersten Quadranten, von dem Punkte K mit den Koordinaten

$$x = a\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \qquad z = c\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

bis zum Scheitel $(a, 0) \equiv A$, dem Endpunkt der großen Achse. Wird aber $t = u$ angenommen, war also die gleich b^2 gesetzte Größe der Parameter v, so beschreibt der Punkt (xz) das Stück des Hauptschnitts zwischen dem Endpunkt $(0, c) \equiv C$ der kleinsten Achse bis zum Punkte K. Hiernach gehört von dem vierten Teil des Hauptschnitts das Stück KC zur ersten, KA zur zweiten Schar von Krümmungslinien. K ist ein Kreispunkt der Fläche (vgl. S. 110). Die Übertragung dieser Resultate auf den ganzen Hauptschnitt ergibt leicht die folgende Anschauung: Die vier Kreispunkte K, K', K'', K''' lassen sich auf zwei Arten derart zu Paaren gruppieren, daß die Krümmungslinien der ersten Schar die Punkte K, K' und K'', K''', die der zweiten Schar die Punkte K, K''' und K', K'' umziehen.

Nachdem man einmal die Gleichungen, die das Problem der Krümmungslinien auf dem Ellipsoid lösen, in die Form (2, 3) gesetzt und, wie angegeben, geometrisch gedeutet hat, kann man den Zusammenhang der Parameter u, v mit den Halbachsen der drei konfokalen Flächen unmittelbar ablesen. Eine geometrische Bedeutung der Parameter läßt sich aber auch aus der Theorie des Ellipsoids allein entnehmen. Es sei $(xyz) \equiv P$ ein beliebiger, aber dann bestimmter Punkt der Fläche; die beiden zugehörigen Werte von u und v sind die von Null verschiedenen Wurzeln der kubischen Gleichung (4), d. h. Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$s^2 - (\Sigma a^2 - \Sigma x^2)s + \Sigma b^2c^2 - \Sigma(b^2 + c^2)x^2 = 0.$$

Demnach gelten die Beziehungen

$$(7) \qquad \begin{aligned} u + v &= a^2 + b^2 + c^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \\ uv &= b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2 - (b^2 + c^2)x^2 - (c^2 + a^2)y^2 - (a^2 + b^2)z^2. \end{aligned}$$

Nach einem bekannten Satze ist aber die Summe der Quadrate der Halbachsen gleich der Summe der Quadrate irgend dreier konjugierten Halbmesser:

$$(8) \qquad a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2.$$

Hierin werde insbesondere c' gleich dem Halbmesser OP angenommen, sodaß

$$c'^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

ist, so liefert die erste Gleichung (7):

$$(9) \qquad u + v = a'^2 + b'^2.$$

a' und b' sind konjugierte Halbmesser der Ellipse, in der die zu OP konjugierte, der Tangentialebene in P parallele Diametralebene die Fläche schneidet. Bezeichnen noch α und β die Halbachsen dieses Schnittes, so gilt die Gleichung

$$a'^2 + b'^2 = \alpha^2 + \beta^2. \tag{10}$$

Sie enthält den Satz der Kegelschnittlehre, dessen Ausdehnung auf den Raum durch (8) wiedergegeben wird. Aus (9) und (10) folgt

$$u + v = \alpha^2 + \beta^2. \tag{11}$$

Weiter ergibt sich aus der zweiten Gleichung (7):

$$\frac{uv}{a^2b^2c^2} = \sum \frac{1}{a^2} - \sum \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\frac{x^2}{a^2}$$

$$= \sum \frac{1}{a^2} - \sum \left(\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^4}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\left(1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right)\right) + \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}$$

$$\frac{uv}{a^2b^2c^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}. \tag{12}$$

Nun ist aber

$$\sum \frac{x^2}{a^4} = \frac{1}{p^2}, \tag{13}$$

wo p den Abstand der Tangentialebene im Punkte P vom Mittelpunkte der Fläche bedeutet. Demnach lautet die Gleichung (12)

$$uvp^2 = a^2b^2c^2. \tag{14}$$

Nach einem weiteren bekannten Satze ist der Inhalt abc des rechtwinkligen Parallelepipeds aus den Halbachsen gleich dem Volumen des Parallelepipeds, das irgend drei konjugierte Halbmesser a', b', c' zu Kanten hat. Dieser Satz erscheint als Verallgemeinerung des anderen, wonach das Rechteck aus α und β dem Parallelogramm mit den Seiten a' und b' inhaltsgleich ist. Setzt man, unter Festhaltung von $c' = OP$, den Inhalt des schiefwinkligen Parallelepipeds gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe, so kann man nach dem zweiten Satze die Grundfläche von vornherein gleich $\alpha\beta$ annehmen, während die Höhe offenbar gleich p ist. Der erste Satz liefert dann

$$abc = \alpha\beta p,$$

und die Gleichung (14) geht in

$$uv = \alpha^2\beta^2 \tag{15}$$

über.

Nach (11) und (15) bedeuten jetzt u und v die Quadrate der Halbachsen des dem Halbmesser OP konjugierten Diametralschnitts. Wird $\alpha > \beta$ vorausgesetzt, so ist

$$u = \alpha^2, \qquad v = \beta^2. \tag{16}$$

Den mannigfachen Folgerungen nachzugehen, die sich hieraus ziehen lassen, ist Sache einer speziellen Theorie der Flächen zweiten Grades. Hier möge noch untersucht werden, welchen Ausdruck das Linienelement des Ellipsoids für elliptische Koordinaten annimmt.

Durch logarithmische Differentiation folgen aus (6) die Formeln

$$dx = -\frac{x}{2}\left(\frac{du}{a^2-u} + \frac{dv}{a^2-v}\right), \ldots .$$

Um hieraus $ds^2 \equiv \Sigma dx^2$ zusammenzusetzen, bedient man sich zweckmäßig einiger Formeln, die aus der Theorie des Differenzenprodukts entspringen, nämlich

$$\sum \frac{1}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} = 0 \tag{17}$$

$$\sum \frac{a^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} = 0 \tag{18}$$

$$\sum \frac{a^4}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} = 1. \tag{19}$$

Sie liefern

$$ds^2 = \frac{u-v}{4}\left(\frac{u\,du^2}{(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)} - \frac{v\,dv^2}{(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)}\right), \tag{20}$$

d. h.

$$E = \frac{u(u-v)}{4(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)}, \qquad G = \frac{v(v-u)}{4(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)}, \tag{21}$$

während F verschwindet, wie es wegen der Orthogonalität der Krümmungslinien sein muß.

Eine Vereinfachung der Formel (20) kann durch die Substitution

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{u}{(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)}}\,du = du', \qquad \frac{1}{2}\sqrt{\frac{-v}{(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)}}\,dv = dv' \tag{22}$$

erzielt werden, wo die Ausdrücke links nach den für u und v geltenden Ungleichheitsbedingungen reelle Werte haben. Die Gesamtheit der dargestellten Kurven wird hierdurch nicht geändert (vgl. § 31), d. h. u' und v' sind wieder als Parameter der Krümmungslinien zu betrachten.

Die Formel (20) für ds^2 erhält nun die Gestalt

(23) $$ds^2 = (U' - V')(du'^2 + dv'^2),$$

wo U' eine Funktion von u', V' eine solche von v' allein bedeutet. Im einzelnen wird

(24) $$E' = G' = U' - V',$$

während F' gleich Null geblieben ist. Nach S. 29 sind die Bogenelemente der Koordinatenlinien $\sqrt{E'}du'$ und $\sqrt{G'}dv'$; sie werden also hier einander gleich, wenn man $du' = dv'$ annimmt. Man sagt in einem solchen Falle, die Fläche werde in unendlichkleine Quadrate geteilt, und nennt das Kurvennetz, das eine solche Zerlegung bewirkt, isometrisch. Hiernach ergibt sich für das Ellipsoid — und ebenso für die beiden Hyperboloide — der Satz, daß die Krümmungslinien ein Netz isometrischer Kurven bilden.

§ 66.

Die Krümmungslinien der Paraboloide.

Das elliptische und das hyperbolische Paraboloid werden durch die Gleichung

(1) $$2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$$

dargestellt, bei gleichen und verschiedenen Vorzeichen von a und b. Für die ersten und zweiten partiellen Ableitungen der z-Koordinate ergeben sich die Werte

$$p = \frac{x}{a}, \qquad q = \frac{y}{b},$$
$$r = \frac{1}{a}, \qquad s = 0, \qquad t = \frac{1}{b},$$

aus denen sich die Differentialgleichung der Krümmungslinien in der Form

(2) $$axyy'^2 + (b(a^2 + x^2) - a(b^2 + y^2))y' - bxy = 0$$

zusammensetzt. Transformiert man diese Gleichung in der auf S. 236 angegebenen Weise, so erhält man wieder eine Differentialgleichung der Clairautschen Form, nämlich

(3) $$\eta = \xi\eta' + \frac{ab(a-b)\eta'}{b + a\eta'}.$$

Aus ihrem Integral

(4) $$y^2 - Cx^2 = \frac{ab(a-b)C}{b + aC}$$

kann man aber hier ebenso wenig wie dort eine anschauliche Vorstellung von dem Verlauf der Krümmungskurven entnehmen.

Nun läßt sich z. B. die Gleichung des elliptischen Paraboloids aus der des Ellipsoids durch einen Grenzübergang herleiten. Man darf daher erwarten, daß auch die Krümmungslinien des Paraboloids durch Grenzübergang aus denen des Ellipsoids werden abgeleitet werden können.

Die Gleichung des Ellipsoids war (S. 237 (10)) in der Form

$$\frac{x^2}{\nu^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - \beta^2} + \frac{z^2}{\nu^2 - \gamma^2} = 1$$

angenommen worden. Hier ist x bevorzugt, in der Gleichung des Paraboloids dagegen z. Wir vertauschen daher zunächst die Bezeichnungen der Koordinaten so, daß die Ausgangsgleichung

$$(5) \qquad \frac{z^2}{\nu^2} + \frac{x^2}{\nu^2 - \beta^2} + \frac{y^2}{\nu^2 - \gamma^2} = 1$$

wird. β ist der Abstand der Brennpunkte des Hauptschnitts $y = 0$ vom Mittelpunkt.

Man verschiebe nun den Anfangspunkt der Koordinaten vermittelst der Substitution

$$z = z' - \beta$$

nach dem Brennpunkte $(0, 0, -\beta)$, und setze gleichzeitig

$$(6) \qquad \nu = \nu' + \beta, \qquad \gamma = \gamma' + \beta.$$

Da $\gamma > \beta$ war, so ist

$$\gamma' > 0.$$

Die Transformation liefert

$$\frac{(z' - \beta)^2 - (\nu' + \beta)^2}{(\nu' + \beta)^2} + \frac{x^2}{\nu'^2 + 2\beta\nu'} + \frac{y^2}{\nu'^2 + 2\beta\nu' - \gamma'^2 - 2\beta\gamma'} = 0$$

oder

$$\frac{\frac{1}{\beta}(z'^2 - 2\beta z' - \nu'^2 - 2\beta\nu')}{\left(1 + \frac{\nu'}{\beta}\right)^2} + \frac{x^2}{2\nu' + \frac{\nu'^2}{\beta}} + \frac{y^2}{2(\nu' - \gamma') + \frac{\nu'^2 - \gamma'^2}{\beta}} = 0.$$

Unterdrückt man nun, indem man β unendlich groß werden läßt, alle Glieder, die β nur im Nenner enthalten, so findet man

$$(7) \qquad 2(z' + \nu') = \frac{x^2}{2\nu'} + \frac{y^2}{2(\nu' - \gamma')}.$$

Es ist $\nu > \gamma$, also

$$\nu' > \gamma',$$

die beiden Nenner von x^2 und y^2 in der Gleichung (7) positiv, das Paraboloid ein elliptisches.

Aus den Gleichungen der beiden Hyperboloide leitet man in derselben Weise ab

$$(8) \qquad 2(z' + \lambda') = \frac{x^2}{2\lambda'} + \frac{y^2}{2(\lambda' - \gamma')}$$

$$(9) \qquad 2(z' + \mu') = \frac{x^2}{2\mu'} + \frac{y^2}{2(\mu' - \gamma')}.$$

Wegen

$$\beta > \lambda, \quad \text{d. h.} \quad \beta > \lambda' + \beta$$

und

$$\gamma > \mu > \beta, \quad \text{d. h.} \quad \gamma' + \beta > \mu' + \beta > \beta$$

ist dabei

$$\lambda' < 0, \qquad \gamma' > \mu' > 0.$$

Die Nenner in (8) sind also beide negativ, das Paraboloid ein elliptisches, dessen konkave Seite nach der entgegengesetzten Richtung gekehrt ist wie die des ersten. In der Gleichung (9) ist der erste Nenner positiv, der zweite negativ, die dargestellte Fläche ein hyperbolisches Paraboloid.

Der Übergang von den drei Gleichungen der Mittelpunktsflächen zu (7), (8) und (9) hat einen rein formalen Charakter; es läßt sich also keineswegs ohne nähere Untersuchung behaupten, das erste Paraboloid werde von den Scharen der beiden anderen (mit den Parametern λ' und μ') in seinen Krümmungslinien geschnitten. Nun gilt z. B. für die Schnittkurve von (7) und (8) die Gleichung

$$2(\nu' - \lambda') = \frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{\nu'} - \frac{1}{\lambda'}\right) + \frac{y^2}{2}\left(\frac{1}{\nu' - \gamma'} - \frac{1}{\lambda' - \gamma'}\right)$$

oder

$$(10) \qquad y^2 + \frac{(\nu' - \gamma')(\lambda' - \gamma')}{\nu'\lambda'}\, x^2 = -4(\nu' - \gamma')(\lambda' - \gamma').$$

Um zu prüfen, ob sie mit (4) in Übereinstimmung gebracht werden kann, hat man vor allem dort

$$a = 2\nu', \qquad b = 2(\nu' - \gamma')$$

zu setzen. Denn daß in der Darstellung (7) des elliptischen Paraboloids, verglichen mit (1), die z-Koordinate noch um eine additive Konstante geändert ist, hat auf die Werte der partiellen Ableitungen und demnach auch auf die Gleichung (4) keinen Einfluß. Nimmt man nun noch

$$C = -\frac{(\nu' - \gamma')(\lambda' - \gamma')}{\nu'\lambda'}$$

an, so werden (10) und (4) in der Tat identisch.

Wird schließlich für

$$z' \quad \lambda' \quad \mu' \quad \nu' \quad \gamma'$$

wieder

$$z \quad \lambda \quad \mu \quad \nu \quad \gamma$$

geschrieben und auch ν als Parameter betrachtet, so ergibt sich das Resultat:

Die Flächen der drei Scharen

$$(11) \qquad \begin{aligned} 2(z+\lambda) &= -\frac{x^2}{-2\lambda} - \frac{y^2}{-2(\lambda-\gamma)} && (\lambda < 0) \\ 2(z+\mu) &= \frac{x^2}{2\mu} - \frac{y^2}{2(\gamma-\mu)} && (0 < \mu < \gamma) \\ 2(z+\nu) &= \frac{x^2}{2\nu} + \frac{y^2}{2(\nu-\gamma)} && (\gamma < \nu) \end{aligned}$$

schneiden einander in ihren Krümmungslinien. Die erste und dritte Schar besteht aus elliptischen, die zweite aus hyperbolischen Paraboloiden.

Auf die gegenseitigen Beziehungen dieser Flächen kann hier nicht näher eingegangen werden. Bemerkt sei nur noch, daß man durch dieselben Schlüsse wie im vorigen Paragraphen folgende explizite Darstellung der kartesischen Koordinaten durch die Größen λ, μ, ν erhält:

$$(12) \qquad \begin{aligned} x^2 &= -\frac{4\lambda\mu\nu}{\gamma} \\ y^2 &= \frac{4(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\nu-\gamma)}{\gamma} \\ z &= \gamma - (\lambda+\mu+\nu). \end{aligned}$$

Bei konstantem ν z. B. enthalten diese Gleichungen die Ausdrücke der Koordinaten eines bestimmten elliptischen Paraboloids durch die Parameter seiner Krümmungslinien. Für das Quadrat des Linienelements ergibt sich ohne weiteres:

$$(13) \qquad ds^2 = (\mu-\lambda)\left(\frac{\nu-\mu}{\mu(\gamma-\mu)}\,d\mu^2 + \frac{\nu-\lambda}{-\lambda(\gamma-\lambda)}\,d\nu^2\right)$$

oder, wenn

$$(14) \qquad \sqrt{\frac{\nu-\mu}{\mu(\gamma-\mu)}}\,d\mu = du', \qquad \sqrt{\frac{\nu-\lambda}{-\lambda(\gamma-\lambda)}}\,d\nu = dv'$$

gesetzt wird,

$$(15) \qquad ds^2 = (U'-V')(du'^2 + dv'^2).$$

Die Krümmungslinien bilden also auch auf den Paraboloiden ein isometrisches Kurvennetz.

§ 67.

Orthogonale Koordinatenlinien.

Die Bedingungen dafür, daß auf irgend einer Fläche die Krümmungskurven die Koordinatenlinien sind, bestehen in dem gleichzeitigen Verschwinden der beiden mittleren Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung. Denn die Gleichungen

$$(1) \qquad F = 0, \qquad M = 0$$

besagten, daß die Tangenten der Koordinatenlinien sowohl aufeinander senkrecht wie zueinander konjugiert sind. Von der Differentialgleichung

$$(2) \quad (EM - FL)du^2 + (EN - GL)du\,dv + (FN - GM)dv^2 = 0$$

ausgehend, also ohne die Beziehungen zum Dupinschen Kegelschnitt zu beachten, kann man sie dadurch ableiten, daß man fordert, diese Gleichung solle die Integrale $v = C$, $u = C'$ haben, d. h. durch $dv = 0$, $du = 0$ erfüllt werden. Man erhält dann zunächst

$$EM - FL = 0$$
$$GM - FN = 0.$$

Diese Relationen erfordern aber, als homogen und linear in M und F, das gleichzeitige Verschwinden dieser Größen. Denn die Determinante $EN - GL$, die in (2) als Koeffizient von $du\,dv$ erscheint, kann nicht zugleich mit den Koeffizienten von du^2 und dv^2 gleich Null sein, wenn die Differentialgleichung nicht überhaupt zu bestehen aufhören soll.

Prüfen wir nun die Vereinfachungen, die unter den Annahmen (1) mit den flächentheoretischen Grundformeln vorgenommen werden können, und zwar zunächst für jede der beiden Bedingungen einzeln. Es sei

$$F = 0,$$

also die Koordinatenlinien aufeinander senkrecht. Die Christoffelschen Verbindungen aus den Fundamentalgrößen werden sämtlich eingliedrige Ausdrücke, nämlich

$$(3) \quad \begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}, & J_1' &= \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}, & J_1'' &= \frac{-1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u} \\ J_2 &= \frac{-1}{2G}\frac{\partial E}{\partial v}, & J_2' &= \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}, & J_2'' &= \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v}. \end{aligned}$$

Ebenso reduzieren sich die Größen $\eta_{11}, \dots \eta_{22}$ auf je ein Glied:

$$(4) \quad \begin{aligned} \eta_{11} &= -\frac{L}{E}, & \eta_{12} &= -\frac{M}{G} \\ \eta_{21} &= -\frac{M}{E}, & \eta_{22} &= -\frac{N}{G}. \end{aligned}$$

Die Werte (3) wären in die Gaußschen, (4) in die Weingartenschen Gleichungen einzuführen.

Die elementaren symmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen sind

$$H = \frac{L}{E} + \frac{N}{G} \tag{5}$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG}, \tag{6}$$

und die quadratische Gleichung selbst, der die Hauptkrümmungsradien genügen, hat die Form

$$\left(\frac{E}{\varrho} - L\right)\left(\frac{G}{\varrho} - N\right) - M^2 = 0 \tag{7}$$

oder

$$(LN - M^2)\varrho^2 - (GL + EN)\varrho + EG = 0. \tag{8}$$

Endlich wird die Bestimmungsgleichung der Haupttangenten oder die Differentialgleichung der Krümmungslinien:

$$EMdu^2 + (EN - GL)du\,dv - GMdv^2 = 0. \tag{9}$$

Soll eine Fläche, deren kartesische Koordinaten ursprünglich durch beliebige Variable u, v dargestellt sind, auf orthogonale Parameter u', v' bezogen werden, so darf man die eine Schar der neuen Koordinatenlinien,

$$u' \equiv \varphi(u, v) = \text{const.} \tag{10}$$

willkürlich annehmen. Die orthogonalen Trajektorien, mit denen in der Theorie der geometrischen Differentiationen beständig operiert worden ist, deren Darstellung in der Form (10) aber dort nicht bekannt zu sein brauchte, werden durch

$$F' = 0,$$

d. h.

$$\Delta(u', v') = 0$$

bestimmt. Nach der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen hängt nun die Lösung dieser linearen homogenen Gleichung erster Ordnung, nämlich

$$\left(G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial v'}{\partial u} + \left(E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial v'}{\partial v} = 0, \tag{11}$$

von der der gewöhnlichen Differentialgleichung zwischen u und v ab:

$$\left(E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)du - \left(G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)dv = 0. \tag{12}$$

Bedeutet

$$\psi(u, v) = \text{const.}$$

das Integral von (12), so hat man v' gleich $\psi(u, v)$ oder einer willkürlichen Funktion von ψ zu setzen.

Ist die gegebene Kurvenschar nicht in der Form (10), sondern durch eine Differentialgleichung

$$\mathfrak{P}_0 \equiv p_1 du + p_2 dv = 0 \tag{13}$$

definiert, so tritt die Gleichung

$$(Ep_2 - Fp_1)du + (Fp_2 - Gp_1)dv = 0 \tag{14}$$

an die Stelle von (12). Sie entsteht durch Nullsetzung der Funktionaldeterminante der quadratischen Differentialform A und der linearen Differentialform $\mathfrak{P}_0$ (vgl. S. 173).

§ 68.

Konjugierte Koordinatenlinien.

Es sei zweitens

$$M = 0,$$

also die Koordinatenlinien einander konjugiert. Von einer Vereinfachung der Koeffizienten von $\frac{\partial x}{\partial u}$ und $\frac{\partial x}{\partial v}$ in den Gaußschen Gleichungen kann hier zwar nicht die Rede sein, aber wegen des Wegfallens des Gliedes mit X nimmt die zweite dieser Gleichungen eine bemerkenswerte Form an:

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial u \partial v} - J_1' \frac{\partial \chi}{\partial u} - J_2' \frac{\partial \chi}{\partial v} = 0. \tag{1}$$

Betrachtet man E, F, G und damit J_1' und J_2' als gegeben, so genügen also die kartesischen Koordinaten einer und derselben linearen partiellen Differentialgleichung des Laplaceschen Typus. Umgekehrt folgt aus dem Bestehen der Gleichung (1) für $\chi = x, y, z$ die Bedingung

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

d. h. $M = 0$, wieder.

Die Koeffizienten in den Weingartenschen Gleichungen werden auch hier eingliedrige Ausdrücke:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\eta_{11} &= -\frac{GL}{T^2}, & \eta_{12} &= \frac{FL}{T^2}\\
\eta_{21} &= \frac{FN}{T^2}, & \eta_{22} &= -\frac{EN}{T^2}.
\end{aligned}
$$

Die quadratischen Gleichungen für die Hauptkrümmungsradien und die Haupttangenten lauten:

$$
(3)\qquad LN\varrho^2 - (GL + EN)\varrho + EG - F^2 = 0
$$

$$
(4)\qquad -FL du^2 + (EN - GL) du dv + FN dv^2 = 0.
$$

Eine besonders einfache Gestalt nehmen die zweite und dritte Fundamentalgleichung an:

$$
(5)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial v} - J_1' L + J_2 N = 0\\
&\frac{\partial N}{\partial u} - J_2' N + J_1'' L = 0.
\end{aligned}
$$

Die Bestimmung der Kurvenschar, die zu einer gegebenen konjugiert ist, erfordert die Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$
(6)\qquad \left(N\frac{\partial\varphi}{\partial u} - M\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial v'}{\partial u} + \left(L\frac{\partial\varphi}{\partial v} - M\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial v'}{\partial v} = 0,
$$

d. h.

$$
\Delta_b(u', v') = 0,
$$

die auf

$$
(7)\qquad \left(L\frac{\partial\varphi}{\partial v} - M\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) du - \left(N\frac{\partial\varphi}{\partial u} - M\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) dv = 0
$$

führt. Der Gleichung (14) des vorigen Paragraphen entspricht hier

$$
(8)\qquad (Lp_2 - Mp_1) du + (Mp_2 - Np_1) dv = 0.
$$

Die linke Seite ist, von einem Zahlenfaktor abgesehen, die Funktionaldeterminante von B und $\mathfrak{P}_0$.

§ 69.

Die Krümmungskurven als Koordinatenlinien. Formeln von Rodrigues. Formel von Bertrand.

Um die Krümmungskurven als Koordinatenlinien zu kennzeichnen, hat man die Annahmen in den beiden letzten Paragraphen mit einander zu verbinden. Wegen des unmittelbaren Zusammenhanges der Krümmungslinien mit den Haupttangenten und Hauptkrümmungen können die Parameter dieser Kurven als Hauptparameter der Fläche bezeichnet werden. Die Gaußsche Gleichung § 68 (1) geht, wenn für die Koeffizienten J_1' und J_2' ihre Werte aus § 67 (3) eingesetzt werden, in

(1) $$\frac{\partial^2 \chi}{\partial u \partial v} - \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial \chi}{\partial u} - \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial \chi}{\partial v} = 0$$

über. Besonders einfach aber werden jetzt die Weingartenschen Gleichungen, denn nach § 67 (4) für $M = 0$ oder § 68 (2) für $F = 0$ ist

(2) $$\eta_{11} = -\frac{L}{E}, \quad \eta_{12} = 0, \quad \eta_{21} = 0, \quad \eta_{22} = -\frac{N}{G},$$

also

(3) $$\frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{L}{E}\frac{\partial x}{\partial u}, \quad \frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{N}{G}\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Die Hauptkrümmungen lassen sich rational durch die Fundamentalgrößen ausdrücken:

(4) $$n_1 = \frac{L}{E}, \quad n_2 = \frac{N}{G}.$$

Bei dieser Schreibweise wird vorausgesetzt, daß unter den Krümmungslinien, etwa durch die Ungleichung $n_1 > n_2$, eine bestimmte Folge festgesetzt sei, und daß dann die erste Krümmungskurve als Koordinatenlinie $v = C$ angenommen werde.

Für einen beliebigen Normalschnitt bestimmt die Formel

(5) $$n = \frac{L du^2 + N dv^2}{E du^2 + G dv^2}$$

den Wert der Krümmung.

Die Beziehung zwischen zwei beliebigen, auf einander senkrechten Tangenten wird durch

(6) $$E du \delta u + G dv \delta v = 0$$

gegeben, und die zwischen zwei konjugierten Tangenten durch

(7) $$L du \delta u + N dv \delta v = 0,$$

woraus für die asymptotischen Richtungen die Gleichung folgt:

(8) $$L du^2 + N dv^2 = 0.$$

Führt man auch in die zweite und dritte Fundamentalgleichung § 68 (5) die Werte der Größen J aus § 67 (3) ein, so erhält man

(9) $$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial v} - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right)\frac{\partial E}{\partial v} = 0 \\ &\frac{\partial N}{\partial u} - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right)\frac{\partial G}{\partial u} = 0. \end{aligned}$$

Unter Benutzung von (4) lassen sich diese Gleichungen schreiben:

(10) $$\begin{aligned} &\frac{\partial n_1}{\partial v} + \frac{1}{2}(n_1 - n_2)\frac{\partial \log E}{\partial v} = 0 \\ &\frac{\partial n_2}{\partial u} + \frac{1}{2}(n_2 - n_1)\frac{\partial \log G}{\partial u} = 0, \end{aligned}$$

oder auch:

$$(11)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} - \frac{\varrho_1}{2E}\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial E}{\partial v} = 0 \\ &\frac{\partial \varrho_2}{\partial u} - \frac{\varrho_2}{2G}\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)\frac{\partial G}{\partial u} = 0. \end{aligned}$$

Aus (10) folgt in Verbindung mit § 67 (3) umgekehrt:

$$(12)\quad \begin{aligned} &J_1' = \frac{1}{n_2 - n_1}\frac{\partial n_1}{\partial v}, \qquad J_2' = \frac{1}{n_1 - n_2}\frac{\partial n_2}{\partial u} \\ &J_2 = \frac{E}{G(n_1 - n_2)}\frac{\partial n_1}{\partial v}, \quad J_1'' = \frac{G}{E(n_2 - n_1)}\frac{\partial n_2}{\partial u}. \end{aligned}$$

Eliminiert man die Fundamentalgrößen aus (3) und (4), so ergibt sich

$$(13)\quad \frac{\partial X}{\partial u} = -n_1\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = -n_2\frac{\partial x}{\partial v}$$

oder

$$(14)\quad \frac{\partial x}{\partial u} = -\varrho_1\frac{\partial X}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\varrho_2\frac{\partial X}{\partial v}.$$

Es seien dx und dX die Differentiale von x und X beim Fortgange längs einer Krümmungslinie, also für die erste $dx = \frac{\partial x}{\partial v}du$, für die zweite $dx = \frac{\partial x}{\partial v}dv$, usw. Dann folgt aus (14)

$$(15)\quad dx = -\varrho_i dX, \quad dy = -\varrho_i dY, \quad dz = -\varrho_i dZ \qquad (i = 1, 2).$$

Dies sind die Formeln von Rodrigues. Ihre linken Seiten sind den Richtungskosinus einer Krümmungslinie proportional, die rechten Seiten den Richtungskosinus derjenigen Kurve auf der Einheitskugel, die der Krümmungslinie bei der Abbildung durch parallele Normalen entspricht. Die Tangenten der Krümmungslinie und ihres sphärischen Bildes sind demnach in entsprechenden Punkten einander parallel.

Ohne jede Spezialisierung der Koordinatenlinien muß sich diese charakteristische Eigenschaft auch aus den allgemeinen Frenetschen Formeln ablesen lassen. Alle Größen, die sich auf die erste Krümmungslinie beziehen, mögen durch den Index 1 gekennzeichnet, also namentlich auch Θ_1 statt Θ geschrieben werden. Da die orthogonalen Trajektorien einer Schar von Krümmungskurven mit der anderen Schar dieser Kurven identisch sind, so bedeutet Θ' die geometrische Differentiation längs der zweiten Krümmungslinie; für diese soll der Index 2 gelten. In den allgemeinen Frenetschen Formeln ist $t = 0$ zu setzen. Dann wird (S. 55 und 200—201)

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \qquad & \Theta_1 A_1 &= g_1 A_2 + n_1 X \\
&\text{(b)} \qquad & \Theta_1 A_2 &= -g_1 A_1 \\
&\text{(c)} \qquad & \Theta_1 X &= -n_1 A_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\text{(a')} \qquad & \Theta_2 A_1 &= -g_2 A_2 \\
&\text{(b')} \qquad & \Theta_2 A_2 &= g_2 A_1 + n_2 X \\
&\text{(c')} \qquad & \Theta_2 X &= -n_2 A_2 .
\end{aligned}
$$

Um auch die irrationale Form der Fundamentalgleichungen für die Krümmungslinien als Grundkurven anzugeben, so lautet die Bonnetsche Formel

$$\text{(A)} \qquad \Theta_2 g_1 + \Theta_1 g_2 - g_1^2 - g_2^2 - n_1 n_2 = 0,$$

und die beiden anderen Gleichungen

$$
\text{(B)} \qquad
\begin{aligned}
\Theta_2 n_1 - (n_1 - n_2) g_1 &= 0 \\
\Theta_1 n_2 - (n_2 - n_1) g_2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Sie folgen, wie sich von selbst versteht, aus (9) wieder, wenn man die Transformation dieser Gleichungen in solche zwischen rein geometrischen Größen zu Ende bringt, also nicht nur, wie beim Übergang zu (10) geschehen, die Normalkrümmungen, sondern auch die Tangentialkrümmungen der Krümmungslinien einführt.

Für eine Umdrehungsfläche erscheinen die Bedingungen $F = 0$, $M = 0$ als Folge der Darstellung S. 101 (10). Die Krümmungslinien dieser Flächen bestehen also aus den Meridianen und den Parallelkreisen.

Die in diesem Paragraphen behandelte Spezialisierung der Koordinatenlinien möge endlich beispielsweise zur Bestimmung eines Vorzeichens benutzt werden. Stellt man die Formel S. 197 (24) mit der des Eulerschen Satzes (S. 84 (8)) zusammen, so erhält man für die geodätische Windung die Gleichung

$$t^2 = (n_1 - n_2)^2 \sin^2 w \cos^2 w .$$

Hierin kann unter w der Winkel verstanden werden, der durch positive Drehung der ersten Haupttangente bis zum Zusammenfallen mit der Tangente der betrachteten Kurve entsteht. Nun wird, wenn $\varphi(u, v) = C$ die Darstellung dieser Kurve ist, für t also der Ausdruck S. 194 (11) gilt, unter der Annahme $F = 0$, $M = 0$:

$$t = -\frac{(GL - EN)\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG}\left(E\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + G\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2\right)}$$

oder, wegen

$$L = E n_1, \qquad N = G n_2,$$

$$t = \frac{\sqrt{EG}(n_1 - n_2)\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2}.$$

Die trigonometrischen Funktionen von w folgen aus S. 37 (18, 19) für $\psi = v$:

$$\cos w = \frac{-\sqrt{E}\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\sqrt{G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}}$$

$$\sin w = \frac{\sqrt{G}\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}}.$$

Demnach wird

(16) $$t = (n_2 - n_1)\cos w \sin w$$

oder

(17) $$t = \frac{1}{2}(n_2 - n_1)\sin 2w.$$

Diese Formel rührt von Bertrand her.

Da nur $2w$ vorkommt, so kann w, wie auch sonst das Fortgangsprinzip längs der Kurve angenommen sein möge, $< \pi$ vorausgesetzt werden.

§ 70.

Asymptotenkurven. Ihre Bestimmung für die geradlinigen Flächen.

Im § 64 (S. 233) ist ein zweites Netz von Flächenkurven erwähnt worden, die ebenso wie die Krümmungslinien durch das Verschwinden einer speziellen geometrischen Größe, und zwar der Normalkrümmung n, gekennzeichnet werden, aber im Gegensatz zu den Krümmungslinien nur auf negativ gekrümmten Flächen existieren. Sie werden durch die Differentialgleichung erster Ordnung zweiten Grades

(1) $$L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0$$

bestimmt. Auch im Hinblick auf die Theorie des Dupinschen Kegelschnitts sind sie den Krümmungskurven an die Seite zu stellen. Während nämlich die Tangenten dieser Linien überall mit den Hauptachsen des (in die Tangentialebene verlegten) Dupinschen Kegelschnitts zusammenfallen, entsprechen die Tangenten der Kurven (1) den Asymptoten des Kegelschnittes. Die Linien selbst heißen deshalb Asymptotenkurven der Fläche.

Eine ihrer Scharen läßt sich für eine ausgedehnte Klasse von Flächen sofort angeben. Es seien

(2) $$x = x_0 + au, \qquad y = y_0 + bu, \qquad z = z_0 + cu$$

die Gleichungen einer geraden Linie, wo die verschiedenen Werte von u den verschiedenen Punkten der Geraden entsprechen. Denkt man sich x_0, y_0, z_0, a, b, c als Funktionen eines Parameters v, so hat man es mit einer Schar von Geraden zu tun, deren geometrischer Ort eine geradlinige Fläche genannt wird.

Da die drei kartesischen Koordinaten der Fläche den Parameter u nur im ersten Grade enthalten, so genügen sie der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} = 0,$$

was nach der Definition der ersten Fundamentalgröße zweiter Ordnung,

$$L = X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + Y \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + Z \frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

das Verschwinden dieser Größe nach sich zieht. Infolgedessen hat die Differentialgleichung (1) das partikuläre Integral $v =$ const., d. h. die u-Linien sind Asymptotenlinien. Die zweite Schar würde durch Integration der Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades

$$M du + N dv = 0$$

bestimmt werden.

Der hiernach für die geradlinigen Flächen geltende Satz, daß die eine Schar ihrer Asymptotenlinien mit den Erzeugenden zusammenfällt, kann auf bestimmte Flächen zweiten Grades angewendet werden. Auf die Kegel- und Zylinderflächen allerdings nicht in dieser Form; denn für sie ist $LN - M^2 = 0$, und beide Scharen von Asymptotenlinien fallen mit den erzeugenden Geraden zusammen. Dagegen kann von einem Netz von Asymptotenlinien auf den beiden einzigen konvex-konkaven Flächen zweiten Grades (S. 82), dem einschaligen Hyperboloid und dem hyperbolischen Paraboloid, die Rede sein. Und da jede der beiden Flächen auf zwei verschiedene Arten durch Bewegung einer geraden Linie entstehen kann, so müssen die Asymptotenlinien in ihrer Gesamtheit mit den Erzeugenden übereinstimmen. Sie können mithin ohne Integration vollständig angegeben werden, wenn die Flächen in der Form (II), z. B. durch die einfachsten Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$2z - \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} = 0$$

definiert sind. Wollte man dagegen z. B. für das Hyperboloid von der Darstellung der kartesischen Koordinaten durch die Parameter der Krümmungskurven ausgehen (vgl. § 65), so würde man bei der Bestimmung der Asymptotenlinien auf das Eulersche Integral der nach ihm benannten Differentialgleichung geführt werden.

Zu den geradlinigen Flächen gehört ferner beispielsweise die Schraubenfläche. Sie wurde durch eine Gerade erzeugt, die eine feste Achse stets senkrecht schneidet und sich dabei so bewegt, daß die Strecken, um welche der Schnittpunkt auf der Achse fortrückt, den Winkeln proportional sind, um welche die Gerade sich dreht (S. 23). Die Fläche war durch die drei Gleichungen

$$(3) \qquad x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = bv$$

dargestellt; auch konnte man sich mit

$$(4) \qquad z = b \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

begnügen (S. 122).

Wird davon abgesehen, daß auf der Schraubenfläche die eine Schar von Asymptotenlinien von vornherein bekannt ist, so kann die Fläche als einfaches Beispiel für die Bestimmung dieser Linien unter der Annahme

$$(\mathrm{III}) \qquad z = z(x, y)$$

dienen. Als Differentialgleichung (1) ergibt sich

$$(5) \qquad r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2 = 0$$

und im besonderen folgt aus (4)

$$(6) \qquad p = \frac{-by}{x^2 + y^2}, \qquad q = \frac{bx}{x^2 + y^2}$$
$$r = \frac{2bxy}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad s = \frac{b(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \qquad t = \frac{-2bxy}{(x^2 + y^2)^2},$$

also

$$(7) \qquad xy dx^2 + (y^2 - x^2) dx dy - xy dy^2 = 0$$

oder

$$(8) \qquad (y dx - x dy)(x dx + y dy) = 0.$$

Von den beiden Integralen dieser Differentialgleichung,

(9) $$y = Cx, \qquad x^2 + y^2 = C',$$

liefert das erste eine Ebene durch die Achse der Schraubenfläche, das zweite einen Kreiszylinder mit derselben Achse. Die Asymptotenlinien bestehen also, außer aus den erzeugenden Geraden, aus einer Schar von Schraubenlinien. Denn solche Kurven werden nach S. 18—19 für konstantes u durch die Gleichungen (3) dargestellt.

§ 71.

Eigenschaften der Asymptotenlinien. Bestimmung dieser Kurven auf den Umdrehungsflächen.

Ist eine Asymptotenlinie nicht gerade, so hat sie eine Schmiegungsebene, und diese muß, wie aus $n = k \cos(n, h)$ (S. 59) hervorgeht, die Fläche berühren. Direkt nach § 2 und 15 aufgestellt, würden die Bedingungen dafür

$$P : Q : R = X : Y : Z$$

sein. Infolge der Relationen

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

sind sie aber einer einzigen äquivalent, die man dahin aussprechen kann, daß die rektifizierende Ebene die Flächennormale enthält,

$$\begin{vmatrix} P & Q & R \\ dx & dy & dz \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = 0.$$

Wegen

$$Qdz - Rdy = ds^2 d^2x - dx\, ds\, d^2s, \ldots$$

(S. 9 (12)) läßt sich

$$\sum X d^2x = 0$$

schreiben. Man wird also auf

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$$

zurückgeführt.

In der Gestalt

(1) $$\sum dx\, dX = 0$$

(S. 74 (3)) besagt die Bedingung, daß die Tangente einer Asymptotenlinie und die Tangente ihres sphärischen Bildes in entsprechenden Punkten aufeinander senkrecht stehen.

Nach der Theorie des Dupinschen Kegelschnitts sind die Krümmungskurven die Winkelhalbierungslinien der Asymptotenkurven. Sollen die letzteren allenthalben aufeinander senkrecht stehen, ebenso wie die Krümmungslinien es tun, so muß die Bedingung

$$GL - 2FM + EN = 0 \tag{2}$$

gelten; sie ist notwendig und hinreichend. Nach S. 77 (19) besagt sie, daß für alle Flächenpunkte

$$n_1 + n_2 = 0$$

ist. Man kommt auf diese Bedingung bei der Frage nach den Flächen, die bei gegebener Begrenzung den kleinsten Flächeninhalt einschließen, und bezeichnet infolgedessen die durch das Verschwinden der mittleren Krümmung $\frac{1}{2}(n_1 + n_2)$ gekennzeichneten Gebilde als Minimalflächen. Außer dem schon im § 31 betrachteten Katenoid gehört z. B. die Schraubenfläche zu den Minimalflächen. Denn aus den Werten (6) des vorigen Paragraphen folgt unmittelbar

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0, \tag{3}$$

und diese Gleichung ist nach S. 80 (12) mit $H = 0$ gleichbedeutend. Nach § 37 sind diese beiden speziellen Minimalflächen aufeinander abwickelbar.

Die Differentialgleichung der Asymptotenkurven möge für eine beliebige Umdrehungsfläche aufgestellt werden. Aus S. 101 (10) folgt

$$\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} = -uf'(u)\cos v$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = -uf'(u)\sin v$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = u,$$

und hieraus, da der Größe u als Radiusvektor das positive Zeichen beigelegt werden kann,

$$\begin{aligned} X &= -\frac{f'(u)}{\sqrt{1 + f'(u)^2}}\cos v \\ Y &= -\frac{f'(u)}{\sqrt{1 + f'(u)^2}}\sin v \\ Z &= \frac{1}{\sqrt{1 + f'(u)^2}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Die Fundamentalgrößen erster Ordnung waren (S. 102 (12))

$$E = 1 + f'(u)^2, \qquad F = 0, \qquad G = u^2, \tag{5}$$

und die der zweiten Ordnung werden

$$(6)\qquad L = \frac{f''(u)}{\sqrt{1+f'(u)^2}}, \qquad M = 0, \qquad N = \frac{uf'(u)}{\sqrt{1+f'(u)^2}}.$$

Die Gleichungen $F = 0$, $M = 0$ kennzeichneten die Koordinatenlinien als Krümmungskurven (S. 255). Das Problem der Asymptotenlinien führt auf die Differentialgleichung

$$f''(u)du^2 + uf'(u)dv^2 = 0,$$

die durch

$$(7)\qquad v = \pm\int\sqrt{\frac{-f''(u)}{uf'(u)}}\,du$$

gelöst wird. Die Asymptotenkurven auf den Umdrehungsflächen lassen sich also durch Quadraturen bestimmen. Man sieht (vgl. S. 99—100), daß die Kurven nur dann existieren, wenn die Meridiankurve gegen die Achse der Fläche konvex ist.

§ 72.

Die Asymptotenkurven als Koordinatenlinien.

Für die Annahme, daß das Netz der Koordinatenlinien mit dem der Asymptotenkurven zusammenfällt, gelten die Gleichungen

$$(1)\qquad L = 0, \qquad N = 0.$$

Dann wird

$$(2)\qquad \begin{aligned} \eta_{11} &= \frac{FM}{T^2}, & \eta_{12} &= -\frac{EM}{T^2} \\ \eta_{21} &= -\frac{GM}{T^2}, & \eta_{22} &= \frac{FM}{T^2}, \end{aligned}$$

also

$$(3)\qquad \eta_{11} - \eta_{22} = 0,$$

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= \frac{M}{T^2}\left(\quad F\frac{\partial x}{\partial u} - E\frac{\partial x}{\partial v}\right) \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= \frac{M}{T^2}\left(-G\frac{\partial x}{\partial u} + F\frac{\partial x}{\partial v}\right), \end{aligned}$$

$$(5)\qquad H = \frac{-2FM}{T^2}, \qquad K = \frac{-M^2}{T^2},$$

$$(6)\qquad \left.\begin{matrix} n_1 \\ n_2 \end{matrix}\right\} = \frac{M}{T^2}\left(-F \pm \sqrt{EG}\right).$$

Die Beziehung zwischen zwei konjugierten Tangenten ist

$$(7)\qquad \frac{dv}{du} + \frac{\delta v}{\delta u} = 0,$$

und die Differentialgleichung der Krümmungslinien

$$(8)\qquad Edu^2 - Gdv^2 = 0$$

zerfällt in

$$\sqrt{E}\,du + \sqrt{G}\,dv = 0, \qquad \sqrt{E}\,du - \sqrt{G}\,dv = 0.$$

Die zweite und dritte Fundamentalgleichung nehmen die Form an

$$(9)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \log M}{\partial u} - (J_1 - J_2') = 0 \\ &\frac{\partial \log M}{\partial v} - (J_2'' - J_1') = 0. \end{aligned}$$

Auf die Relationen zwischen den Fundamentalgrößen erster Ordnung und ihren Ableitungen, die man aus den drei Fundamentalgleichungen durch Elimination von M herleiten kann, soll hier nicht eingegangen werden.

Die kartesischen Koordinaten genügen den linearen partiellen Differentialgleichungen

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} = J_1 \frac{\partial \chi}{\partial u} + J_2 \frac{\partial \chi}{\partial v} \\ &\frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} = J_1'' \frac{\partial \chi}{\partial u} + J_2'' \frac{\partial \chi}{\partial v}. \end{aligned}$$

Ein Spezialfall der ersten ist oben bei den geradlinigen Flächen benutzt worden.

Das Linienelement der Einheitskugel wird durch die Größen

$$(11)\qquad \mathfrak{E} = \frac{E M^2}{T^2}, \qquad \mathfrak{F} = -\frac{F M^2}{T^2}, \qquad \mathfrak{G} = \frac{G M^2}{T^2}$$

bestimmt, die

$$(12)\qquad d\sigma^2 = \frac{M^2}{T^2}(E du^2 - 2F du\,dv + G dv^2)$$

liefern.

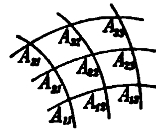
§ 73.

Bedingungen für die Isometrie eines Kurvennetzes.

In den Paragraphen 65 und 66 ist gezeigt worden, daß die Mittelpunktsflächen zweiten Grades (vom Kegel abgesehen) und die Paraboloide durch ihre Krümmungslinien in unendlichkleine Quadrate geteilt werden. Dasselbe gilt für die Umdrehungsflächen (vgl. S. 103(16)). Man überzeugt sich leicht, daß diese Eigenschaft nicht allen Flächen zukommt; doch gibt es, wie Gauß bewiesen hat, auf jeder gegebenen Fläche unendlich viele Netze isometrischer Kurven.

Unter den Bedingungen für ein solches Netz ist die der Orthogonalität enthalten, die man in ihren verschiedenen Formen, je nach der Darstellung des Kurvennetzes, aus § 13 entnehmen kann. Eine zweite Bedingung ergibt sich durch folgende Überlegung.

Es sei (Fig. 14) A_{11} ein beliebiger Flächenpunkt, betrachtet als Schnitt zweier Kurven des Netzes. Der Fortgang zu einem benachbarten Punkte auf einer dieser Linien werde, je nachdem er längs der ersten oder zweiten vollzogen wird, durch das Zeichen d_1 oder d_2 gekennzeichnet. Es sei also


Fig. 14.

$$A_{11}A_{12} = d_1 s, \qquad A_{11}A_{21} = d_2 s.$$

Nach willkürlicher Annahme eines der beiden Punkte A_{12} und A_{21} kann der andere durch die Bedingung

$$d_1 s = d_2 s \tag{1}$$

bestimmt werden. Das unendlichkleine Viereck $A_{11}A_{12}A_{22}A_{21}$, das von zwei Kurvenpaaren des Netzes begrenzt wird, ist dann mit beliebiger Genauigkeit als Quadrat zu betrachten. Denn man hat

$$A_{12}A_{22} = d_2 s + d_1 d_2 s$$
$$A_{21}A_{22} = d_1 s + d_2 d_1 s.$$

Nun mögen ferner die Punkte A_{13} und A_{31} durch die Festsetzungen

$$A_{12}A_{13} = A_{12}A_{22}, \qquad A_{21}A_{31} = A_{21}A_{22}$$

bestimmt sein. Da

$$A_{12}A_{13} = d_1 s + d_1 d_1 s$$
$$A_{21}A_{31} = d_2 s + d_2 d_2 s$$

ist, so folgen daraus die Beziehungen

$$d_1 d_1 s = d_1 d_2 s \tag{2}$$

$$d_2 d_2 s = d_2 d_1 s. \tag{3}$$

Wird durch A_{13} die zweite, durch A_{31} die erste Kurve des Netzes gezogen, so erscheinen auch die beiden unendlichkleinen Vierecke $A_{12}A_{13}A_{23}A_{22}$ und $A_{21}A_{22}A_{32}A_{31}$ als Quadrate. Das vierte in der Figur vorhandene Viereck, $A_{22}A_{23}A_{33}A_{32}$, ist jetzt völlig bestimmt. Soll es ein Quadrat sein, so muß die Bedingung

$$A_{22}A_{23} = A_{22}A_{32},$$

d. h.

$$d_1 s + d_2 d_1 s + d_1(d_1 s + d_2 d_1 s) = d_2 s + d_1 d_2 s + d_2(d_2 s + d_1 d_2 s)$$

oder, nach Hinzuziehung von (1, 2, 3),

$$d_1 d_2 d_1 s = d_2 d_1 d_2 s \tag{4}$$

bestehen.

Man kann sie von den Differentialen befreien, indem man die Richtungskosinus der Tangenten der beiden Kurven einführt, für die in den hier benutzten Bezeichnungen die Formeln

$$A = \frac{d_1 x}{d_1 s}, \ldots$$

$$A' = \frac{d_2 x}{d_2 s}, \ldots$$

gelten. Es folgt nämlich aus der Bedeutung von d_1 und d_2 und den Grundeigenschaften, die von den funktionalen Ausdrücken der kartesischen Koordinaten immer vorausgesetzt worden sind,

$$d_2 d_1 x = d_1 d_2 x, \ldots,$$

d. h.

$$d_2(A d_1 s) = d_1(A' d_2 s), \ldots,$$

$$A\, d_2 d_1 s + d_1 s \,.\, d_2 A = A' d_1 d_2 s + d_2 s \,.\, d_1 A', \ldots.$$

Multipliziert man die drei Gleichungen mit A, B, C, dann mit A', B', C' und addiert jedesmal, so findet man unter Benutzung von $\Sigma A A' = 0$

$$d_2 d_1 s = d_2 s \sum A d_1 A'$$

$$d_1 d_2 s = d_1 s \sum A' d_2 A.$$

Nun ist

$$\sum A d_1 A' = d_1 s \sum A \frac{d_1 A'}{d_1 s} \equiv d_1 s \sum A \Theta A'$$

$$= - d_1 s \sum A' \Theta A = - g\, d_1 s$$

nach S. 55 (15), und entsprechend

$$\sum A' d_2 A = - d_2 s \sum A \Theta' A' = - g' d_2 s.$$

Mithin wird

(5) $$\frac{d_2 d_1 s}{d_1 s \,.\, d_2 s} = - g$$

(6) $$\frac{d_1 d_2 s}{d_1 s \,.\, d_2 s} = - g'.$$

Setzt man aus diesen Formeln $d_2 d_1 s$ und $d_1 d_2 s$ in (4) ein, so erhält man mittels (1, 2, 3) und der Formeln (5, 6) selbst:

$$\frac{d_1 g}{d_1 s} = \frac{d_2 g'}{d_2 s},$$

(7) $$\Theta g = \Theta' g'.$$

Um zu prüfen, ob diese notwendige Bedingung, wenn nur von vornherein das Kurvennetz als orthogonal vorausgesetzt wird, für die

Isometrie auch hinreicht, nehme man die beiden Scharen des Netzes als Koordinatenlinien

$$v' = C, \qquad u' = C'$$

an. Nach S. 140 (11) ist für $F' = 0$

$$g \equiv g_{v'} = -\frac{1}{2E'\sqrt{G'}}\frac{\partial E'}{\partial v'}$$

$$g' \equiv g_{u'} = -\frac{1}{2G'\sqrt{E'}}\frac{\partial G'}{\partial u'},$$

und ferner hat man

$$\Theta\chi = \frac{1}{\sqrt{E'}}\frac{\partial \chi}{\partial u'}, \qquad \Theta'\chi = \frac{1}{\sqrt{G'}}\frac{\partial \chi}{\partial v'}.$$

Demnach wird

$$2(\Theta' g' - \Theta g) = \frac{1}{\sqrt{E'}}\frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{1}{E'\sqrt{G'}}\frac{\partial E'}{\partial v'}\right) - \frac{1}{\sqrt{G'}}\frac{\partial}{\partial v'}\left(\frac{1}{G'\sqrt{E'}}\frac{\partial G'}{\partial u'}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E'}}\frac{\partial}{\partial u'}\left(\frac{1}{\sqrt{G'}}\frac{\partial \log E'}{\partial v'}\right) - \frac{1}{\sqrt{G'}}\frac{\partial}{\partial v'}\left(\frac{1}{\sqrt{E'}}\frac{\partial \log G'}{\partial u'}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E'G'}}\frac{\partial^2 \log E'}{\partial v' \partial u'} - \frac{1}{\sqrt{G'E'}}\frac{\partial^2 \log G'}{\partial u' \partial v'}$$

(8) $$\Theta' g' - \Theta g = \frac{1}{2\sqrt{E'G'}}\frac{\partial^2 \log \frac{E'}{G'}}{\partial u' \partial v'}.$$

Aus (7) folgt mithin

$$\frac{\partial^2 \log \frac{E'}{G'}}{\partial u' \partial v'} = 0,$$

$$\frac{E'}{G'} = \frac{\varphi(u')^2}{\psi(v')^2}$$

oder

$$E' = \lambda\varphi(u')^2, \qquad G' = \lambda\psi(v')^2,$$

wo λ eine Funktion von u' und v' bedeutet. Für das Quadrat des Linienelements gilt also die Formel

$$ds^2 = \lambda(\varphi(u')^2 du'^2 + \psi(v')^2 dv'^2).$$

Verändert man die darstellenden Parameter der beiden Kurvenscharen durch die Substitution

$$\varphi(u')du' = du_1, \qquad \psi(v')dv' = dv_1,$$

womit

(9) $$ds^2 = \bar{\lambda}(du_1^2 + dv_1^2)$$

wird, so erhält man für $du_1 = dv_1$

$$d_1 s = d_2 s,$$

sodaß in der Tat ein beliebiges, durch zwei Paare benachbarter Koordinatenlinien begrenztes Viereck als Quadrat betrachtet werden kann. Das heißt:

Die Bedingungen

$$F = 0, \qquad \frac{\partial^2 \log \frac{E}{G}}{\partial u \partial v} = 0 \tag{10}$$

sind für die Isometrie des Koordinatennetzes notwendig und hinreichend. Und da die zweite von ihnen nach (8) auf (7) zurückführt, so erweist sich diese Gleichung mit der Orthogonalität zusammen als für die Isometrie eines beliebigen Kurvennetzes auch hinreichend.

§ 74.

Bestimmung isometrischer Kurvennetze.

Die Aufgabe, eine gegebene Fläche auf ein Netz isometrischer Kurven zu beziehen, läßt sich so aussprechen: Das Quadrat des Linienelements soll auf die Form (9) oder

$$E'(du'^2 + dv'^2)$$

gebracht, also u', v' und E' der Gleichung

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = E'(du'^2 + dv'^2) \tag{1}$$

gemäß bestimmt werden.

Die Klammergröße auf der rechten Seite kann man in die beiden konjugiert-komplexen Faktoren $du' \pm idv'$ zerlegen. Führt man eine solche Zerlegung auch auf der linken Seite aus, so nimmt die Gleichung (1) die Form an

$$\begin{aligned}(\sqrt{E}du + \frac{F+iT}{\sqrt{E}}dv)(\sqrt{E}du + \frac{F-iT}{\sqrt{E}}dv) \\ = E'(du' + idv')(du' - idv').\end{aligned} \tag{2}$$

Es sei λ ein integrierender Faktor des ersten der beiden Differentialausdrücke links, also

$$\lambda(\sqrt{E}du + \frac{F+iT}{\sqrt{E}}dv) = d(P + iQ),$$

wo P und Q Funktionen von u und v bedeuten. Die Bestimmung von λ aus der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial v}(\lambda\sqrt{E}) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda \frac{F+iT}{\sqrt{E}}\right)$$

erfordert die Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

(3) $$\sqrt{E}du + \frac{F+iT}{\sqrt{E}}dv = 0.$$

Hat man deren Integral auf irgend einem Wege gefunden und in die Form

$$P + iQ = C$$

gesetzt, so muß für

$$\lambda = \mu + \nu i$$

bei passender Wahl von μ und ν die Beziehung

$$(\mu + \nu i)\left(\sqrt{E}du + \frac{F+iT}{\sqrt{E}}dv\right) = dP + idQ$$

stattfinden. Mit ihr gleichzeitig gilt

$$(\mu - \nu i)\left(\sqrt{E}du + \frac{F-iT}{\sqrt{E}}dv\right) = dP - idQ.$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen ergibt sich eine Formel, die mit (2) identisch wird, wenn man

$$u' = P, \qquad v' = Q, \qquad E' = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2}$$

setzt. Die Auffindung zweier Scharen von Linien, für die

$$E' = G', \qquad F' = 0$$

wird, hängt also ab von der Integration der Gleichung (3) oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades

(4) $$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = 0.$$

Allerdings sind μ und ν Funktionen von u und v, während E' als Funktion von u' und v' erklärt ist. Wenn aber einmal die Integration von (3) oder (4) geleistet und damit der funktionale Zusammenhang zwischen u, v und u', v' ermittelt ist, so kann $\frac{1}{\mu^2 + \nu^2}$ in eine Funktion von u' und v' umgesetzt werden.

Angenommen nun, es sei, gleichviel auf welche Weise, noch ein zweites isometrisches Kurvennetz gefunden, und es sei für dieses:

$$ds^2 = E_1(du_1^2 + dv_1^2).$$

Dann besteht also die Gleichung

(5) $$E'(du'^2 + dv'^2) = E_1(du_1^2 + dv_1^2).$$

Die Größen u_1, v_1 sind Funktionen der ursprünglichen Koordinaten u und v, also auch Funktionen von u' und v'. Setzt man

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial u'} du' + \frac{\partial u_1}{\partial v'} dv'$$

$$dv_1 = \frac{\partial v_1}{\partial u'} du' + \frac{\partial v_1}{\partial v'} dv',$$

so folgt aus (5):

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial u'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial u'}\right)^2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial v'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial v'}\right)^2 = \frac{E'}{E_1}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial u'}\frac{\partial u_1}{\partial v'} + \frac{\partial v_1}{\partial u'}\frac{\partial v_1}{\partial v'} = 0.$$

Die letzte Gleichung ist das Ergebnis der Elimination von α aus

$$\frac{\partial v_1}{\partial u'} = \alpha \frac{\partial u_1}{\partial u'}, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial v'} = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial u_1}{\partial v'}.$$

Werden diese Werte in die vorhergehende Relation eingesetzt, so ergibt sich für $\varepsilon = \pm 1$

$$\frac{\partial u_1}{\partial v'} = \varepsilon\alpha \frac{\partial u_1}{\partial u'} = \varepsilon \frac{\partial v_1}{\partial u'}, \qquad \frac{\partial v_1}{\partial v'} = -\varepsilon \frac{\partial u_1}{\partial u'}.$$

Hieraus folgt weiter

$$\frac{\partial(u_1 + iv_1)}{\partial v'} = \varepsilon \frac{\partial(v_1 - iu_1)}{\partial u'} = \frac{\varepsilon}{i}\frac{\partial(u_1 + iv_1)}{\partial u'},$$

d. h. die Größe

$$u_1 + iv_1 = \omega$$

genügt als Funktion von u' und v' der linearen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial\omega}{\partial u'} = \varepsilon i \frac{\partial\omega}{\partial v'}.$$

Ihre allgemeine Lösung ist

$$\omega = \varphi(u' - \varepsilon iv')$$

für φ als willkürliche Funktion. Hiernach müssen sich u_1 und v_1 aus

(6) $$u_1 + iv_1 = \varphi(u' \pm iv')$$

durch Trennung des Reellen und Imaginären ergeben. Versteht man unter $\psi(u' \mp iv')$ die zu $\varphi(u' \pm iv')$ konjugierte Funktion, d. h. diejenige, die aus ihr hervorgeht, wenn überall, auch in den etwa vorkommenden komplexen Konstanten, i mit $-i$ vertauscht wird, so kann man auch die Gleichung

(7) $$u_1 - iv_1 = \psi(u' \mp iv')$$

hinzunehmen und u_1, v_1 aus (6) und (7) bestimmen. Daß umgekehrt, wenn in den Gleichungen

$$u_1 + iv_1 = \varphi(u' + iv'), \qquad u_1 - iv_1 = \psi(u' - iv')$$

oder

$$u_1 + iv_1 = \varphi(u' - iv'), \qquad u_1 - iv_1 = \psi(u' + iv')$$

unter φ eine beliebige Funktion verstanden wird, die Kurven $u_1 = \text{const.}$, $v_1 = \text{const.}$ ein isometrisches Netz bilden, ergibt sich unmittelbar. Denn man erhält

$$du_1^2 + dv_1^2 = \varphi'(u' \pm iv')\psi'(u' \mp iv')(du'^2 + dv'^2)$$

oder, bei Hinzunahme von (1),

$$ds^2 = \frac{E'}{\varphi'\psi'}(du_1^2 + dv_1^2).$$

Es sind also auch für die Parameter u_1, v_1 die erste und dritte Fundamentalgröße erster Ordnung einander gleich, die zweite gleich Null.

Hiernach können schließlich alle isometrischen Kurvennetze auf einer Fläche als bekannt angesehen werden, wenn eines von ihnen gefunden ist.

§ 75.

Konforme Abbildung.

Mit der Theorie der isometrischen Linien hängt eine Abbildungsaufgabe eng zusammen. Man sagt allgemein, zwei Flächen seien (eindeutig) aufeinander abgebildet, wenn jedem Punkte der ersten ein Punkt der zweiten entspricht, und umgekehrt. Am einfachsten kann man sich eine solche Abbildung dadurch vollzogen denken, daß man, wie im § 37, die kartesischen Koordinaten beider Flächen als Funktionen derselben Variablen u, v annimmt. Von dieser Art ist die durch parallele Normalen vermittelte Beziehung einer beliebigen Fläche zur Einheitskugel (§ 35).

Hier soll speziell von der konformen Abbildung die Rede sein, die durch die Gleichung

(1) $$ds_1 = m\,ds$$

charakterisiert wird. ds und ds_1 bedeuten dabei irgend zwei einander entsprechende Linienelemente der ersten und zweiten Fläche, m eine Funktion von u und v. Sind E_1, F_1, G_1 die Fundamentalgrößen der zweiten Fläche, so ist (1) gleichbedeutend mit

(2) $$E_1du^2 + 2F_1dudv + G_1dv^2 = m^2(Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2),$$

und für das Bestehen dieser Gleichung wieder sind die Bedingungen

(3) $$E_1 = m^2E, \qquad F_1 = m^2F, \qquad G_1 = m^2G$$

notwendig und hinreichend.

Bei der konformen Abbildung sind die Winkel zwischen entsprechenden Linienelementen beider Flächen einander gleich. Denn nach den Formeln § 11 (8, 12) hängen die trigonometrischen Funktionen des Winkels zweier Richtungen nur von den Verhältnissen der Fundamentalgrößen erster Ordnung ab, ändern sich also nicht, wenn man E, F, G mit einer und derselben Größe m^2 multipliziert. Nimmt man auf den beiden Flächen zwei einander entsprechende unendlich-kleine Dreiecke an, so kann man, unter Vernachlässigung der Änderung von m in einem solchen Dreieck, sagen, daß ihre homologen Seiten einander proportional sind. Aus diesem Grunde bedient man sich für zwei konform aufeinander abgebildete Flächen auch des Ausdruckes, sie seien in den kleinsten Teilen ähnlich.

Wird die Größe m konstant, $= 1$ angenommen, so geht die konforme Abbildung in die Abwickelung (§ 37) über.

Es sei jetzt die zweite Fläche im besonderen eine Ebene. Dann kann man

$$ds_1^2 = du_1^2 + dv_1^2$$

setzen, für u_1, v_1 als rechtwinklige kartesische Koordinaten, und die Gleichung (1) oder $ds = m_1 ds_1$ liefert

$$(4) \qquad Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = m_1^2(du_1^2 + dv_1^2).$$

Dieser Beziehung gemäß ist der funktionale Zusammenhang zwischen u, v und u_1, v_1 zu bestimmen. Die Form von (4) lehrt in Verbindung mit S. 266 (1), daß die Aufgabe, ein Netz isometrischer Kurven zu finden, mit dem Problem der konformen Abbildung der gegebenen Fläche auf eine Ebene identisch ist. Infolgedessen werden die Größen u_1 und v_1, für welche $E_1 = G_1$, $F_1 = 0$ ist, auch als Abbildungsparameter bezeichnet.

Liegt die Aufgabe vor, zwei auf verschiedene Parameter bezogene krumme Flächen konform aufeinander abzubilden, d. h. u', v' als Funktionen von u, v so zu bestimmen, daß die Gleichung

$$E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2 = m^2(Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2)$$

stattfindet, so bilde man beide Flächen zunächst auf die Ebene ab. Dies geschieht vermittelst der Gleichungen

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = m_1^2\,(du_1^2 + dv_1^2)$$
$$E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2 = m_1'^2(du_1'^2 + dv_1'^2),$$

deren jede die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades voraussetzt. Sind u_1 und v_1 als Funktionen von

u und v, u_1' und v_1' als Funktionen von u' und v' gefunden, so ist noch die Gleichung

$$m_1'^2(du_1'^2 + dv_1'^2) = m^2 m_1^2(du_1^2 + dv_1^2)$$

zu erfüllen, was nach § 74 in der allgemeinsten Weise dadurch geschieht, daß $u_1' + iv_1'$ gleich einer willkürlichen Funktion von $u_1 \pm iv_1$ gesetzt wird. Hierdurch wird schließlich die gesuchte Beziehung zwischen u, v und u', v' geliefert.

§ 76.

Konforme Abbildung eines Rotationsellipsoids auf eine Ebene.

Die Gleichung des Umdrehungsellipsoids sei

(1) $$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Im Anschluß an Gauß ersetzen wir sie durch

(2) $$\begin{aligned} x &= a \sin u \cos v \\ y &= a \sin u \sin v \\ z &= c \cos u. \end{aligned}$$

Die hieraus folgenden Ausdrücke

(3) $$E = a^2 \cos^2 u + c^2 \sin^2 u, \qquad F = 0, \qquad G = a^2 \sin^2 u$$

kennzeichnen nach S. 266 (10) die Koordinatenlinien bereits als isometrisch. Um die Abbildung durchzuführen, hat man nur den Parameter u durch eine Funktion u' von u derart zu ersetzen, daß $E' = G'$ wird. Zu dem Ende ist die Differentialgleichung

$$\sqrt{a^2 \cos^2 u + c^2 \sin^2 u}\, du - ai \sin u\, dv = 0$$

oder

(4) $$\sqrt{\operatorname{ctg}^2 u + \frac{c^2}{a^2}}\, du - i\, dv = 0$$

zu integrieren, d. h., da die Variablen getrennt und der Koeffizient von dv konstant ist, eine Quadratur auszuführen.

Es sei für $c < a$, also unter Voraussetzung eines abgeplatteten Ellipsoides,

(5) $$\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}} = \varepsilon,$$

so liefert die Substitution

(6) $$\operatorname{ctg} u = \frac{c}{a} \operatorname{ctg} w$$

als Differentialgleichung:

(7) $$\frac{(1 - \varepsilon^2)\, dw}{\sin w (1 - \varepsilon^2 \cos^2 w)} - i\, dv = 0.$$

Setzt man nun

$$\frac{1}{\sin w(1-\varepsilon^2\cos^2 w)} = \frac{A}{\sin w} + \frac{B\sin w}{1-\varepsilon\cos w} + \frac{C\sin w}{1+\varepsilon\cos w},$$

wobei A, B, C durch die Gleichungen

$$A = \frac{1}{1-\varepsilon^2}, \qquad B = C = -\frac{\varepsilon^2}{2(1-\varepsilon^2)}$$

bestimmt werden, so erhält man als Integral von (7)

$$\text{(8)} \qquad \log \operatorname{ctg}\frac{w}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\log\frac{1-\varepsilon\cos w}{1+\varepsilon\cos w} + iv = C'.$$

Es ist $u' + v'i$ gleich einer Funktion der linken Seite dieser Gleichung zu setzen. Im besonderen kann man

$$\text{(9)} \qquad u' = k\log\left\{\operatorname{ctg}\frac{w}{2}\cdot\left(\frac{1-\varepsilon\cos w}{1+\varepsilon\cos w}\right)^{\frac{\varepsilon}{2}}\right\}, \qquad v' = kv$$

annehmen.

Ist das Rotationsellipsoid ein verlängertes, also $c > a$, so tritt

$$\text{(10)} \qquad \sqrt{\frac{c^2}{a^2}-1} = \eta$$

an die Stelle von (5), und

$$\text{(11)} \qquad \frac{(1+\eta^2)dw}{\sin w(1+\eta^2\cos^2 w)} - idv = 0$$

an die Stelle der Differentialgleichung (7). Macht man die Zerlegung

$$\frac{1}{\sin w(1+\eta^2\cos^2 w)} = \frac{A}{\sin w} + \frac{B\sin w}{1+\eta^2\cos^2 w},$$

so gelten die Bestimmungen

$$A = \frac{1}{1+\eta^2}, \qquad B = \frac{\eta^2}{1+\eta^2},$$

und das Integral von (11) wird

$$\text{(12)} \qquad \log\operatorname{ctg}\frac{w}{2} + \eta\operatorname{arctg}(\eta\cos w) + iv = C'.$$

Um der Bedingung $E' = G'$ zu genügen, darf man also jetzt

$$\text{(13)} \qquad u' = k\log\operatorname{ctg}\frac{w}{2} + k\eta\operatorname{arctg}(\eta\cos w), \qquad v' = kv$$

setzen.

Daß in (9) und (13) noch u für w aus der Gleichung (6) einzuführen ist, versteht sich von selbst.

Für $c = a$ wird das Rotationsellipsoid zu einer Kugel, und man hat

$$E = a^2, \qquad F = 0, \qquad G = a^2 \sin^2 u \tag{14}$$

$$\frac{du}{\sin u} - i dv = 0$$

$$\log \operatorname{ctg} \frac{u}{2} + iv = C'$$

$$u' = k \log \operatorname{ctg} \frac{u}{2}, \qquad v' = kv, \tag{15}$$

wie auch für $w = u$, $\varepsilon = 0$ und $\eta = 0$ aus (9) und (13) folgt. Das Quadrat des Linienelements geht aus

$$a^2(du^2 + \sin^2 u\, dv^2)$$

in

$$\frac{4a^2 e^{\frac{2u'}{k}}}{k^2\left(1 + e^{\frac{2u'}{k}}\right)^2}(du'^2 + dv'^2)$$

über.

Die konforme Abbildung der Kugel auf die Ebene ist für die Kartographie wichtig, doch sollen Einzelheiten dieser Anwendung hier nicht erörtert werden. Nur das sei bemerkt, daß die Gleichungen $v' =$ const., $u' =$ const. auf der Kugel die Meridiankreise und die Parallelkreise liefern, in der Ebene zwei Scharen paralleler Geraden, die aufeinander senkrecht stehen. Diese Abbildung entspricht also der Mercatorschen Projektion.

Bezieht man dagegen die Ebene auf Polarkoordinaten statt auf kartesische, so entspricht die Abbildung der stereographischen Projektion. Denn die Meridiane gehen hier in gerade Linien über, die sich in einem und demselben Punkte, dem Pol des Koordinatensystems, schneiden, und die Parallelkreise in konzentrische Kreise mit dem Pol als Mittelpunkt.

Die Aufgaben, spezielle Flächenstücke von gegebener Begrenzung aufeinander abzubilden, gehören zu den interessantesten der Analysis. Nach den Ergebnissen der beiden vorhergehenden Paragraphen sind es jedoch nicht Probleme der allgemeinen Flächentheorie, sondern der speziellen Funktionentheorie, und können deshalb hier nicht Gegenstand der Untersuchung sein.

§ 77.

Isometrische Koordinatenlinien.

Wählt man die Koordinatenlinien isometrisch und nimmt die Parameter von vornherein als Abbildungsparameter an, so erfahren viele flächentheoretische Formeln eine beträchtliche Vereinfachung.

So reduzieren sich für

$$(1)\qquad E = G, \qquad F = 0$$

die sechs Christoffelschen Verbindungen auf zwei Größen. Denn aus den Definitionsgleichungen S. 137 (27) folgt

$$(2)\qquad \begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}, & J_1' &= \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}, & J_1'' &= -\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u} \\ J_2 &= -\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}, & J_2' &= \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}, & J_2'' &= \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}, \end{aligned}$$

mithin

$$(3)\qquad \begin{aligned} J_1 &= J_2' = -J_1'' \\ J_2'' &= J_1' = -J_2. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke der Koeffizienten in den Weingartenschen Formeln werden

$$(4)\qquad \begin{aligned} \eta_{11} &= -\frac{L}{E}, & \eta_{12} &= -\frac{M}{E} \\ \eta_{21} &= -\frac{M}{E}, & \eta_{22} &= -\frac{N}{E}, \end{aligned}$$

und demnach diese Formeln selbst

$$(5)\qquad \frac{\partial X}{\partial u} = -\frac{1}{E}\left(L\frac{\partial x}{\partial u} + M\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

$$(6)\qquad \frac{\partial X}{\partial v} = -\frac{1}{E}\left(M\frac{\partial x}{\partial u} + N\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Für die Summe und das Produkt der Hauptkrümmungen ergeben sich die Gleichungen

$$(7)\qquad H = \frac{L+N}{E}$$

$$(8)\qquad K = \frac{LN - M^2}{E^2},$$

und die Differentialgleichung der Krümmungslinien wird

$$M du^2 + (N - L)\,du\,dv - M dv^2 = 0.$$

Der Gaußsche Ausdruck des Krümmungsmaßes (S. 120 (7)) ist durch die Gleichung

$$(9)\qquad K = -\frac{1}{2E}\left(\frac{\partial^2 \log E}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log E}{\partial v^2}\right)$$

bestimmt; die zweite und dritte Fundamentalgleichung (S. 229 (D)) lauten

$$(10)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u} - (L + N)J_1' &= 0 \\ \frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v} - (L + N)J_2' &= 0. \end{aligned}$$

Endlich haben die Fundamentalgrößen der Einheitskugel die Werte

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \frac{1}{E}(L^2 + M^2) \\ (11) \qquad \mathfrak{F} &= \frac{1}{E}(L + N)M \\ \mathfrak{G} &= \frac{1}{E}(M^2 + N^2), \end{aligned}$$

aus denen sich das Quadrat des Linienelements der Kugel in der Form

(12) $$d\sigma^2 = \frac{1}{E}[(Ldu + Mdv)^2 + (Mdu + Ndv)^2]$$

zusammensetzt.

§ 78.

Geodätische Linien.

Zu einer wichtigen Klasse von Kurven führt die Aufgabe, auf einer Fläche die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten zu finden. Längs eines Kurvenstückes mit den Endpunkten A_0 und A_1 sind x, y, z als Funktionen einer unabhängigen Variablen t zu denken, die alle Werte eines Intervalles $(t_0 \ldots t_1)$ stetig durchläuft. Diese Funktionen, die durch die Flächengleichung

(1) $$F(x, y, z) = 0$$

verbunden sind, müssen dann so bestimmt werden, daß

$$s \equiv \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

ein Minimum wird.

Zwischen A_0 und A_1 sei noch eine zweite, der ersten benachbarte Kurve angenommen, deren Koordinaten die Ausdrücke $x(t) + \xi(t)$, $y(t) + \eta(t)$, $z(t) + \zeta(t)$ haben mögen und deren Bogenlänge S heiße. Die Funktionen $x + \xi, \ldots$ genügen ebenfalls der Flächengleichung, es ist also

(2) $$F(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) = 0.$$

Daß die gesuchte Kurve nur mit solchen in ihrer Nachbarschaft verglichen wird, soll analytisch darin seinen Ausdruck finden, daß ξ, η, ζ, ebenso wie deren Ableitungen, für alle in Betracht kommenden Werte von t dem absoluten Betrage nach beliebig klein sind. Unter diesen Voraussetzungen, im übrigen bei beliebiger Wahl von ξ, η, ζ muß der Aufgabe gemäß

$$S > s$$

werden. Nun ist

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\left(\frac{d(x+\xi)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(y+\eta)}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d(z+\zeta)}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Entwickelt man in der Differenz $S - s$ die Größe unter dem Integralzeichen nach Potenzen von $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$, so findet man als Aggregat der linearen Glieder

$$\frac{\frac{dx}{dt}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\eta}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\zeta}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}}.$$

Wegen

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$$

kann man dafür kürzer

$$\frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dy}{ds}\frac{d\eta}{dt} + \frac{dz}{ds}\frac{d\zeta}{dt}$$

schreiben. Das Integral dieses Ausdruckes ist das Anfangsglied von $S - s$ und muß gleich Null sein, wenn die Differenz beständig positiv sein soll. Ob sie wirklich positiv wird, hängt von dem Zeichen des Restausdruckes ab. Hiernach ergibt sich als notwendige, aber im allgemeinen nicht hinreichende Bedingung:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{dt} + \frac{dy}{ds}\frac{d\eta}{dt} + \frac{dz}{ds}\frac{d\zeta}{dt}\right) dt = 0. \tag{3}$$

Zerlegt man das Integral in drei Summanden und wendet partielle Integration an, so erhält man für den ersten Teil

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{dx}{ds}\frac{d\xi}{dt}\, dt = \left[\xi \frac{dx}{ds}\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \xi \frac{d\frac{dx}{ds}}{dt}\, dt.$$

Nun müssen die Größen ξ, η, ζ für $t = t_0$ und $t = t_1$ verschwinden, da die Endpunkte A_0, A_1 für die zweite Kurve dieselben sind wie für die erste. Die ersten Glieder rechts fallen also weg, und die Gleichung (3) wird durch

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\xi \frac{d\frac{dx}{ds}}{dt} + \eta \frac{d\frac{dy}{ds}}{dt} + \zeta \frac{d\frac{dz}{ds}}{dt}\right) dt = 0 \tag{4}$$

ersetzt. Infolge der Gleichungen (1) und (2) gilt dabei für ξ, η, ζ, unter beständiger Weglassung der höheren Potenzen, die Bedingung

$$\frac{\partial F}{\partial x}\xi + \frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial z}\zeta = 0. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) ist für die gesuchte Kurve eine von ξ, η, ζ freie Differentialgleichung herzuleiten. Das Verfahren wird am deutlichsten, wenn man, obwohl auf Kosten der Symmetrie, die unabhängige Variable t gleich einer der kartesischen Koordinaten selbst, etwa x, annimmt. Die Gleichungen (4) und (5) erhalten dann die Form

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\eta\frac{d\frac{dy}{ds}}{dx} + \zeta\frac{d\frac{dz}{ds}}{dx}\right)dx = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}\eta + \frac{\partial F}{\partial z}\zeta = 0.$$

Durch Elimination von ζ folgt

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{dx} - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}\frac{d\frac{dz}{ds}}{dx}\right)\eta\, dx = 0,$$

eine Bedingung, in welcher nun η innerhalb gewisser Grenzen völlig willkürlich ist und die daher nur bestehen kann, wenn der Koeffizient von η verschwindet. Dies liefert

$$d\frac{dy}{ds} : d\frac{dz}{ds} = \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z},$$

oder bei Benutzung der Frenetschen Formeln (I) und der Ausdrücke S. 50 (12) für die Richtungskosinus der Flächennormale:

$$b'' : c'' = Y : Z, \tag{6}$$

d. h.

$$b'' = \varepsilon Y, \qquad c'' = \varepsilon Z.$$

Infolge der Identitäten

$$\sum aa'' = 0, \qquad \sum aX = 0$$

tritt hierzu noch

$$a'' = \varepsilon X,$$

womit die durch die Annahme $t = x$ zerstörte Symmetrie wiederhergestellt ist. Hiernach müssen die Hauptnormale der gesuchten Kurve und die Normale der gegebenen Fläche, von den positiven Richtungen abgesehen, zusammenfallen; oder, was wegen des Senkrechtstehens

beider Geraden auf der Kurventangente dasselbe besagt, **die Schmiegungsebene der kürzesten Linie muß überall durch die Flächennormale hindurchgehen.** Diese Bedingung ist aber im allgemeinen ebenso wenig hinreichend für die Kennzeichnung der kürzesten Linie wie die Gleichung (3), aus der sie abgeleitet worden ist. Infolgedessen werden die Kurven, für die nur die eben angegebene geometrische Eigenschaft besteht, als **geodätische Linien** von den kürzesten unterschieden. Mit ihnen beschäftigen wir uns im folgenden ausschließlich; die wichtige und interessante Untersuchung, wann die geodätischen Linien zugleich kürzeste sind, soll, als der Variationsrechnung angehörig, hier nicht geführt werden.

Die charakteristische Eigenschaft der geodätischen Linien läßt sich in mancherlei verschiedene Formen setzen, die alle auf veränderte Ausdrücke der Bedingung (6) hinauskommen. Die Orthogonalität der Binormale zur Flächennormale liefert

$$a'X + b'Y + c'Z = 0 \tag{7}$$

oder

$$PX + QY + RZ = 0, \tag{8}$$

d. h.

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Je nachdem die Fläche in der Form (1) oder $z = z(x, y)$ gegeben ist, sind diese Gleichungen mit

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

oder

$$Pp + Qq - R = 0 \tag{11}$$

gleichbedeutend.

Einer weitläufigeren Rechnung bedarf es, um die Differentialgleichung der geodätischen Linien für den Fall zu erhalten, daß x, y, z als Funktionen von u und v gegeben sind. Allein diese Rechnung ist bereits früher vollständig erledigt worden. Erinnert man sich nämlich der Formel S. 125 (2)

$$g\,ds^3 = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix}, \tag{12}$$

so sieht man, daß eine geodätische Linie auch durch das Verschwinden ihrer Tangentialkrümmung gekennzeichnet werden kann. Nach der damals angestellten Transformation, vgl. S. 127 (6), wird also die Differentialgleichung:

$$(13)\quad \begin{aligned}(J_2 du^2 + 2J_2' du dv + J_2'' dv^2) du - (J_1 du^2 + 2J_1' du dv + J_1'' dv^2) dv \\ + du d^2 v - dv d^2 u = 0.\end{aligned}$$

Es hat wenig Zweck, hierin die Ausdrücke der Christoffelschen Größen aus S. 137 (27) einzusetzen. Nur der Vollständigkeit wegen möge die entstehende Gleichung angegeben werden:

$$(14)\quad \begin{aligned}(E du + F dv)\left[\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right) du^2 + \frac{\partial G}{\partial u} du dv + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v} dv^2\right] \\ - (F du + G dv)\left[\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} du^2 + \frac{\partial E}{\partial v} du dv + \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right) dv^2\right] \\ + (EG - F^2)(du d^2 v - dv d^2 u) = 0.\end{aligned}$$

Nach der Herleitung ist ihre linke Seite gleich $g T ds^3$.

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung zweiter Ordnung muß zwei willkürliche Konstanten enthalten, die man sich im allgemeinen durch Fixierung zweier Punkte, etwa der Endpunkte A_0 und A_1 der geodätischen Linie, bestimmt denken kann. In engerem Zusammenhange mit der Natur der Differentialgleichung steht die Angabe nur eines Punktes, zusammen mit der Richtung, in welcher die geodätische Linie von ihm ausgehen soll.

§ 79.

Verschiedene Formen der Differentialgleichung der geodätischen Linien.

Man kann die Gleichung (13) oder (14) des vorigen Paragraphen auch dadurch finden, daß man direkt die notwendige Bedingung für das Minimum des Integrales

$$\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt \equiv s$$

ableitet. Der Einfachheit wegen werde dabei

$$t = u$$

angenommen, also v längs der geodätischen Linie als eine noch zu bestimmende Funktion von u betrachtet. Das zu untersuchende Integral nimmt dann die Form an

$$\int_{u_0}^{u_1} \sqrt{E + 2F\frac{dv}{du} + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2}\, du \equiv s.$$

Für eine zweite, der gesuchten beliebig nahe Kurve sei $v + \omega$ diejenige Funktion von u, welche der Größe v für die erste Kurve entspricht. Denkt man sich $v + \omega$ für v in E, F, G eingeführt, so geht z. B. E in $E + \frac{\partial E}{\partial v}\omega + \cdots$ über. Bezeichnet man nun wieder mit S die Bogenlänge der zweiten Kurve und bildet das Anfangsglied von $S - s$, indem man die Wurzelgröße unter dem Integral für S nach Potenzen von ω und $\frac{d\omega}{du}$ entwickelt und bei den Gliedern erster Dimension in diesen Größen stehen bleibt, so findet man das Integral

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{\left(\frac{\partial E}{\partial v} + 2\frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{du} + \frac{\partial G}{\partial v}\left(\frac{dv}{du}\right)^2\right)\omega + \left(2F + 2G\frac{dv}{du}\right)\frac{d\omega}{du}}{2\sqrt{E + 2F\frac{dv}{du} + G\left(\frac{dv}{du}\right)^2}}\, du,$$

welches Null sein muß. Da

$$\sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} = ds$$

ist, so kann man schreiben

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{\left(\frac{\partial E}{\partial v} du^2 + 2\frac{\partial F}{\partial v} du dv + \frac{\partial G}{\partial v} dv^2\right)\omega + 2(F du + G dv) d\omega}{2 ds du}\, du = 0.$$

Bei Anwendung partieller Integration auf den zweiten Teil dieses Integrals, der $d\omega$ enthält, ergibt sich

$$\int_{u_0}^{u_1} \frac{F du + G dv}{ds}\frac{d\omega}{du}\, du = \left[\frac{F du + G dv}{ds}\omega\right]_{u_0}^{u_1} - \int_{u_0}^{u_1} \omega \cdot \frac{d}{du}\left(\frac{F du + G dv}{ds}\right) du.$$

Hier fällt das vom Integralzeichen freie Glied der rechten Seite weg, weil bei der Variation der Kurve die Endpunkte fest bleiben, ω also für $u = u_0$ und $u = u_1$ gleich Null sein muß. Die gefundene Gleichung geht über in

$$\int_{u_0}^{u_1} \left(\frac{\frac{\partial E}{\partial v} du^2 + 2\frac{\partial F}{\partial v} du dv + \frac{\partial G}{\partial v} dv^2}{2 ds du} - \frac{d}{du}\frac{F du + G dv}{ds}\right)\omega\, du = 0.$$

Nach dem auf S. 277 angewendeten Schlusse muß der Koeffizient von

ω verschwinden, und man erhält als Differentialgleichung der geodätischen Linien

$$(1)\qquad \frac{\partial E}{\partial v}du^2 + 2\frac{\partial F}{\partial v}du\,dv + \frac{\partial G}{\partial v}dv^2 = 2ds\,.\,d\frac{F\,du + G\,dv}{ds}.$$

Sie geht entwickelt in S. 279 (14) über. Vertauscht man in der ganzen Rechnung u und v, so ergibt sich

$$(2)\qquad \frac{\partial E}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}du\,dv + \frac{\partial G}{\partial u}dv^2 = 2ds\,.\,d\frac{E\,du + F\,dv}{ds}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung weist auf die Einführung eines der Winkel hin, die die geodätische Linie mit den Koordinatenlinien bildet. Ist nämlich w der durch Drehung in positivem Sinne entstandene Winkel, den die Kurve mit der positiven u-Linie einschließt, so hat man nach S. 35 (11):

$$(3)\qquad \cos w = \frac{E\,du + F\,dv}{\sqrt{E}\,ds}$$

$$(4)\qquad \sin w = \frac{\sqrt{EG - F^2}\,dv}{\sqrt{E}\,ds}.$$

Mit (2) zusammengestellt geben diese Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E}{\partial u}du^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}du\,dv + \frac{\partial G}{\partial u}dv^2 &= 2ds\,.\,d(\sqrt{E}\cos w)\\
&= \frac{ds\,dE\,.\cos w}{\sqrt{E}} - 2ds\sqrt{E}\sin w\,dw\\
&= \frac{(E\,du + F\,dv)\,dE}{\sqrt{E}} - 2\sqrt{EG - F^2}\,dv\,dw\\
&= \frac{E\,du + F\,dv}{E}\left(\frac{\partial E}{\partial u}du + \frac{\partial E}{\partial v}dv\right) - 2\sqrt{EG - F^2}\,dv\,dw
\end{aligned}$$

und schließlich

$$(5)\qquad \begin{aligned}\sqrt{EG - F^2}\,dw = \frac{1}{2}\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u}du + \frac{1}{2}\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v}dv + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}du\\
- \frac{\partial F}{\partial u}du - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}dv\end{aligned}$$

oder auch

$$(6)\qquad \sqrt{EG - F^2}\,dw = \frac{1}{2}\frac{F}{E}dE + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}du - \frac{\partial F}{\partial u}du - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}dv.$$

Aus (3) und (4) folgt noch

$$(7)\qquad \operatorname{ctg} w = \frac{E}{\sqrt{EG - F^2}}\frac{du}{dv} + \frac{F}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Die Elimination von w aus (5) und (7) würde wiederum die Gleichung S. 279 (14) liefern.

Bei Einführung der Christoffelschen Verbindungen lautet die Formel (5):

$$\frac{E}{T} dw = -(J_2 du + J_2' dv). \tag{8}$$

§ 80.

Die geodätischen Linien auf der Kugel.

Bevor die allgemeine Theorie der geodätischen Linien weiter verfolgt wird, sollen diese Kurven auf speziellen Flächen analytisch dargestellt werden.

Es sei erstens eine Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

gegeben. Die Differentialgleichung ihrer geodätischen Linien ist nach S. 278 (10):

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Multipliziert man die zweite und dritte Spalte der Determinante mit den willkürlichen Konstanten B und C und addiert sie zur ersten, so erhält man die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x + By + Cz, & y, & z \\ dx + Bdy + Cdz, & dy, & dz \\ d^2x + Bd^2y + Cd^2z, & d^2y, & d^2z \end{vmatrix} = 0,$$

die durch

$$x + By + Cz = 0$$

befriedigt wird. Jede Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel trifft also die Fläche in einer geodätischen Linie, d. h. diese Linien stimmen mit den Hauptkreisen der Kugel überein. Denkt man sich die Konstanten B, C durch Angabe zweier Punkte A_0, A_1 bestimmt, zwischen denen sich die Kurve erstrecken soll, so ist natürlich nur der eine der beiden Bogen $\widehat{A_0 A_1}$ der kürzeste Weg zwischen diesen beiden Punkten.

Die eindeutige Bestimmbarkeit der Ebene vermittelst der beiden Punkte hört auf, wenn diese einander auf der Kugel diametral gegenüber liegen. Alsdann gehen unendlichviele geodätische Linien durch das Punktepaar hindurch, nämlich alle Kreise, in denen die Kugel von dem Ebenenbüschel mit der Achse $A_0 A_1$ geschnitten wird.

§ 81.

Die geodätischen Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid. Joachimsthalscher Satz.

Ist ein Ellipsoid durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dargestellt, so lautet die Differentialgleichung der geodätischen Linien

$$\begin{vmatrix} \frac{x}{a^2} & \frac{y}{b^2} & \frac{z}{c^2} \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Mit Hilfe des Differentials der Flächengleichung läßt sie eine für die Integration nützliche Umformung zu, die aber, weil auch sonst brauchbar, an der allgemeinen Gleichung S. 278 (9) vorgenommen werden soll. Aus

(1) $$(Yd^2z - Zd^2y)dx + (Zd^2x - Xd^2z)dy + (Xd^2y - Yd^2x)dz = 0$$

ergibt sich in Verbindung mit

(2) $$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

unter Einführung eines Proportionalitätsfaktors:

(3) $$\mu dx = (Zd^2x - Xd^2z)Z - (Xd^2y - Yd^2x)Y$$
$$= d^2x(X^2 + Y^2 + Z^2) - X(Xd^2x + Yd^2y + Zd^2z),$$

d. h.

(4) $$\mu dx = d^2x - nds^2 X.$$

Die drei einander entsprechenden Formeln für μdx, μdy, μdz vertreten, weil (2) eine Identität ist, zusammen die Differentialgleichung (1). Multipliziert man sie mit dx, dy, dz und addiert, so findet man

$$\mu ds^2 = dsd^2s,$$

(5) $$\mu = \frac{d^2s}{ds}.$$

In manchen Fällen gelingt es, durch anderweitige Gruppierung der drei Formeln oder durch Hinzunahme des Differentials von (2) einen zweiten Ausdruck für μ zu bilden, der mit dem ersten zusammengestellt eine integrable Gleichung und damit ein erstes Integral der Differentialgleichung (1) liefert.

Für das Ellipsoid hat die Gleichung (2) oder die mit ihr gleichbedeutende

$$\sum \frac{\partial F}{\partial x} dx = 0$$

die Form

$$\sum \frac{x}{a^2} dx = 0.$$

Die nochmalige Bildung des Differentials ergibt

$$\sum \frac{x}{a^2} d^2x + \sum \frac{dx^2}{a^2} = 0$$

oder, wenn

(6) $$\sum \frac{dx^2}{a^2} = V$$

gesetzt wird,

(7) $$\sum \frac{x}{a^2} d^2x = -V.$$

Ferner ist für

(8) $$\sqrt{\sum \frac{x^2}{a^4}} = W:$$

$$X = \frac{1}{W} \frac{x}{a^2}, \qquad Y = \frac{1}{W} \frac{y}{b^2}, \qquad Z = \frac{1}{W} \frac{z}{c^2},$$

sodaß die Gleichung (7)

$$\sum X d^2x = -\frac{V}{W}$$

liefert. Setzt man diesen Ausdruck und den von X in (3) ein, so erhält man

$$\mu dx = d^2x + \frac{V}{W^2} \frac{x}{a^2}.$$

Die drei hierdurch vertretenen Formeln mögen nun mit $\frac{dx}{a^2}$, $\frac{dy}{b^2}$, $\frac{dz}{c^2}$ multipliziert und addiert werden, so folgt mit Rücksicht auf (6) und (8):

$$\mu V = \sum \frac{dx\, d^2x}{a^2} + \frac{V}{W^2} \sum \frac{x dx}{a^4}$$

$$= \frac{1}{2} dV + \frac{V}{W^2} W dW.$$

Der hierdurch bestimmte Wert von μ liefert, dem ersten gleichgesetzt, die Differentialgleichung

$$2 \frac{d^2s}{ds} = \frac{dV}{V} + 2 \frac{dW}{W}.$$

Ihr Integral ist

$$A ds^2 = V W^2,$$

für A als willkürliche Konstante. Demnach stellt die Gleichung

$$(9)\qquad \left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)\left(\frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}+\frac{dz^2}{c^2}\right)=A(dx^2+dy^2+dz^2)$$

das erste Integral der Differentialgleichung der geodätischen Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoide dar.

Die Relation (9) hat eine einfache geometrische Bedeutung. Es seien α, β, γ die Richtungswinkel der vom Punkte (x, y, z) nach dem Punkte $(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)$ gehenden Flächentangente. Soll diese zugleich Tangente der betrachteten geodätischen Linie sein, so sind dx, dy, dz dieselben Größen wie in (9), und man hat

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\qquad \frac{dy}{ds}=\cos\beta,\qquad \frac{dz}{ds}=\cos\gamma.$$

Die nach Division mit ds^2 auf der linken Seite von (9) auftretende Verbindung

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}$$

ergibt sich aber aus der Flächengleichung unmittelbar. Denn ist d der Halbmesser des Ellipsoids mit den Richtungswinkeln α, β, γ, also die Koordinaten seines Endpunktes $d\,.\cos\alpha$, $d\,.\cos\beta$, $d\,.\cos\gamma$, so wird

$$d^2\left(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\cos^2\beta}{b^2}+\frac{\cos^2\gamma}{c^2}\right)=1.$$

Der in der Gleichung (9) an erster Stelle stehende Faktor

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}$$

bedeutet, wie schon auf S. 243 benutzt, das reziproke Quadrat des Abstandes p der Tangentialebene im Punkte (xyz) vom Mittelpunkte der Fläche. Die Gleichung selbst geht in

$$\frac{1}{p^2d^2}=A$$

oder

$$(10)\qquad pd=\text{const.}$$

über, liefert demnach folgenden, von Joachimsthal herrührenden Satz: Legt man in irgendeinem Punkte einer geodätischen Linie des Ellipsoids die Tangentialebene an die Fläche und konstruiert außerdem den Halbmesser des Ellipsoids, welcher der Tangente der Kurve in demselben Punkte parallel ist, so hat das Produkt dieses Halbmessers mit dem Abstande der Tangentialebene vom Mittelpunkte der Fläche längs der ganzen Kurve denselben Wert.

Durch Einführung der elliptischen Koordinaten (S. 241) ist es Jacobi gelungen, die Gleichung (9) noch einmal zu integrieren. Das

Quadrat des Linienelements der Fläche ist für diese Parameter bereits dargestellt worden; setzt man zur Abkürzung

$$(11)\qquad \begin{aligned}(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)&=U\\(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)&=V,\end{aligned}$$

so ist nach S. 244 (20)

$$(12)\qquad dx^2+dy^2+dz^2=\frac{u-v}{4}\left(\frac{u\,du^2}{U}-\frac{v\,dv^2}{V}\right).$$

Zur Berechnung von

$$\sum\frac{dx^2}{a^2}$$

braucht man außer den dort angegebenen Formeln (17, 18, 19) noch die folgende:

$$(13)\qquad \sum\frac{b^2c^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}=1.$$

Sie ergibt sich aus jenen sofort, wenn

$$b^2c^2=(a^2-b^2)(a^2-c^2)+a^2(a^2+b^2+c^2)-2a^4$$

gesetzt und nach Division mit $(a^2-b^2)(a^2-c^2)$ über a, b, c summiert wird. Man erhält

$$(14)\qquad \frac{dx^2}{a^2}+\frac{dy^2}{b^2}+\frac{dz^2}{c^2}=\frac{u-v}{4}\left(\frac{du^2}{U}-\frac{dv^2}{V}\right).$$

Endlich war (S. 243 (12))

$$(15)\qquad \frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{uv}{a^2b^2c^2}.$$

Werden die Ausdrücke (12, 14, 15) in (9) eingesetzt und noch an Stelle von A eine neue Konstante C durch die Gleichung

$$A=\frac{C}{a^2b^2c^2}$$

eingeführt, so folgt

$$uv\frac{u-v}{4}\left(\frac{du^2}{U}-\frac{dv^2}{V}\right)=C\frac{u-v}{4}\left(\frac{u\,du^2}{U}-\frac{v\,dv^2}{V}\right)$$

oder

$$(16)\qquad \frac{u\,du^2}{(C-u)\,U}=\frac{v\,dv^2}{(C-v)\,V}.$$

Hier sind die Variablen getrennt. Setzt man für U und V ihre Werte wieder ein und integriert, so findet man als Gleichung der geodätischen Linien auf dem Ellipsoid

$$(17)\qquad \begin{aligned}&\int\frac{\sqrt{u}\,du}{\sqrt{(C-u)(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)}}=\\&\int\frac{\pm\sqrt{v}\,dv}{\sqrt{(C-v)(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)}}+C'.\end{aligned}$$

Das Problem ist damit auf Quadraturen, und zwar auf die Ausführung hyperelliptischer Integrale zurückgeführt.

§ 82.

Die geodätischen Linien auf den Umdrehungsflächen.

Die vorstehende Herleitung gilt nicht mehr, wenn die Hauptachsen des Ellipsoides nicht alle drei voneinander verschieden, wenn also die Fläche eine Umdrehungsfläche ist. Es sollen die geodätischen Linien auf einer beliebigen Rotationsfläche aufgesucht werden.

Für die im vorigen Paragraphen benutzte Hilfsgröße μ ist auf S. 283 ein bestimmter Ausdruck dadurch hergestellt worden, daß aus drei Gleichungen, deren erste

$$\mu dx = d^2x - nds^2 X$$

ist, die Größe nds^2 eliminiert wurde. Man kann dieselbe Größe auch aus den beiden ersten Gleichungen allein wegschaffen, indem man die hier wieder angegebene mit $-Y$, die zweite,

$$\mu dy = d^2y - nds^2 Y,$$

mit X multipliziert und zur ersten addiert. Dann ergibt sich

$$(1)\qquad \mu(Xdy - Ydx) = Xd^2y - Yd^2x$$

oder auch

$$(2)\qquad \mu = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}d^2y - \frac{\partial F}{\partial y}d^2x}{\frac{\partial F}{\partial x}dy - \frac{\partial F}{\partial y}dx}.$$

Für eine Umdrehungsfläche

$$(3)\qquad z - f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = 0$$

erhält man nun, wenn man

$$\sqrt{x^2+y^2} = u$$

setzt,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -f'(u)\frac{x}{u},\qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -f'(u)\frac{y}{u},$$

also

$$(4)\qquad \mu = \frac{xd^2y - yd^2x}{xdy - ydx}.$$

Hier ist, ebenso wie in dem Ausdruck S. 283(5), der Zähler das Differential des Nenners. Setzt man also die beiden Werte einander gleich, so ergibt sich die integrable Gleichung

$$\frac{d^2s}{ds} = \frac{xd^2y - yd^2x}{xdy - ydx}.$$

Demnach ist das erste Integral der Differentialgleichung der geodätischen Linien auf einer Rotationsfläche:

(5) $$xdy - ydx = Cds.$$

Die linke Seite weist auf Polarkoordinaten in der (xy)-Ebene hin. Für

$$x = u\cos v, \qquad y = u\sin v$$

wird

$$xdy - ydx = u^2dv,$$

mithin

(6) $$u^2\frac{dv}{ds} = C.$$

Um diese Gleichung geometrisch zu deuten, betrachte man die beiden Meridiane, die durch zwei benachbarte Punkte A und C der geodätischen Linie hindurchgehen (Fig. 15). Der Fortgang von A nach C geschehe im Sinne der wachsenden v. Es sei ω der spitze Winkel, den die Richtung AC mit dem durch A gelegten Parallelkreise bildet, $\widehat{AB} \equiv udv$ der Bogen dieses Kreises zwischen den beiden benachbarten Meridiankurven. Dann gilt die Gleichung

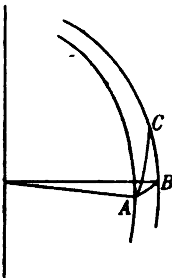


Fig. 15.

$$\frac{AB}{AC} = \cos\omega,$$

$$\frac{udv}{ds} = \cos\omega,$$

und (6) geht in

(7) $$u\cos\omega = C$$

über. Das heißt: Das Produkt des Radius eines Parallelkreises mit dem Kosinus des Winkels, den eine geodätische Linie mit diesem Kreise bildet, ist längs der ganzen Linie konstant. Dies ist der Clairautsche Satz der Theorie der geodätischen Linien.

Ist w der Winkel der betrachteten Kurve mit dem Meridian, so kann man auch schreiben:

(8) $$u\sin w = C.$$

Die Differentialgleichung erster Ordnung (6) läßt eine weitere Integration zu, wenn nach S. 102 (11)

$$ds^2 = (1 + f'(u)^2)du^2 + u^2 dv^2$$

eingeführt wird. Dann entsteht nämlich die Gleichung

$$u^2(u^2 - C^2)dv^2 = C^2(1 + f'(u)^2)du^2,$$

deren Integral ist

(9) $$v = C\int\limits_{u_0}^{u} \sqrt{\frac{1 + f'(u)^2}{u^2 - C^2}}\frac{du}{u} + C'.$$

Das Problem der Aufsuchung der geodätischen Linien auf den Rotationsflächen ist damit ebenfalls auf Quadraturen zurückgeführt.

Es sei nun insbesondere ein Rotationsellipsoid gegeben:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\,.$$

Hier ist

$$f(u) = c\sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2}}$$

$$f'(u) = -\frac{cu}{a^2\sqrt{1 - \frac{u^2}{a^2}}}$$

$$1 + f'(u)^2 = \frac{a^4 - (a^2 - c^2)u^2}{a^2(a^2 - u^2)}.$$

Das auszuführende Integral wird für $u^2 = t$, abgesehen von dem Faktor $\frac{C}{a}$,

$$\int \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - c^2)u^2}}{\sqrt{(a^2 - u^2)(u^2 - C^2)}}\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{a^4 - (a^2 - c^2)t}}{\sqrt{(a^2 - t)(t - C^2)}}\frac{dt}{t}.$$

Macht man die Wurzel im Zähler rational, indem man

$$a^4 - (a^2 - c^2)t = \tau^2$$

setzt, so steigt der Radikandus im Nenner auf den vierten Grad. Die hyperelliptischen Integrale, auf welche die Bestimmung der geodätischen Linien des dreiachsigen Ellipsoids geführt hat, reduzieren sich also für das Umdrehungsellipsoid auf elliptische.

§ 83.

Satz von Liouville.

Die Ergebnisse der drei letzten Paragraphen sind in einem allgemeineren, von Liouville herrührenden Satze enthalten, nach welchem man für eine große Klasse von Flächen die geodätischen Linien durch Quadraturen finden kann. Die Grundlage des Satzes bildet der Zu-

sammenhang zwischen der Theorie dieser Linien und bestimmten Aufgaben der analytischen Mechanik. Eine geodätische Linie erscheint nämlich erstens als Gleichgewichtskurve eines vollkommen biegsamen, unausdehnbaren Fadens, der über eine Fläche ausgespannt wird, ohne daß andere Kräfte als die Spannung auf ihn wirken; zweitens als Bahn eines materiellen Punktes, der sich auf einer Fläche ohne Einwirkung beschleunigender Kräfte bewegt. Halten wir uns an die zweite Tatsache und stellen die Bewegungsgleichungen nach Lagrange in der Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u'} - \frac{\partial T}{\partial u} = 0, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v'} - \frac{\partial T}{\partial v} = 0 \tag{1}$$

auf, wo

$$u' = \frac{du}{dt}, \qquad v' = \frac{dv}{dt},$$

$$T = \frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} m (Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2)$$

gesetzt ist und m die Masse des gegebenen Punktes bedeutet. Die Gleichungen erhalten für u und v als Abbildungsparameter eine besonders einfache Form:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(E\frac{du}{dt}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}\left(\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(E\frac{dv}{dt}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\left(\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Das Prinzip der lebendigen Kraft besagt hier, daß die Geschwindigkeit des Punktes konstant ist,

$$E\left(\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right) = A. \tag{3}$$

Durch Zusammenstellung mit der ersten Gleichung (2) folgt

$$\frac{d}{dt}\left(E\frac{du}{dt}\right) = \frac{A}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}$$

oder

$$\frac{d}{dt}\left(E^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2\right) = A\frac{\partial E}{\partial u}\frac{du}{dt}. \tag{4}$$

Diese Differentialgleichung läßt sich unmittelbar integrieren, wenn $\frac{\partial E}{\partial u}$ eine Funktion von u allein, also

$$E = \varphi(u) - \psi(v) \tag{5}$$

ist. Aus Gründen einer gewissen Symmetrie in den folgenden Formeln ist hier $\psi(v)$ mit dem negativen Zeichen eingeführt worden. Das Integral ist

$$E^2\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = A(\varphi(u) - C), \tag{6}$$

und aus (3) folgt dann weiter

$$(7)\qquad E^2\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = A(C-\psi(v)).$$

Durch Elimination von dt aus (6) und (7) ergibt sich als Differentialgleichung der Bahnkurve

$$(8)\qquad \frac{du}{\sqrt{\varphi(u)-C}} = \varepsilon\frac{dv}{\sqrt{C-\psi(v)}}.$$

Da die Variablen getrennt sind, so werden die geodätischen Linien durch Quadraturen gefunden. Dies tritt also immer dann ein, wenn die Fläche auf ein isometrisches Koordinatennetz derart bezogen werden kann, daß E die durch (5) definierte Form hat. Für die Rotationsflächen und die Flächen zweiten Grades bilden die Krümmungslinien ein solches Netz.

Die Flächen, für welche bei passender Wahl der Parameter

$$ds^2 = (\varphi(u)-\psi(v))(du^2+dv^2)$$

gesetzt werden kann, werden als Liouvillesche Flächen bezeichnet.

Der Liouvillesche Satz kann auch direkt aus den Formeln des § 79 bewiesen werden. Aus (3, 4, 7, 5) dieses Paragraphen (S. 281, folgt nämlich für $E = G$, $F = 0$:

$$(9)\qquad \cos w = \sqrt{E}\frac{du}{ds}, \qquad \sin w = \sqrt{E}\frac{dv}{ds}$$

$$(10)\qquad \operatorname{tg} w = \frac{dv}{du}$$

$$(11)\qquad E\,dw = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}du - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u}dv.$$

Da hier $\frac{\partial E}{\partial u}$ nur von u, $\frac{\partial E}{\partial v}$ nur von v abhängt, so möge die letzte Gleichung so umgeformt werden, daß die erste der beiden partiellen Ableitungen mit du, die zweite mit dv multipliziert erscheint. Es wird

$$2E\,dw = \frac{\partial E}{\partial v}\operatorname{ctg} w\,dv - \frac{\partial E}{\partial u}\operatorname{tg} w\,du,$$

$$(12)\qquad 2E\sin w\cos w\,dw = \frac{\partial E}{\partial v}\cos^2 w\,dv - \frac{\partial E}{\partial u}\sin^2 w\,du.$$

Führt man jetzt $E = \varphi(u) - \psi(v)$ ausdrücklich ein, so nimmt die Gleichung die Form an

$$2\varphi(u)\sin w\cos w\,dw + \varphi'(u)\sin^2 w\,du = 2\psi(v)\sin w\cos w\,dw - \psi'(v)\cos^2 w\,dv$$

$$d(\varphi(u)\sin^2 w) = -\,d(\psi(v)\cos^2 w).$$

Das Integral

$$\varphi(u)\sin^2 w + \psi(v)\cos^2 w = C \tag{13}$$

oder

$$\operatorname{tg} w = \varepsilon \sqrt{\frac{C - \psi(v)}{\varphi(u) - C}} \tag{14}$$

liefert wegen (10) wieder die Gleichung (8).

Auch die Bogenlänge einer geodätischen Linie kann unter der gemachten Annahme durch Quadraturen bestimmt werden. Aus (9) ergibt sich nämlich

$$ds = \sqrt{E}(\cos w\, du + \sin w\, dv), \tag{15}$$

und aus (14)

$$\cos w = \pm \sqrt{\frac{\varphi(u) - C}{E}}, \qquad \sin w = \pm\, \varepsilon \sqrt{\frac{C - \psi(v)}{E}},$$

mithin wird

$$s = \pm \int \sqrt{\varphi(u) - C}\, du \pm \varepsilon \int \sqrt{C - \psi(v)}\, dv + C'. \tag{16}$$

§ 84.

Anwendung des Liouvilleschen Satzes auf das Ellipsoid.

Es ist interessant, die geodätischen Linien auf dem dreiachsigen Ellipsoid und auf einer beliebigen Rotationsfläche noch einmal vom allgemeinen Standpunkt der Theorie der Liouvilleschen Flächen zu betrachten und namentlich das erste Integral der Differentialgleichung in der Liouvilleschen Darstellung ins Auge zu fassen.

Für das Ellipsoid war (S. 286 (12))

$$ds^2 = \frac{u - v}{4}\left(\frac{u\,du^2}{U} - \frac{v\,dv^2}{V}\right). \tag{1}$$

Um das Linienelement auf die Liouvillesche Form zu bringen, hat man die Substitution S. 244 (22) anzuwenden. Dann wird nämlich (S. 245 (23))

$$ds^2 = (U' - V')(du'^2 + dv'^2),$$

und die Gleichung (13) (s. oben) liefert, wenn $C = l^2$ gesetzt wird,

$$U' \sin^2 w + V' \cos^2 w = l^2.$$

Der Herleitung nach sind aber U' und V' nichts anderes als u und v selbst, betrachtet als Funktionen von u' und v'. Die Differentialgleichung der geodätischen Linien auf dem Ellipsoide hat also das erste Integral

$$u \sin^2 w + v \cos^2 w = l^2. \tag{2}$$

Nach S. 244 sind u und v die Quadrate der Halbachsen α und β des zu der Tangentialebene im betrachteten Punkte parallelen Zentralschnitts der Fläche, und zwar ist wegen $\alpha > \beta$

(3) $$u = \alpha^2, \qquad v = \beta^2,$$

also

(4) $$\alpha^2 \sin^2 w + \beta^2 \cos^2 w = l^2.$$

Der ursprünglichen Erklärung zufolge ist w der Richtungsunterschied der Tangente t der geodätischen Linie gegen die Tangente der Koordinatenlinie $v = \text{const}$. Diese Kurve ist hier Krümmungslinie, ihre Tangente eine bestimmte Hauptachse der in die Tangentialebene verlegten Indikatrix. Nun befinden sich der betrachtete Zentralschnitt und der Dupinsche Kegelschnitt in parallelen Ebenen, sind also ähnlich und ähnlich gelegen. Demnach kann w auch als Winkel in der Ebene des Zentralschnitts gedeutet werden, nämlich einer Parallelen zu t (durch den Mittelpunkt) mit einer der beiden Achsen 2α, 2β. In welcher Folge diese Achsen und die des Dupinschen Kegelschnitts, also auch ϱ_1 und ϱ_2, einander entsprechen, ist geometrisch leicht festzustellen. Rein analytisch wird die Zuordnung am deutlichsten bei wirklicher Berechnung der Hauptkrümmungsradien. Gehört, wie früher, ϱ_1 zu $v = \text{const.}$, ϱ_2 zu $u = \text{const.}$, so ist nach den Formeln von Rodrigues (S. 254 (14))

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\varrho_1 \frac{\partial X}{\partial u}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\varrho_2 \frac{\partial X}{\partial v}.$$

Aus S. 241 (6) folgte

(5) $$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{x}{2(a^2 - u)}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{x}{2(a^2 - v)},$$

und es wird

(6) $$X = \frac{bc}{a} \frac{x}{\sqrt{uv}}$$

(7) $$\varrho_1 = -\frac{u\sqrt{uv}}{abc}, \qquad \varrho_2 = -\frac{v\sqrt{uv}}{abc}.$$

Hiernach ist $|\varrho_1| > |\varrho_2|$, sodaß α der Größe ϱ_1 entspricht und w den Winkel der Richtung t mit einer bestimmten Richtung der Achse 2α bedeutet.

Schreibt man die Gleichung (4) in der Form

$$\frac{\cos^2 w}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 w}{\beta^2} = \frac{l^2}{\alpha^2 \beta^2},$$

so erscheint auf ihrer linken Seite von selbst das reziproke Quadrat des zu t parallelen Halbmessers d der Fläche. Es wird also

(8) $$d^2 = \frac{\alpha^2\beta^2}{l^2}.$$

Den Joachimsthalschen Satz erhält man hieraus wieder, wenn man die Formel S. 243 (14)

$$uvp^2 = a^2b^2c^2$$

in der Gestalt

(9) $$\alpha\beta p = abc$$

benutzt. Es wird

(10) $$pd = \frac{abc}{l}.$$

§ 85.

Folgerungen aus dem Joachimsthalschen Satze. Der Liouvillesche Satz für Umdrehungsflächen.

Über die Werte der Konstante l^2 in der Gleichung (2) läßt sich noch Genaueres aussagen. Schreibt man

$$l^2 = v + (u - v)\sin^2 w$$
$$= u - (u - v)\cos^2 w,$$

so sieht man, daß l^2 mindestens gleich v und höchstens gleich u ist. Die Größe muß also zwischen c^2 und a^2 liegen.

Angenommen ferner, eine durch den Punkt (uv) gehende Linie berühre in ihm die erste oder die zweite Krümmungskurve, so ist $\sin w$ oder $\cos w$ gleich Null. Im ersten Falle ist l^2 gleich v selbst, im zweiten gleich u. Die Integrationskonstante bedeutet also dann den Parameter derjenigen Krümmungslinie, die von der geodätischen Linie berührt wird. Seine Grenzen sind b^2 und c^2 im ersten, a^2 und b^2 im zweiten Fall. Es ist von Interesse, l^2 gleich dem Werte b^2 zu setzen, in dem diese beiden Intervalle zusammenhängen. Die Gleichung

(1) $$u\sin^2 w + v\cos^2 w = b^2$$

wird durch $u = v = b^2$ befriedigt, und der dadurch bestimmte Punkt ist, wie man aus (7) des vorigen Paragraphen verifizieren kann, ein Kreispunkt des Ellipsoides (vgl. S. 110).

Die Konstante in der Gleichung des Joachimsthalschen Satzes bestimmt sich für $l^2 = b^2$ aus (10) (s. oben); man erhält

(2) $$pd = ac.$$

Hierin ist ac von der Richtung der Kurve unabhängig; m. a. W., die Konstante hat für alle durch einen Kreispunkt gehenden Linien denselben Wert. Übrigens sind für alle vier Kreispunkte die beiden

Faktoren des Produktes pd einzeln konstante Größen. Dies folgt unmittelbar daraus, daß alle der Tangentialebene in einem Kreispunkte parallelen Ebenen das Ellipsoid in Kreisen schneiden, und daß insbesondere für den Zentralschnitt

$$d = b \tag{3}$$

ist. Hieraus ergibt sich dann

$$p = \frac{ac}{b}. \tag{4}$$

Betrachten wir jetzt zwei verschiedene Kreispunkte K, K' und lassen durch jeden von ihnen eine geodätische Linie hindurchgehen. Die beiden Kurven mögen sich in A schneiden. Für die erste gilt die Gleichung (2), für die zweite entsprechend

$$p'd' = ac.$$

Bezieht man jetzt die vier Größen p, d, p', d' auf den Punkt A, so ist p' mit p identisch, als Abstand der Tangentialebene in A vom Mittelpunkte der Fläche. Die Beziehung

$$pd = p'd'$$

liefert also

$$d = d'.$$

d und d' sind Halbmesser des der Berührungsebene parallelen Zentralschnitts, und zwar diejenigen, die den Tangenten der beiden geodätischen Linien KA und $K'A$ in A parallel gehen. Sind sie einander gleich, so müssen sie gegen jede der Hauptachsen gleich geneigt sein. Oder, wenn man zur Tangentialebene zurückgeht: Verbindet man einen beliebigen Punkt A des Ellipsoids mit zwei Kreispunkten durch geodätische Linien, so bilden diese mit jeder der beiden durch A gehenden Krümmungskurven gleiche Winkel.

Diese Auseinandersetzungen sollten nur beispielsweise zeigen, was für anschauliche Ergebnisse aus dem Joachimsthalschen Satze hergeleitet werden können. Eine systematische Diskussion dieses Satzes, namentlich auch in der Liouvilleschen Schreibweise, würde hier zu weit führen.

Es bleibt noch zu prüfen, was aus der Gleichung S. 292 (13) für eine beliebige Rotationsfläche wird. Nach S. 103 (16) gilt für das Quadrat des Linienelements die Formel

$$ds^2 = \psi_1(u_1)^2(du_1^2 + dv^2).$$

Mithin erhält man

$$\psi_1(u_1)^2 \sin^2 w = C$$

oder, da $\psi_1(u_1) = u$ war,

$$u \sin w = \text{const.}$$

Das ist aber wieder der Clairautsche Satz (S. 288 (8)).

§ 86.

Geodätische Kreise und geodätische Parallelkurven.

Nehmen wir nun die allgemeine Theorie der geodätischen Linien wieder auf. Von einem beliebigen Flächenpunkte A seien nach allen Richtungen hin solche Kurven gezogen, die Fläche aber so begrenzt, daß sie sich nicht zum zweiten Male schneiden. Irgendeine von ihnen sei als erste angenommen; dann kann man jede andere Kurve der Schar durch Angabe des Winkels bestimmen, den ihre Tangente im Punkte A mit der Tangente der ersten bildet. Denkt man sich auf den geodätischen Linien von A aus gleiche Bogenlängen AB, AB', AB'', ... abgetragen, so soll der geometrische Ort der Endpunkte B, B', B'', ... als geodätischer Kreis bezeichnet werden. Dabei ist jedoch festzuhalten, daß eine solche Kurve im allgemeinen nicht selbst geodätisch ist. Gibt man der Bogenlänge andere Werte, so erhält man eine ganze Schar geodätischer Kreise. Behauptet wird, daß sie die geodätischen Radienvektoren AB, ... unter rechten Winkeln schneiden.

Die auf den geodätischen Radien abgetragene Bogenlänge heiße u, und v sei der Winkel, den ein beliebiger dieser Radien mit einem festen bildet. D. h. die geodätischen Linien durch A und die geodätischen Kreise sollen als Koordinatenlinien betrachtet werden. Dieses Netz erfüllt nur in A selbst nicht die im § 9 festgesetzten Bedingungen; im übrigen geht durch jeden Punkt des Flächenstückes, auch in beliebiger Nähe von A, eine geodätische Linie $v =$ const. und ein geodätischer Kreis $u =$ const. hindurch. Die Bedingung dafür, daß die Linien $v =$ const. geodätisch sind, daß nämlich die Differentialgleichung S. 279 (13) oder (14) durch $dv = 0$ erfüllt wird, ist

(1) $$J_2 = 0$$

oder

(2) $$E\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right) - \frac{1}{2} F \frac{\partial E}{\partial u} = 0.$$

Bedeutet ferner ds' das Bogenelement der ersten Koordinatenlinie, ist also

$$ds'^2 = E du^2,$$

so folgt, da u selbst die Bogenlänge der geodätischen Linie bezeichnete, ds' also gleich du sein muß,

(3) $$E = 1.$$

Die Einführung dieses Wertes in (2) liefert

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0, \tag{4}$$

d. h. F ist von u nicht abhängig. Gelingt es demnach, F für irgendeine besondere Annahme über u zu bestimmen, so gilt der ermittelte Wert, der Funktion von v sein kann, allgemein. Wir nehmen u unendlichklein an; der geodätische Kreis $u =$ const. geht dann in einen ebenen Kreis über, und AB, AB', ... können als geradlinig, nämlich als die Radien des Kreises betrachtet werden. Auf der Peripherie dieses, und damit jedes geodätischen Kreises stehen mithin die geodätischen Linien senkrecht; der Wert von F ist auch von v unabhängig, nämlich gleich Null.

Die eben definierten Größen u, v heißen geodätische Polarkoordinaten.

Man kann den bewiesenen Satz als Grenzfall eines anderen auffassen, dessen Voraussetzungen folgende sind. Es sei auf der Fläche eine beliebige Kurve angenommen, deren Punkte eindeutig durch eine Variable v bestimmt sind. Durch einen Punkt A der Kurve sei eine geodätische Linie gezogen, deren Tangente auf der Kurventangente senkrecht steht. Eine solche Linie soll geodätische Normale der Kurve heißen. Sie ist durch den Wert v definiert, der dem Punkte A zugehört. Denkt man sich die ganze Schar geodätischer Normalen längs der angenommenen Kurve konstruiert und auf ihnen allen von der Kurve aus nach einer bestimmten Seite gleiche Bogen u abgetragen, so bilden die Endpunkte eine neue Kurve, $u = C$. Durch Variation von C innerhalb eines Intervalles entsteht eine Schar solcher Linien, die sich nirgends schneiden und daher geodätische Parallelkurven genannt werden sollen. Stellt man jetzt die Bedingung dafür auf, daß die Kurven $v =$ const. geodätisch sind, so ergibt dieselbe Rechnung wie vorher, in der nur v eine andere geometrische Bedeutung hat, daß F für alle u denselben Wert haben muß. Nun ist für $u = 0$ und für alle Werte von v

$$F = 0,$$

da die ursprüngliche Kurve, die für $C = 0$ zu der Schar $u = C$ gehört, auf den Linien $v =$ const. senkrecht ist. Demnach ist allgemein $F = 0$, d. h. die geodätischen Parallelkurven schneiden die geodätischen Normalen der Ausgangskurve unter rechten Winkeln. Die Parameter u, v, die sich auf dieses Kurvennetz gründen, werden als geodätische Parallelkoordinaten bezeichnet.

Läßt man in dem zweiten Satze die gegebene Kurve in einen Punkt ausarten, so erhält man den zuerst bewiesenen wieder.

Die Bedingungen

$$E = 1, \qquad F = 0, \tag{5}$$

mit denen wir es in beiden Fällen zu tun gehabt haben und die

$$ds^2 = du^2 + G dv^2 \tag{6}$$

liefern, führen, wie unmittelbar ersichtlich, zu einer Schar geodätischer Koordinatenlinien und der Schar ihrer orthogonalen Trajektorien zurück. Sieht man aber davon ab, daß der Parameter u gerade die Bogenlänge der geodätischen Linien bedeuten soll, so erkennt man durch Zusammenstellung von $F = 0$ mit (2), daß für ein solches Netz orthogonal-geodätischer Koordinatenlinien schon die Annahmen

$$F = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial v} = 0, \tag{7}$$

d. h.

$$F = 0, \qquad E = \varphi(u)^2 \tag{8}$$

hinreichend sind. Setzt man $\varphi(u) du = du'$ und schreibt für u' wieder u, so erhält man die Bedingungen (5) wieder.

Im Falle geodätischer Polarkoordinaten läßt sich auch über die dritte Fundamentalgröße G noch etwas aussagen. Wird

$$\sqrt{G} = m \tag{9}$$

gesetzt, so hat die Bogenlänge eines geodätischen Kreises, gezählt von der ersten geodätischen Linie an, den Ausdruck

$$\int_0^v m\, dv$$

oder, wenn m für hinreichend kleine Werte von u nach steigenden Potenzen dieses Arguments entwickelt wird,

$$\int_0^v m_0\, dv + u \int_0^v m_0'\, dv + \cdots.$$

$m_0, m_0', \ldots$ sind die Werte, in die $m, \frac{\partial m}{\partial u}, \ldots$ für $u = 0$ übergehen. Mit unbegrenzt abnehmendem u zieht sich der geodätische Kreis mehr und mehr um den Pol A des Koordinatensystems zusammen, seine Bogenlänge muß unabhängig von der oberen Grenze v zu Null abnehmen. Demnach hat man $m_0 = 0$.

Für sehr kleine u ist, wie schon oben bemerkt, die Trajektorie der geodätischen Radienvektoren als ebener Kreis zu betrachten, seine Bogenlänge wird gleich uv. Dies zieht die Bedingung $m_0' = 1$ nach sich.

Zusammengefaßt: Unter Voraussetzung geodätischer Polarkoordinaten ist für $u = 0$

$$(10)\qquad m \equiv \sqrt{G} = 0, \qquad \frac{\partial m}{\partial u} \equiv \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 1.$$

§ 87.

Orthogonal-geodätische Koordinatenlinien.

Es ist auf S. 296 erwähnt worden, daß die orthogonalen Trajektorien einer Schar von geodätischen Linien im allgemeinen nicht selbst geodätisch sind. In der Tat kann dies nur dann der Fall sein, wenn bei passender Wahl der krummlinigen Koordinaten die drei Bedingungen

$$F = 0, \qquad J_2 = 0, \qquad J_1'' = 0$$

gleichzeitig gelten. Denn die dritte ist der Ausdruck dafür, daß auch $u = C$ ein partikuläres Integral der Differentialgleichung der geodätischen Linien darstellt. Die Bedingungen sind mit

$$F = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial u} = 0,$$

d. h.

$$F = 0, \qquad E = \varphi(u)^2, \qquad G = \psi(v)^2$$

gleichbedeutend, und es wird

$$ds^2 = \varphi(u)^2 du^2 + \psi(v)^2 dv^2$$

oder, bei Veränderung der Parameter in bekannter Weise,

$$ds^2 = du'^2 + dv'^2.$$

Dies ist das Quadrat des Linienelements einer Ebene. Demnach kann eine Fläche nur dann zwei aufeinander senkrechte Scharen geodätischer Linien enthalten, wenn sie auf die Ebene abwickelbar ist.

Führt man die Annahme $E = 1$, $F = 0$ in die Differentialgleichung der geodätischen Linien ein, so erhält man

$$(1)\quad \frac{\partial G}{\partial u} du^2 dv + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v} du dv^2 + \frac{1}{2} G \frac{\partial G}{\partial u} dv^3 + G(du d^2 v - dv d^2 u) = 0.$$

Diese Gleichung dient zur vollständigen Bestimmung der betrachteten Kurven, wenn eine spezielle Schar von ihnen nebst deren orthogonalen Trajektorien bekannt ist. Die Annahmen gelten z. B. für die Rotationsflächen, wenn die Linien $v = \text{const.}$ mit den Meridianen, $u = \text{const.}$ mit den Parallelkreisen zusammenfallen und u die Bogenlänge der Meridiankurve bedeutet (S. 102). Außerdem ist für diese Flächen

$$G = \psi(u)^2,$$

sodaß für u als unabhängige Variable die Gleichung (1) in

$$(2) \qquad \psi(u)\frac{d^2v}{du^2} + \psi(u)^2\psi'(u)\left(\frac{dv}{du}\right)^3 + 2\psi'(u)\frac{dv}{du} = 0$$

übergeht. Setzt man

$$\frac{dv}{du} = v',$$

so erhält man die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dv'}{du} + \psi(u)\psi'(u)v'^3 + 2\frac{\psi'(u)}{\psi(u)}v' = 0,$$

die durch die Substitution

$$v'^{-2} = w$$

in die lineare

$$(3) \qquad \frac{dw}{du} - 4\frac{\psi'(u)}{\psi(u)}w - 2\psi(u)\psi'(u) = 0$$

transformiert wird. Ihr Integral findet sich nach bekannter Methode:

$$w = A\psi(u)^4 - \psi(u)^2,$$

woraus durch Benutzung der Transformationsgleichungen und nochmalige Integration

$$(4) \qquad v = \int\frac{du}{\psi(u)\sqrt{A\psi(u)^2 - 1}} + C'$$

folgt. Diese Gleichung kann nur der Form nach von der auf S. 289 unter (9) angegebenen verschieden sein und geht in der Tat in diese über, wenn

$$A = \frac{1}{C^2}$$

gesetzt und die Beziehung zwischen u und derjenigen Variablen berücksichtigt wird, die im § 31 ursprünglich mit u bezeichnet wurde.

Von den Vereinfachungen, die die allgemeinen Formeln der Flächentheorie für

$$E = 1, \qquad F = 0$$

erfahren, mögen nur folgende hervorgehoben werden. Die Werte der Christoffelschen Größen sind

$$(5) \qquad \begin{gathered} J_1 = J_2 = J_1' = 0 \\ J_2' = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}, \qquad J_1'' = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}, \qquad J_2'' = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial v}. \end{gathered}$$

Besonders brauchbar wird außerdem die aus der Gaußschen Relation

$$(6) \quad LN - M^2 = \frac{1}{4G}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 - 2G\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right] = -m\frac{\partial^2 m}{\partial u^2} = -\sqrt{G}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}$$

folgende Darstellung des Krümmungsmaßes:

(7) $$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}.$$

§ 88.

Abwickelbare Flächen.

Die letzte Formel kann man z. B. dazu benutzen, über die Flächen vom Krümmungsmaß Null etwas auszusagen. Für jede solche Fläche muß

(1) $$\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2} = 0$$

(2) $$\sqrt{G} = u\varphi(v) + \psi(v)$$

sein, wo $\varphi(v)$ und $\psi(v)$ willkürliche Funktionen ihres Arguments bedeuten. Für u und v als geodätische Parallelkoordinaten (S. 297) werde noch die besondere Annahme hinzugefügt, daß die Ausgangskurve der geodätischen Normalen selbst eine geodätische Linie ist. Analytisch aufgefaßt heißt das, $u = 0$ ist eine Partikularlösung der Differentialgleichung S. 299 (1). Die Bedingung

$$\left(G\frac{\partial G}{\partial u}\right)_{u=0} = 0$$

liefert im vorliegenden Falle

$$\varphi(v) = 0$$

oder

$$\psi(v) = 0.$$

Es ergibt sich also

$$ds^2 = du^2 + \psi(v)^2 dv^2$$

oder

$$ds^2 = du^2 + u^2\varphi(v)^2 dv^2.$$

Beide Formeln stellen wieder das Linienelement einer Ebene dar. Die Flächen vom Krümmungsmaß Null sind demnach auf die Ebene abwickelbar. Wenn keine Verwechselung vorkommen kann, so bezeichnet man eine Fläche dieser Art als abwickelbar ohne weiteren Zusatz.

Um alle abwickelbaren Flächen zu finden, hat man wegen

$$K = \frac{rt - s^2}{(p^2 + q^2 + 1)^2}$$

die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

(3) $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

allgemein zu integrieren. Das Zwischenintegral lautet

$$(4)\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \varphi\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

und das allgemeine wird durch die Gleichungen

$$(5)\qquad z = tx + \varphi(t)y + \psi(t)$$

$$(6)\qquad 0 = x + \varphi'(t)y + \psi'(t)$$

dargestellt, aus denen man sich den Parameter t eliminiert zu denken hat. Die zweite Gleichung ist die partielle Ableitung der ersten nach t. Für konstantes t stellt (5) eine Ebene dar, (5) und (6) zusammen die Schnittgerade dieser Ebene mit der, die zu dem Werte $t + dt$ des Parameters gehört. Die gesuchte Fläche ist der geometrische Ort aller dieser Geraden, die sogenannte Enveloppe der Schar von Ebenen

$$z - tx - \varphi(t)y - \psi(t) = 0$$

bei veränderlichem t.

Die Gleichungen (5, 6) sind auf Kosten der Symmetrie so angesetzt worden, daß sie nur gerade die für das allgemeine Integral von (3) nötige Anzahl von Funktionen enthalten. Schreibt man statt (5)

$$(7)\qquad Ax + By + Cz + D = 0,$$

wo A, B, C, D Funktionen von t sind, so tritt an die Stelle von (6)

$$(8)\qquad A'x + B'y + C'z + D' = 0.$$

Die Akzente kennzeichnen die Differentiation nach t.

Daß die Ebene in jeder ihrer Lagen die Enveloppe berührt, läßt sich aus (7) und (8) in folgender Weise ableiten. Es sei $F(x, y, z; t)$ die linke Seite von (7), und $\bar{F}(x, y, z)$ die Funktion, die gleich Null gesetzt die Enveloppe darstellt. $\bar{F}$ entsteht aus F durch Elimination von t mittels der Gleichung (8), deren linke Seite gleich $\frac{\partial F}{\partial t}$ ist. Die Gleichung der Tangentialebene der Enveloppe lautet

$$\sum \frac{\partial \bar{F}}{\partial x}(\mathfrak{x} - x) = 0,$$

und man hat

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}, \ldots .$$

Da aber t als Funktion von x, y, z durch die Gleichung $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ bestimmt ist, so wird

$$\frac{\partial \bar{F}}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} = A, \ldots ,$$

also die Tangentialebene

$$\sum A(\mathfrak{x} - x) = 0,$$

d. h. wegen (7):

$$A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + C\mathfrak{z} + D = 0.$$

Zu (7) und (8) werde noch die Gleichung

(9) $$A''x + B''y + C''z + D'' = 0$$

hinzugenommen, so definieren die drei Gleichungen zusammen, bei Ausschluß einer unmittelbar ersichtlichen Beziehung zwischen $A, \ldots C''$, eine Raumkurve. Behauptet wird, daß die Gerade (7, 8), also

(10) $$\begin{aligned} A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + C\mathfrak{z} + D &= 0 \\ A'\mathfrak{x} + B'\mathfrak{y} + C'\mathfrak{z} + D' &= 0, \end{aligned}$$

mit der Tangente der Kurve identisch ist. Man könnte dies durch Fortsetzung der eben angewendeten Schlußweise zeigen. Will man die Tangente direkt mittels ihrer Gleichungen

(11) $$\frac{\mathfrak{x} - x}{x'} = \frac{\mathfrak{y} - y}{y'} = \frac{\mathfrak{z} - z}{z'}$$

darstellen, so hat man die Verhältnisse der Differentialquotienten x', y', z' aus (7, 8, 9) zu berechnen. Die Differentiation von (7) liefert unter Berücksichtigung von (8)

(12) $$Ax' + By' + Cz' = 0,$$

und ebenso die Differentiation von (8) bei Hinzunahme von (9)

(13) $$A'x' + B'y' + C'z' = 0.$$

Diese beiden Beziehungen reichen schon aus. Werden x', y', z' aus ihnen und den Gleichungen (11) eliminiert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} A(\mathfrak{x} - x) + B(\mathfrak{y} - y) + C(\mathfrak{z} - z) &= 0 \\ A'(\mathfrak{x} - x) + B'(\mathfrak{y} - y) + C'(\mathfrak{z} - z) &= 0. \end{aligned}$$

Das sind aber wegen (7) und (8) die Gleichungen (10).

Die von den Geraden der Enveloppe berührte Kurve heißt die Rückkehrkante der Fläche.

Differentiiert man (12) weiter und zieht (13) hinzu, so findet man

(14) $$Ax'' + By'' + Cz'' = 0$$

und daraus in Verbindung mit (12):

$$A : B : C = y'z'' - z'y'' : z'x'' - x'z'' : x'y'' - y'x''.$$

Die Glieder rechts sind die Koeffizienten in der Gleichung der Schmiegungsebene, sodaß diese die Form

$$A(\mathfrak{x}-x)+B(\mathfrak{y}-y)+C(\mathfrak{z}-z)=0$$

annimmt. D. h. die Ebene (7)

$$A\mathfrak{x}+B\mathfrak{y}+C\mathfrak{z}+D=0$$

ist Schmiegungsebene der Rückkehrkante.

Daß eine beliebige Raumkurve als Rückkehrkante einer abwickelbaren Fläche betrachtet werden kann, ergibt sich unmittelbar. Der Ort der Tangenten läßt sich nämlich als Enveloppe der Schmiegungsebenen auffassen, und die Enveloppe jeder Ebenenschar führt auf die Gleichung (3) oder eine ihr äquivalente zurück.

Man kann auch direkt von der Darstellung der Tangentenfläche ausgehen. Sie wird durch die Gleichungen (11) gegeben, wenn darin x, y, z beliebige Funktionen eines Parameters sind, der jetzt v heißen möge. Berechnet man aus

$$(15)\qquad \begin{aligned}\mathfrak{x}&=x(v)+ux'(v)\\ \mathfrak{y}&=y(v)+uy'(v)\\ \mathfrak{z}&=z(v)+uz'(v)\end{aligned}$$

die Fundamentalgrößen erster Ordnung und setzt sie in den Ausdruck des Krümmungsmaßes ein, so fallen alle Glieder bis auf drei von vornherein weg, und diese geben zusammen den Wert Null.

Außer der Tangentenfläche hängen mit einer Raumkurve noch andere abwickelbare Flächen zusammen, von denen aber hier nur die rektifizierende Fläche, die Enveloppe der rektifizierenden Ebenen, erwähnt sei. Die Hauptnormale der Kurve ist Normale dieser Fläche, mithin die Kurve selbst eine geodätische Linie auf der Fläche. Nun reduziert sich für $ds^2=du^2+dv^2$ die Differentialgleichung der geodätischen Linien auf

$$du\,d^2v-dv\,d^2u=0,$$

und das allgemeine Integral dieser Gleichung,

$$au+bv+c=0,$$

stellt in der Ebene, auf die die Fläche abgewickelt wird, eine gerade Linie dar. Bei der Abwickelung der rektifizierenden Fläche auf die Ebene geht also die Raumkurve in eine gerade Linie über. Dies ist der Grund für die bereits auf S. 9 eingeführte Bezeichnung.

Die Theorie der rektifizierenden Fläche rechtfertigt auch die Bezeichnung „Allgemeine Frenetsche Formeln“. Betrachtet man nämlich

eine beliebige Raumkurve als ihrer rektifizierenden Fläche angehörig, sodaß

$$\sin\varphi = 0, \qquad g = 0$$

ist (vgl. S. 59—60), so wird

$$n = \varepsilon k, \qquad t = k'$$

$$X = \varepsilon a'', \quad A' = \varepsilon a',$$

und die Gleichungen (a, b, c) (S. 55) gehen in die gewöhnlichen Frenetschen Formeln (I, II, III) (S. 16) über.

Obwohl die Annahme $K = 0$, sowohl längs eines Flächenstückes wie auch in einzelnen Punkten, hier stets als ausgeschlossen betrachtet werden soll, so lange nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt wird (wie z. B. S. 108), so möge doch erwähnt werden, daß in jedem Punkte einer abwickelbaren Fläche die beiden Asymptotenlinien — wenn man diese Bezeichnung hier noch anwenden will — miteinander und mit der geradlinigen Erzeugenden der Fläche zusammenfallen. Die eine Krümmungslinie wird dann ebenfalls mit dieser Geraden identisch. Die Krümmungslinien der zweiten Schar sind, wie immer, die orthogonalen Trajektorien der ersten. Es sind also speziell für die Zylinderflächen ebene Kurven, deren Ebenen auf den Kanten senkrecht stehen, für die Kegelflächen die Schnittlinien mit einer Schar von Kugeln, deren gemeinsamer Mittelpunkt mit der Spitze zusammenfällt. Im besonderen liefern diese Resultate, auf Flächen zweiten Grades angewendet, eine Ergänzung des in den Paragraphen 64 und 66 Bewiesenen.

§ 89.

Über die allgemeine Bestimmung der geodätischen Parallelkurven und der geodätischen Linien.

Will man eine in beliebigen Parametern gegebene Fläche auf orthogonal-geodätische Koordinaten beziehen, so hat man ein partikuläres Integral einer bestimmten Differentialgleichung 2. Ordnung zu ermitteln und dann, behufs Darstellung der orthogonalen Trajektorien, noch eine Differentialgleichung 1. Ordnung zu integrieren. Wir untersuchen die Aufgabe genauer und stellen die Frage so: Welchen Bedingungen müssen zwei Funktionen $\varphi(u, v)$ und $\psi(u, v)$ genügen, damit die Kurven $\varphi(u, v) = \text{const.}$ und $\psi(u, v) = \text{const.}$ ein orthogonal-geodätisches Netz bilden? Und zwar sollen die geodätischen Linien durch $\psi = \text{const.}$, ihre orthogonalen Trajektorien durch $\varphi = \text{const.}$ dargestellt werden.

Setzt man

(1) $$\varphi(u, v) = u', \qquad \psi(u, v) = v',$$

so sind nach S. 298 (8) die Bedingungen dafür zu bilden, daß

(2) $$F' = 0,$$

E' eine Funktion von u' allein,

(3) $$E' = f_1(u')$$

wird.

Nun liefern die Formeln für die Transformation der krummlinigen Koordinaten (S. 42 (20)), wenn noch

(4) $$\frac{1}{f_1(u')} = f(u')$$

geschrieben wird:

$$\Delta^1 u' = f(u')$$

$$\Delta(u', v') = 0$$

$$\Delta^1 v' = \frac{1}{G'}.$$

Die erste dieser Gleichungen,

(5) $$\Delta^1 \varphi = f(\varphi),$$

stellt sich als partielle Differentialgleichung 1. Ordnung für die Funktion $\varphi(u, v)$ allein dar. Ist diese bekannt, so bestimmt die partielle Differentialgleichung

(6) $$\Delta(\varphi, \psi) = 0$$

die zweite Funktion. Endlich liefert dann die dritte Gleichung

(7) $$\Delta^1 \psi = \frac{1}{G'}$$

den Wert von G' und damit den vollständigen Ausdruck für das Quadrat des Linienelements,

(8) $$ds^2 = \frac{du'^2}{f(u')} + G' dv'^2.$$

Hierzu ist freilich zu bemerken, daß nach der Bedingung (3) in Verbindung mit (4) nur die Existenz, aber nicht der Ausdruck der Funktion f als bekannt gelten kann. Angenommen nun, f sei willkürlich gegeben, so kann man zu einer Einsicht in die Natur der durch (5) definierten Kurven $\varphi = \text{const.}$ auf folgende Weise gelangen. Man betrachte in der partiellen Differentialgleichung als Unbekannte an Stelle von φ eine noch zu bestimmende Funktion $g(\varphi)$. Vermöge der Eigenschaft

(9) $$\Delta^1 g(\varphi) = g'(\varphi)^2 \Delta^1 \varphi$$

des Differentialparameters 1. Ordnung geht die Gleichung (5) in

$$\Delta^1 g(\varphi) = g'(\varphi)^2 f(\varphi)$$

über. Wählt man also $g(\varphi)$ der Gleichung

$$g'(\varphi)^2 = \frac{1}{f(\varphi)}$$

gemäß, nämlich

$$g(\varphi) = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{f(\varphi)}},$$

so lautet die transformierte Differentialgleichung

$$\Delta^1 g(\varphi) = 1. \tag{10}$$

Es sei nun weiter $g(\varphi) = u'$, also $\Delta^1 u' = 1$. Nach S. 42 (20) ist diese Gleichung mit

$$G' = E'G' - F'^2$$

gleichbedeutend. Ist die andere Schar von Koordinatenlinien, $v' =$ const., zu $u' =$ const. senkrecht, also $F' = 0$, so folgt $E' = 1$. Diese beiden Bedingungen kennzeichnen aber das Kurvennetz als orthogonal-geodätisch, und u' als Bogenlänge der geodätischen Linien $v' = C$, gerechnet von einer bestimmten Trajektorie aus.

Hiernach kann die Bestimmung der orthogonalen Trajektorien einer Schar geodätischer Linien an die vereinfachte Gleichung

$$\Delta^1 \varphi = 1 \tag{11}$$

geknüpft werden. Kennt man eine Lösung, die eine nicht-additive willkürliche Konstante α enthält, so ist zur Aufsuchung der geodätischen Linien selbst keine weitere Integration erforderlich. Es sei nämlich

$$\varphi = \vartheta(u, v; \alpha)$$

diese Lösung, sodaß die Gleichung $\Delta^1 \vartheta = 1$, d. h.

$$G\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\frac{\partial \vartheta}{\partial v} + E\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)^2 = EG - F^2,$$

identisch besteht. Differentiiert man sie nach α, so findet man

$$G\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\,\partial \alpha} - F\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v\,\partial \alpha} + \frac{\partial \vartheta}{\partial v}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\,\partial \alpha}\right) + E\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v\,\partial \alpha} = 0.$$

In der Form

$$\left(G\frac{\partial \vartheta}{\partial u} - F\frac{\partial \vartheta}{\partial v}\right)\frac{\partial \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}}{\partial u} + \left(E\frac{\partial \vartheta}{\partial v} - F\frac{\partial \vartheta}{\partial u}\right)\frac{\partial \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}}{\partial v} = 0$$

geschrieben besagt dies Ergebnis, daß $\psi = \frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha}$ eine Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta(\vartheta, \psi) = 0$$

ist. Die Gleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \alpha} = C \tag{12}$$

mit den beiden willkürlichen Konstanten α und C stellt also die geodätischen Linien dar.

§ 90.

Zwei Scharen geodätischer Parallelkurven als Koordinatenlinien. Geodätische Ellipsen und Hyperbeln.

Es seien jetzt die beiden Scharen der neuen Koordinatenlinien orthogonale Trajektorien von Scharen geodätischer Linien, und ihre Parameter u', v' von vornherein den vereinfachten Gleichungen

$$\Delta^1 u' = 1, \qquad \Delta^1 v' = 1 \tag{1}$$

gemäß gewählt. u' und v' sind dann allgemein die geodätischen Abstände eines Flächenpunktes von zwei willkürlich angenommenen Flächenkurven. Die Bedingungen (1) lauten in den neuen Fundamentalgrößen:

$$E' = G' = E'G' - F'^2. \tag{2}$$

Aus ihnen folgt, wenn ϑ' den Koordinatenwinkel bezeichnet,

$$E' = E'^2(1 - \cos^2 \vartheta'), \qquad E' = \frac{1}{\sin^2 \vartheta'},$$

$$F' \equiv E' \cos \vartheta' = \frac{\cos \vartheta'}{\sin^2 \vartheta'}.$$

$$ds^2 = \frac{1}{\sin^2 \vartheta'}(du'^2 + 2 \cos \vartheta' du' dv' + dv'^2). \tag{3}$$

Um eine bestimmte Umwandlung des Linienelements als möglich nachzuweisen, braucht man nicht immer die Transformationsgleichungen in ihrer Allgemeinheit, sondern kann häufig einfacher schließen. Im vorliegenden Falle seien $v_1 =$ const. die geodätischen Linien, zu denen die Kurven $u' =$ const. der Voraussetzung nach orthogonal sind, so muß sich setzen lassen

$$ds^2 = du'^2 + G_1 dv_1^2.$$

Andererseits ist

$$ds^2 = E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2.$$

Hiernach wird

$$E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2 - du'^2$$

das Quadrat einer linearen Differentialform, $\sqrt{G_1}\,dv_1$, und es muß deshalb die Determinante

$$(E'-1)G'-F'^2$$

gleich Null sein. Ebenso seien $u_1 = \text{const.}$ die geodätischen Linien, die von den Kurven $v' = \text{const.}$ senkrecht geschnitten werden, so ist

$$ds^2 = E_1 du_1^2 + dv'^2.$$

Die Gleichung

$$E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2 - dv'^2 = (\sqrt{E_1}\,du_1)^2$$

liefert

$$E'(G'-1) - F'^2 = 0,$$

und beide Bedingungen zusammen geben die Gleichungen (2) wieder.

Es werde noch

(4) $$u' + v' = 2u, \qquad u' - v' = 2v$$

gesetzt, wo also u und v von den vorher so bezeichneten allgemeinen Parametern verschieden sind. Führt man

$$du' = du + dv, \qquad dv' = du - dv$$

in die Formel (3) ein, so ergibt sich

$$ds^2 = \frac{1}{\sin^2\vartheta'}(2du^2 + 2dv^2 + 2\cos\vartheta'(du^2 - dv^2))$$

$$= \frac{2}{\sin^2\vartheta'}\left(2\cos^2\frac{\vartheta'}{2}\cdot du^2 + 2\sin^2\frac{\vartheta'}{2}\cdot dv^2\right)$$

(5) $$ds^2 = \frac{du^2}{\sin^2\frac{\vartheta'}{2}} + \frac{dv^2}{\cos^2\frac{\vartheta'}{2}}.$$

Für die durch (4) definierten Parameter u, v ist also

(6) $$E = \frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta'}{2}}, \qquad F = 0, \qquad G = \frac{1}{\cos^2\frac{\vartheta'}{2}}$$

oder

(7) $$E + G - EG = 0, \qquad F = 0.$$

Die Gleichung $F = 0$ liefert folgenden anschaulichen, zuerst von Gilbert gefundenen Satz der Geometrie auf den Flächen:

Denkt man sich auf einer Fläche die beiden Scharen von Linien konstruiert, für deren Punkte die Summe und die Differenz der geodätischen Abstände von zwei beliebigen Flächenkurven konstant ist, so schneiden die beiden Scharen einander unter rechten Winkeln.

Speziellere Sätze erhält man, wenn man eine der beiden festen Kurven oder beide in Punkte ausarten läßt.

Es seien im besonderen auf einem dreiachsigen Ellipsoid zwei Kreispunkte K, K' als Ausgangspunkte geodätischer Linien angenommen. Behauptet wird, daß die Kurven, längs denen Summe und Differenz der geodätischen Abstände von K und K' konstante Werte haben, mit den Krümmungslinien zusammenfallen. Dieser Satz, dessen rein analytischer Beweis mit Hilfe elliptischer Integrale zu führen wäre, möge hier als Beispiel dafür dienen, wie man unter Umständen anschauliche Ergebnisse mittels der Anwendung des Unendlichkleinen in der Geometrie erzielen kann.

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehmen wir K und K' beide auf der positiven Seite der (xy)-Ebene an und betrachten eine der Krümmungslinien $v = \text{const.}$, in denen das Ellipsoid von den konfokalen einschaligen Hyperboloiden geschnitten wird. A und B, zwei benachbarte Punkte dieser Kurve, sind mit K und K' durch geodätische Linien verbunden (Fig. 16). Trägt man den Bogen KA auf KB bis A' ab, $K'B$ auf $K'A$ bis B' und verbindet A' mit A, B' mit B durch den Bogen je eines geodätischen Kreises, so sind in den unendlichkleinen Dreiecken ABA' und ABB' die Winkel bei A' und B' rechte, nach einem Satze des § 86. Nach dem im § 85 Bewiesenen sind aber in diesen Dreiecken noch zwei andere Winkel einander gleich. Es bildeten nämlich die beiden geodätischen Linien KA und $K'A$ im Punkte A gleiche Winkel mit der Krümmungslinie. Diese Winkel können, ohne daß ein Mißverständnis zu befürchten ist, in der Figur mit $K\hat{A}C$ und $K'\hat{A}B$ oder $B'\hat{A}B$ bezeichnet werden. Da ferner der geodätische Radiusvektor KB von KA unendlich wenig abweicht, so ist mit unbegrenzter Genauigkeit $K\hat{B}C = K\hat{A}C$. Daraus folgt dann $B'\hat{A}B = A'\hat{B}A$, die Dreiecke ABB' und ABA' sind kongruent, woraus

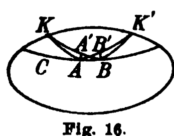


Fig. 16.

$$AB' = BA',$$

d. h.

$$K'A - K'B = KB - KA,$$
$$KA + K'A = KB + K'B$$

folgt. Die Summe der geodätischen Abstände eines Punktes der Krümmungslinien von K und K' bleibt beim Fortgange längs der Kurve ungeändert. Oder, nach der ersten auf S. 290 angegebenen mechanischen Bedeutung der geodätischen Linie: Befestigt man einen Faden mit seinen beiden Enden in zwei Kreispunkten des Ellipsoids und läßt dann einen Stift so auf der Fläche entlang gleiten, daß er den Faden gespannt erhält, so beschreibt der Stift eine Krümmungslinie.

Für die Krümmungslinien der zweiten Art erweist sich die Differenz der geodätischen Abstände ihrer Punkte von K und K' als konstant, wie es nach dem Gilbertschen Satze erwartet werden kann.

Bei unmittelbar verständlicher Definition können hiernach die Krümmungslinien des Ellipsoids als geodätische Ellipsen und Hyperbeln mit zwei Kreispunkten als Brennpunkten bezeichnet werden.

§ 91.

Totalkrümmung eines geodätischen Dreiecks.

Aus der allgemeinen Theorie der geodätischen Linien möge hier noch der Beweis eines von Gauß gegebenen Satzes folgen, der sich auf ein von drei solchen Kurven begrenztes Dreieck auf der Fläche bezieht. Für den Ausspruch des Satzes ist es nötig, die Definition des Begriffs der Totalkrümmung voranzuschicken, der mit dem des Krümmungsmaßes eng zusammenhängt, bisher aber nicht gebraucht worden ist.

Die Totalkrümmung eines Flächenstückes S wird durch den Inhalt des Stückes Σ auf der Einheitskugel gemessen, das jenem bei der Abbildung durch parallele Normalen entspricht. Aber die absolute Größe Σ soll nicht ohne weiteres der Totalkrümmung gleich sein, sondern erst nach Hinzufügung eines bestimmten Vorzeichens.

Im § 35 ist das Krümmungsmaß k dem Quotienten der beiden unendlichkleinen Dreiecke $d\Sigma$ und dS gleichgesetzt worden, versehen mit dem positiven oder negativen Zeichen, je nachdem die Dreiecke in ähnlicher Lage sind oder nicht (S. 115). Nachdem k gleich dem Produkt K der Hauptkrümmungen gefunden ist, gilt also die Formel

$$K = \varepsilon \frac{d\Sigma}{dS}. \tag{1}$$

Für ein Flächenstück Σ von endlicher Ausdehnung folgt daraus:

$$\Sigma = \int \varepsilon K dS. \tag{2}$$

Es versteht sich von selbst, daß das Integral eigentlich als Doppelintegral zu schreiben ist, und daß die Grenzen in bestimmter Weise angeordnet werden müssen, damit $\Sigma > 0$ wird. Die Totalkrümmung soll nun durch die Gleichung

$$\mathfrak{K} = \varepsilon \Sigma \tag{3}$$

erklärt sein, wo ε dasselbe Zeichen ist wie vorher, also, wie man

sagen kann, gleich + 1 oder − 1, je nachdem das Krümmungsmaß positiv oder negativ ist. Aus (2) und (3) ergibt sich

$$\mathfrak{K} = \int K\,dS. \tag{4}$$

Ist K für einen Teil von S positiv, für einen anderen negativ, so hat man in bekannter Weise zunächst eine Zerlegung vorzunehmen.

Da der analytische Ausdruck von K bekannt ist, so kommt es zur Berechnung von $\mathfrak{K}$ noch darauf an, das Flächenelement dS zu bilden, was auch für das Komplanations-Problem wichtig ist. Das unendlichkleine Dreieck auf der Fläche, von dem eben wieder die Rede gewesen ist, kann mit unbegrenzter Genauigkeit als Hälfte eines Vierecks aufgefaßt werden, das von zwei Paaren benachbarter Kurven des Koordinatennetzes eingeschlossen wird. Betrachtet man jetzt dieses Viereck selbst als Flächenelement, so wird

$$dS = ds'.\,ds''.\sin\vartheta. \tag{5}$$

Dabei ist

$$\sin\vartheta = \frac{T}{\sqrt{EG}}.$$

Wird ferner die Bezeichnung so gewählt, daß längs der beiden im Punkte $A \equiv (uv)$ zusammenlaufenden Seiten von A aus in positivem Sinne fortgeschritten wird, so hat man

$$ds' = \sqrt{E}\,du, \qquad ds'' = \sqrt{G}\,dv,$$

also

$$dS = T\,du\,dv. \tag{6}$$

Hiernach lautet die Komplanations-Formel in beliebigen Koordinaten:

$$S = \int\int \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv. \tag{7}$$

Für $u = x$, $v = y$ geht sie in die aus den Elementen der Integralrechnung bekannte

$$S = \int\int \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\; dx\,dy \tag{8}$$

über.

Die Totalkrümmung wird durch die Formel

$$\mathfrak{K} = \int\int K \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv \tag{9}$$

bestimmt. Dieser analytische Ausdruck und seine geometrische Bedeutung sind, abgesehen von dem Namen Totalkrümmung, von Rodrigues gegeben worden.

Es soll nun die Totalkrümmung eines geodätischen Dreiecks, d. h. eines von drei geodätischen Linien begrenzten Flächenstückes ermittelt werden.

Der eine Eckpunkt A sei Anfangspunkt eines Systems geodätischer Polarkoordinaten (Fig. 17). Werden die Winkel von der Seite AB aus gezählt, so heißt das, diese geodätische Linie hat die Gleichung $v = 0$. Für α als Dreieckswinkel bei A ist die Gleichung der Linie AC

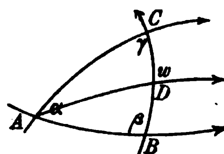


Fig. 17.

$$v = \alpha.$$

Für orthogonal-geodätische Koordinaten ist ferner

$$E = 1, \qquad F = 0, \qquad T = \sqrt{G},$$

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2},$$

also

$$\mathfrak{K} = -\iint \frac{\partial^2 m}{\partial u^2}\, du\, dv.$$

Das Integrationsgebiet kann durch die Überlegung bestimmt werden, daß man alle Punkte des geodätischen Dreiecks erhält, wenn man einen beliebigen geodätischen Radiusvektor AD durchläuft und diesen alle Lagen zwischen AB und AC annehmen läßt. $AD \equiv u$ ist dabei eine Funktion von v, die von der Art des Verlaufes der Dreiecksseite BC abhängt. Hiernach ist, genauer geschrieben:

(10) $$\mathfrak{K} = -\int_0^\alpha dv \int_0^u \frac{\partial^2 m}{\partial u^2}\, du.$$

Die Ausführung der ersten Integration liefert

$$\int_0^u \frac{\partial^2 m}{\partial u^2}\, du = \frac{\partial m}{\partial u} - \left(\frac{\partial m}{\partial u}\right)_{u=0}.$$

Nun war aber für geodätische Polarkoordinaten

$$\left(\frac{\partial m}{\partial u}\right)_{u=0} = 1$$

(S. 299), sodaß

$$\mathfrak{K} = \int_0^\alpha \left(1 - \frac{\partial m}{\partial u}\right) dv$$

wird. Statt $\frac{\partial m}{\partial u}$, das eine von der Lage des Punktes D abhängige Funktion von v ist, kann der Winkel eingeführt werden, den die

geodätische Linie BC in diesem Punkte mit der positiven Koordinatenlinie $v =$ const. bildet. Es war (S. 282 (8))

$$Edw = -T(J_2 du + J_2' dv),$$

d. h. hier, nach S. 300 (5),

$$dw = -\frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial u} dv = -\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} dv, \tag{11}$$

$$\left(1 - \frac{\partial m}{\partial u}\right) dv = dv + dw.$$

Geht nun v von 0 bis α, so durchläuft D die Dreiecksseite BC in der Richtung von B nach C. Die positive Richtung der drei in der Figur vorkommenden Linien $v =$ const. geht von A nach B, D und C. Demnach sind die Grenzen für w gleich $\pi - \beta$ und γ, und es ergibt sich

$$\mathfrak{K} = \int_0^\alpha dv + \int_{\pi-\beta}^\gamma dw,$$

$$\mathfrak{K} = \alpha + \beta + \gamma - \pi. \tag{12}$$

Hieraus folgt noch

$$\Sigma = \varepsilon(\alpha + \beta + \gamma - \pi). \tag{13}$$

Ist der Radius der Bildkugel nicht gleich Eins, sondern gleich a, so tritt in dieser Formel rechts a^2 als Faktor hinzu, und die Gesamtoberfläche der Kugel ist dann gleich $4a^2\pi$. Also: Der Inhalt des Dreiecks auf der Kugel, das bei der Abbildung durch parallele Normalen einem beliebigen geodätischen Dreieck auf einer positiv oder negativ gekrümmten Fläche entspricht, verhält sich zu der Oberfläche der Kugel, wie der Exzess oder Defekt der Winkelsumme des geodätischen Dreiecks zu 4π.

Gauß selbst nennt diesen Satz ein theorema elegantissimum.

§ 92.

Geodätischer Kontingenzwinkel, geodätische Krümmung.

Im § 78 sind zwei sachlich übereinstimmende charakteristische Eigenschaften der geodätischen Linien angegeben worden: 1. die Schmiegungsebene einer geodätischen Linie enthält die Flächennormale; 2. die Tangentialkrümmung einer solchen Kurve ist gleich Null. Setzt man diesen Begriff nicht voraus, so kann man umgekehrt die Tangentialkrümmung einer Flächenkurve mit Hilfe der Theorie

der geodätischen Linien erklären, und zwar in einer Art, die der Definition der Krümmung einer beliebigen Kurve mittels des Kontingenzwinkels (§ 4) genau entspricht.

Wir denken uns in zwei benachbarten Punkten einer Flächenkurve die sie berührenden geodätischen Linien konstruiert. Der unendlichkleine Winkel, den diese Linien mit einander bilden, heißt der **geodätische Kontingenzwinkel** der gegebenen Kurve, der Quotient aus diesem Winkel und dem Bogenelement die **geodätische Krümmung**. Es soll bewiesen werden, daß die geodätische Krümmung mit der Tangentialkrümmung übereinstimmt.

Offenbar genügt es, diesen Nachweis für eine Koordinatenlinie zu führen. Denn solange das Koordinatennetz beliebig bleibt, kann man immer annehmen, daß die gegebene Kurve einer der beiden Scharen des Netzes angehört. Nach einer schon wiederholt gemachten Bemerkung verzichtet man dabei freilich auf die gleichzeitige Ermittelung des allgemeinen Bildungsgesetzes für die auftretende flächentheoretische Größe.

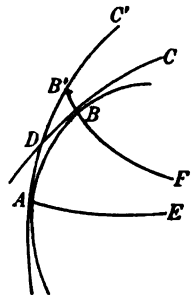


Fig. 18.

Die gegebene Kurve sei eine der Linien $u = \text{const.}$ (Fig. 18). A und B sind zwei benachbarte Kurvenpunkte, AC' und BC die beiden durch sie gehenden geodätischen Tangenten, D deren Schnittpunkt, also $C'\hat{D}C$ der geodätische Kontingenzwinkel. AE und BF bedeuten die beiden durch A und B gehenden Linien $v = \text{const.}$, B' den Schnittpunkt von BF mit AC'.

Das Zeichen d kennzeichne hier nicht, wie gewöhnlich, den Übergang von A nach B (in positiver Richtung), sondern im Sinne des § 79 den Fortgang längs der geodätischen Linie AC'. Dann ist

$$C'\hat{A}E = w, \qquad C'\hat{B}'F = w + dw,$$

und es werde noch

$$C\hat{B}F = w + \delta w$$

gesetzt. Für den geodätischen Kontingenzwinkel dw' ergibt sich dann bis auf Größen, die gegen die vorkommenden Differentiale unendlichklein sind,

(1) $$dw' = dw - \delta w.$$

Läßt man diese Formel unter allen Voraussetzungen gelten, so sieht man, daß dw' auch negative Werte haben kann. Denn würde man z. B. in der Figur die u-Linien nach der Seite positiv nehmen, nach welcher die gegebene Kurve konvex ist, so würde $\delta w > dw$ werden.

Es sei nun

$$\frac{dw - \delta w}{\delta s} = g \tag{2}$$

die Definitionsgleichung für die geodätische Krümmung der gegebenen Kurve im Punkte A. Wegen der Annahme $F = 0$ ist $w = \frac{\pi}{2}$, $w + \delta w = \frac{\pi}{2}$, also $g = \frac{dw}{\delta s}$, ferner nach S. 281 (5, 7)

$$\sqrt{EG}\,dw = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}du - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}dv$$

$$\operatorname{ctg} w = \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{du}{dv}.$$

Für die Linie $u =$ const. ist noch $\delta s = \sqrt{G}dv$, mithin

$$g_u = \frac{1}{2G\sqrt{E}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\frac{du}{dv} - \frac{\partial G}{\partial u}\right)$$

$$= \frac{1}{2G\sqrt{E}}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\sqrt{\frac{G}{E}}\operatorname{ctg} w - \frac{\partial G}{\partial u}\right).$$

d. h.

$$g_u = -\frac{1}{2G\sqrt{E}}\frac{\partial G}{\partial u}, \tag{3}$$

mit dem Ausdruck der Tangentialkrümmung nach S. 140 (11) übereinstimmend.

Für die Geometrie auf den Flächen ist diese Definition der geodätischen Krümmung von wesentlicher Bedeutung. Denn nachdem die geodätischen Linien einmal in unmittelbarem Anschluß an die Theorie der kürzesten Linien erklärt sind, erfordert sie nicht mehr, wie es ursprünglich bei der Tangentialkrümmung der Fall war, ein Heraustreten aus der Fläche durch Benutzung der Normale.

§ 93.

Der Differentialparameter zweiter Ordnung.

Um aus einem so speziellen Ausdruck wie (3) ein allgemeines Bildungsgesetz herzuleiten, hat man in den meisten Fällen umfangreiche und im voraus schwer zu überblickende Transformationen auszuführen. Im vorliegenden Falle wird man versuchen, die Koordinatenverwandlung zu benutzen, da die Formel mittels besonderer Annahmen über das Koordinatensystem gefunden worden ist. Die Theorie der Tangentialkrümmung soll dabei ebensowenig wie vorher hinzugezogen werden.

Die letzthin schon mehrmals benutzten Transformationsgleichungen lauteten

$$(1)\quad \frac{G'}{E'G'-F'^2}=\Delta^1\varphi,\quad \frac{-F'}{E'G'-F'^2}=\Delta(\varphi,\psi),\quad \frac{E'}{E'G'-F'^2}=\Delta^1\psi.$$

Hier ist $\varphi(u,v)=u'$, $\psi(u,v)=v'$ und nach der Voraussetzung im vorigen Paragraphen $F'=0$. Die Grundlage der Untersuchung bilden mithin die Gleichungen

$$(2)\qquad \Delta^1\varphi=\frac{1}{E'},\qquad \Delta(\varphi,\psi)=0,\qquad \Delta^1\psi=\frac{1}{G'}$$

zusammen mit

$$(3)\qquad g_{u'}=-\frac{1}{2G'\sqrt{E'}}\frac{\partial G'}{\partial u'}.$$

Als bekannt gelten die Fundamentalgrößen E, F, G, die in den Differentialparametern als Koeffizienten vorkommen, sowie die Funktion φ nebst ihren Ableitungen, dagegen nicht die Funktion ψ, deren Bestimmung vielmehr die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung erfordern würde. Das Ziel ist, $g_{u'}\equiv g_\varphi$ durch E, F, G und die Ableitungen von φ darzustellen.

Von den drei Größen E', G' und $\frac{\partial G'}{\partial u'}$ erscheint nur die erste,

$$E'=\frac{1}{\Delta^1\varphi},$$

unmittelbar in der verlangten Form. Schon G' selbst ist dagegen noch von ψ abhängig. Um die Ableitung $\frac{\partial G'}{\partial u'}$ auszudrücken, hätte man zu bilden

$$(4)\qquad \frac{\partial G'}{\partial u'}=\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\Delta^1\psi}\cdot\frac{\partial u}{\partial u'}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\Delta^1\psi}\cdot\frac{\partial v}{\partial u'}$$

und die Umkehrungsformeln (S. 40 (12)) zu benutzen. Nach Einführung der drei Ausdrücke in die Gleichung (3) hat man noch die Ableitungen von ψ, die bis zur zweiten Ordnung vorkommen, herauszuschaffen. Wie unübersichtlich diese Rechnung werden würde, falls man sie ohne weiteres nach den Vorschriften der gewöhnlichen Eliminationstheorie in Angriff nehmen wollte, lehren schon die ersten Schritte. Wenn man sich dann also auch von der Möglichkeit überzeugt hätte, mittels einer endlichen bestimmten Anzahl wohldefinierter Operationen zum Ziel zu kommen, so würde man doch sicher sein können, für die gesuchte Größe einen sehr verwickelten Ausdruck zu erhalten. Mit einer solchen Lösung einer flächentheoretischen Aufgabe darf man sich niemals zufrieden geben; vielmehr ist in die Auf-

gabe stets von vornherein die Forderung aufzunehmen, daß das Bildungsgesetz der Schlußformeln sich in einfacher Weise beschreiben lasse.

Die anzustellende Rechnung würde noch umständlicher werden, wenn man ihr die Transformationsgleichungen in der ersten Gestalt (S. 39 (8)) zugrunde legen wollte. Die Gleichungen (1) haben wenigstens den Vorzug, daß ihre rechten Seiten in dem früher (§ 43) besprochenen Sinne vom Koordinatensystem unabhängig sind. Gelänge es, auch die zweiten Ableitungen einer willkürlichen Funktion zu derartigen Verbindungen, also zu Biegungskovarianten (S. 151) zu gruppieren, so würde deren Einführung offenbar für unseren Zweck von großem Nutzen sein.

Zwei solche Ausdrücke lassen sich nun sofort angeben, $\Delta^1 \Delta^1 \varphi$ und $\Delta(\varphi, \Delta^1 \varphi)$. Ferner ist im Anschluß an die Christoffelsche Kovariante eine Größe dieser Art hergestellt worden (S. 170 (12)), und zwar ebenfalls zum Zweck einer übersichtlichen Darstellung von g_φ. Die Benutzung jener Größe an dieser Stelle würde also nur auf eine Verifikation der Formel S. 171 (15) hinauskommen. Aber auch ohne die Christoffelsche Kovarianz kann man einen Ausdruck der in Rede stehenden Art aus den zweiten Ableitungen finden, dessen Anwendungsgebiet in der Flächentheorie sehr groß ist: den Beltramischen Differentialparameter zweiter Ordnung.

Seine Existenz und sein Wert kann aus einer im § 51 gemachten Bemerkung geschlossen werden. Wenn die Gleichung

$$\mathfrak{P}_0 = p_1 du + p_2 dv = p_1' du' + p_2' dv' \tag{5}$$

stattfindet, so ist nach Formel (17) dieses Paragraphen (S. 191)

$$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial p_2}{\partial u} - \frac{\partial p_1}{\partial v}\right) = \frac{1}{T'}\left(\frac{\partial p_2'}{\partial u'} - \frac{\partial p_1'}{\partial v'}\right). \tag{6}$$

Eine lineare Differentialform $\mathfrak{P}_0$, deren Koeffizienten die ersten Ableitungen von φ enthalten, hängt aber unmittelbar mit der Theorie der orthogonalen Trajektorien der Schar $\varphi = \text{const.}$ zusammen. Wegen der Homogeneität des Zwischenparameters in Bezug auf die Ableitungen von ψ erfordert, wie schon auf S. 250 bemerkt worden ist, die Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta(\varphi, \psi) = 0$$

allein die der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\left(E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) du + \left(F\frac{\partial \varphi}{\partial v} - G\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) dv = 0.$$

Die linke Seite der letzteren geht nach Division mit T bei einer be-

liebigen Transformation der krummlinigen Koordinaten in den formal gleichgebildeten Ausdruck über (S. 150 (22)). Nimmt man demnach

$$p_1 = \frac{1}{T}\left(F\frac{\partial\varphi}{\partial u} - E\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right), \qquad p_2 = \frac{1}{T}\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)$$

und setzt bleibend

$$(7) \qquad \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right) = \Delta^2\varphi,$$

so gilt die Gleichung

$$(8) \qquad \Delta^2\varphi = \Delta^2\overline{\varphi}.$$

$\Delta^2\varphi$ ist der Differentialparameter zweiter Ordnung von φ.

Sein Ausdruck kann in mannigfacher Weise umgestaltet werden. Führt man zuerst die Differentiationen aus, so wird

$$(9) \qquad \begin{aligned} \Delta^2\varphi &= \frac{1}{T^2}\left(G\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - 2F\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} + E\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2}\right) \\ &+ \frac{1}{T}\left(\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{G}{T} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{F}{T}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{E}{T} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{F}{T}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right). \end{aligned}$$

Hiernach hat der Koeffizient von $\frac{\partial\varphi}{\partial u_k}$ die Form

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial\frac{a_{ii}}{\sqrt{a}}}{\partial u_k} - \frac{\partial\frac{a_{ik}}{\sqrt{a}}}{\partial u_i}\right) =$$

$$\frac{1}{a}\left(\frac{\partial a_{ii}}{\partial u_k} - a_{ii}\frac{\partial\log\sqrt{a}}{\partial u_k} - \frac{\partial a_{ik}}{\partial u_i} + a_{ik}\frac{\partial\log\sqrt{a}}{\partial u_i}\right) \qquad (k \gtrless i).$$

Will man die Ableitungen durch die Christoffelschen Größen ersetzen, so hat man sich der Formeln § 50 (11, 21) zu bedienen:

$$\frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l} = \sum_{\varrho}\left(a_{\varrho i}\begin{Bmatrix}k\ l\\ \varrho\end{Bmatrix} + a_{\varrho k}\begin{Bmatrix}i\ l\\ \varrho\end{Bmatrix}\right)$$

$$\frac{\partial\log\sqrt{a}}{\partial u_l} = \sum_{\varrho}\begin{Bmatrix}\varrho\ l\\ \varrho\end{Bmatrix}.$$

Sie liefern

$$(10) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial\frac{a_{22}}{\sqrt{a}}}{\partial u_1} - \frac{\partial\frac{a_{12}}{\sqrt{a}}}{\partial u_2}\right) &= -\frac{1}{a}\left(a_{22}\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 1\end{Bmatrix} - 2a_{12}\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix} + a_{11}\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 1\end{Bmatrix}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial\frac{a_{11}}{\sqrt{a}}}{\partial u_2} - \frac{\partial\frac{a_{12}}{\sqrt{a}}}{\partial u_1}\right) &= -\frac{1}{a}\left(a_{22}\begin{Bmatrix}1\ 1\\ 2\end{Bmatrix} - 2a_{12}\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix} + a_{11}\begin{Bmatrix}2\ 2\\ 2\end{Bmatrix}\right). \end{aligned}$$

oder, wenn man die gewöhnlichen Bezeichnungen für die Fundamentalgrößen wieder einführt und demnach auch für die Christoffelschen Verbindungen die Zeichen $J_1, \ldots J_2''$ (S. 137) schreibt:

$$(11)\quad \begin{aligned} \frac{1}{T}\left(\frac{\partial \frac{G}{T}}{\partial u} - \frac{\partial \frac{F}{T}}{\partial v}\right) &= -\frac{1}{T^2}(GJ_1 - 2FJ_1' + EJ_1'') \\ \frac{1}{T}\left(\frac{\partial \frac{E}{T}}{\partial v} - \frac{\partial \frac{F}{T}}{\partial u}\right) &= -\frac{1}{T^2}(GJ_2 - 2FJ_2' + EJ_2''). \end{aligned}$$

Beim Einsetzen in (9) treten die Größen

$$(12)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} - J_1\frac{\partial\varphi}{\partial u} - J_2\frac{\partial\varphi}{\partial v} &\equiv \varphi_{11} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\,\partial v} - J_1'\frac{\partial\varphi}{\partial u} - J_2'\frac{\partial\varphi}{\partial v} &\equiv \varphi_{12} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} - J_1''\frac{\partial\varphi}{\partial u} - J_2''\frac{\partial\varphi}{\partial v} &\equiv \varphi_{22} \end{aligned}$$

(S. 129), also die Koeffizienten der Christoffelschen Kovariante auf, und für den Differentialparameter zweiter Ordnung ergibt sich die Formel

$$(13)\quad \Delta^2\varphi = \frac{1}{T^2}(G\varphi_{11} - 2F\varphi_{12} + E\varphi_{22}),$$

die mit

$$(14)\quad \Delta^2\varphi = \sum_{i,k}\alpha_{ik}\varphi_{ik}$$

oder, nach S. 160 (3), mit

$$(15)\quad \Delta^2\varphi = H_a(\mathsf{A}, \Phi)$$

gleichbedeutend ist.

Die Gleichung (8) lautet ausgeschrieben

$$(16)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{T}\left(\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{T} + \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{T}\right) \\ =&\frac{1}{T'}\left(\frac{\partial}{\partial u'}\,\frac{G'\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u'} - F'\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial v'}}{T'} + \frac{\partial}{\partial v'}\,\frac{E'\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial v'} - F'\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u'}}{T'}\right). \end{aligned}$$

Für $\varphi = \overline{\varphi} = u'$ oder $= v'$ folgt daraus

$$(17)\quad \begin{aligned} \Delta^2 u' &= \frac{1}{T'}\left(\frac{\partial}{\partial u'}\,\frac{G'}{T'} - \frac{\partial}{\partial v'}\,\frac{F'}{T'}\right), \\ \Delta^2 v' &= \frac{1}{T'}\left(\frac{\partial}{\partial v'}\,\frac{E'}{T'} - \frac{\partial}{\partial u'}\,\frac{F'}{T'}\right). \end{aligned}$$

Es mögen gleich an dieser Stelle einige spezielle Anwendungen des Differentialparameters zweiter Ordnung angeschlossen werden.

Für ein Netz isometrischer Kurven waren nach S. 266 (10) die Bedingungen

$$(18)\qquad F' = 0, \qquad \frac{\partial^2 \log \frac{E'}{G'}}{\partial u' \partial v'} = 0$$

notwendig und hinreichend. Nun ist für $F' = 0$ nach (17)

$$(19)\qquad \Delta^2 u' = \frac{1}{\sqrt{E'G'}} \frac{\partial \sqrt{\frac{G'}{E'}}}{\partial u'} = \frac{1}{2E'} \frac{\partial \log \frac{G'}{E'}}{\partial u'},$$

und nach S. 42 (20)

$$(20)\qquad \Delta^1 u' = \frac{1}{E'},$$

also

$$(21)\qquad \frac{\Delta^2 u'}{\Delta^1 u'} = \frac{1}{2} \frac{\partial \log \frac{G'}{E'}}{\partial u'}.$$

Die zweite Gleichung (18) wird demnach

$$\frac{\partial}{\partial v'} \frac{\Delta^2 u'}{\Delta^1 u'} = 0$$

und liefert integriert:

$$\frac{\Delta^2 u'}{\Delta^1 u'} = f(u').$$

Genau ebenso erhält man

$$\frac{\Delta^2 v'}{\Delta^1 v'} = g(v'),$$

d. h. die Parameter beider Scharen des isometrischen Netzes müssen einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form

$$(22)\qquad \frac{\Delta^2 \varphi}{\Delta^1 \varphi} = f(\varphi)$$

genügen. Daß auch umgekehrt jeder Lösung dieser Gleichung, bei beliebiger Wahl der Funktion f, eine isometrische Kurvenschar entspricht, ergibt sich unmittelbar. Denn setzt man $\varphi = u'$ und versteht unter $v' =$ const. die orthogonalen Trajektorien der Schar $u' =$ const., so kommt man auf die Bedingungen (18) zurück.

Für gegebenes f läßt sich die Gleichung (22) noch vereinfachen. Es sei $h(\varphi)$ eine willkürliche oder zu bestimmende Funktion von φ, so ist

$$(23)\qquad \Delta^1 h(\varphi) = h'(\varphi)^2 \Delta^1 \varphi$$

(S. 306 (9)) und

$$(24)\qquad \Delta^2 h(\varphi) = h'(\varphi) \Delta^2 \varphi + h''(\varphi) \Delta^1 \varphi.$$

Aus (22) wird

$$\Delta^2 h(\varphi) = \frac{h'(\varphi)f(\varphi) + h''(\varphi)}{h'(\varphi)^2}\Delta^1 h(\varphi).$$

Hierin werde nun über die Funktion $h(\varphi)$ der Bedingung

$$h'f + h'' = 0$$

gemäß verfügt; d. h. es werde

$$h(\varphi) = A\int e^{-\int f(\varphi)d\varphi} d\varphi + B \tag{25}$$

gesetzt, wo A und B willkürliche Konstanten bezeichnen und die Integrale als solche mit bestimmter unterer Grenze vorausgesetzt werden. Dann reduziert sich die partielle Differentialgleichung (22) auf

$$\Delta^2 h(\varphi) = 0, \tag{26}$$

und umgekehrt führt die Substitution (25) diese in jene über.

Von der Orthogonalschar kann leicht gezeigt werden, daß zu ihrer Darstellung nur Quadraturen nötig sind. Diese Darstellung hängt zunächst ab von der Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta(\varphi, \psi) = 0,$$

d. h. von der der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)du + \left(F\frac{\partial\varphi}{\partial v} - G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)dv = 0. \tag{27}$$

Bezeichnet nun $\frac{\mu}{T}$ einen integrierenden Faktor der letzteren, so gilt die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mu}{T}\left(F\frac{\partial\varphi}{\partial v} - G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mu}{T}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\right)$$

oder

$$\mu\Delta^2\varphi + \frac{1}{T^2}\left(\left(G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial\mu}{\partial u} + \left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial\mu}{\partial v}\right) = 0.$$

Hierin kann

$$\log\mu = g(\varphi)$$

genommen werden, denn dann ergibt sich

$$\Delta^2\varphi + g'(\varphi)\Delta^1\varphi = 0$$

oder wegen (22)

$$f(\varphi) + g'(\varphi) = 0,$$

und daraus läßt sich in der Tat $g(\varphi)$ bestimmen. Es ist

$$\frac{1}{T}e^{-\int f(\varphi)d\varphi}$$

ein integrierender Faktor der Differentialgleichung (27).

Eine zweite Anwendung betrifft die Berechnung von $\Delta^2 x$, $\Delta^2 y$, $\Delta^2 z$. Nach S. 126 (4) war

$$\frac{1}{T}\left(E\frac{\partial x}{\partial v} - F\frac{\partial x}{\partial u}\right) = Y\frac{\partial z}{\partial u} - Z\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{1}{T}\left(F\frac{\partial x}{\partial v} - G\frac{\partial x}{\partial u}\right) = Y\frac{\partial z}{\partial v} - Z\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Daraus folgt

$$\Delta^2 x = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}\right).$$

Mit Hilfe der Weingartenschen Gleichungen ergibt sich weiter

$$\Delta^2 x = -(\eta_{11} + \eta_{22})X,$$

worin nach S. 225 (16)

$$-(\eta_{11} + \eta_{22}) = H$$

ist. Die gesuchten Formeln lauten

$$\Delta^2 x = HX$$
(28) $$\Delta^2 y = HY$$
$$\Delta^2 z = HZ.$$

Sie sind für die durch

$$H = 0$$

charakterisierten Minimalflächen (vgl. S. 260) von Bedeutung. Die für die Koordinaten jeder solchen Fläche geltenden Gleichungen

(29) $$\Delta^2 x = 0, \qquad \Delta^2 y = 0, \qquad \Delta^2 z = 0$$

besagen nach dem Vorhergehenden, daß die Fläche durch irgendeine Schar paralleler Ebenen in isometrischen Kurven geschnitten wird.

§ 94.

Ausdruck der geodätischen Krümmung.

Wir nehmen die Umwandlung der Formel (3) des vorigen Paragraphen,

(1) $$g_{u'} = -\frac{1}{2G'\sqrt{E'}}\frac{\partial G'}{\partial u'},$$

wieder auf.

Die Ableitung $\frac{\partial G'}{\partial u'}$ kommt in dem Ausdruck (19),

(2) $$\Delta^2 u' = \frac{1}{2E'G'}\frac{\partial G'}{\partial u'} - \frac{1}{2E'^2}\frac{\partial E'}{\partial u'},$$

vor, und außerdem noch $\frac{\partial E'}{\partial u'}$, das man mit Hilfe einer anderen Kovariante darstellen kann. Es ist nämlich, immer für $F' = 0$:

$$\Delta(u', \Delta^1 u') = \frac{1}{E'} \frac{\partial \Delta^1 u'}{\partial u'} = \frac{1}{E'} \frac{\partial \frac{1}{E'}}{\partial u'},$$

(3) $$\Delta(u', \Delta^1 u') = -\frac{1}{E'^3} \frac{\partial E'}{\partial u'},$$

also weiter

$$\Delta^2 u' = \frac{1}{2E'G'} \frac{\partial G'}{\partial u'} + \frac{1}{2} E' \Delta(u', \Delta^1 u')$$

$$g_{u'} = \frac{1}{2} E' \sqrt{E'} \Delta(u', \Delta^1 u') - \sqrt{E'} \Delta^2 u'$$

(4) $$g_\varphi = \frac{\Delta(\varphi, \Delta^1 \varphi)}{2(\Delta^1 \varphi)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\Delta^2 \varphi}{(\Delta^1 \varphi)^{\frac{1}{2}}}.$$

Diese Kovarianten-Verbindung, aus welcher jede Beziehung zur Orthogonalschar $\psi = \text{const.}$ verschwunden ist, stellt den gesuchten Wert der geodätischen Krümmung für die gegebene Kurve dar. Da sie nur Biegungskovarianten enthält, so ergibt sich aufs neue der Satz (S. 171), daß die geodätische Krümmung bei der Biegung einer Fläche ungeändert bleibt.

Die Formel kann in mannigfacher Weise umgestaltet werden. Nimmt man z. B. in der Gleichung

(5) $$\Delta(\varphi, f(\chi)) = f'(\chi) \Delta(\varphi, \chi)$$

$$f(\chi) = \frac{1}{\sqrt{\chi}}, \qquad \chi = \Delta^1 \varphi,$$

so folgt

(6) $$\Delta(\varphi, \Delta^1 \varphi) = -2(\Delta^1 \varphi)^{\frac{3}{2}} \Delta\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}}\right)$$

und demnach

(7) $$g_\varphi = -\Delta\left(\varphi, \frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}}\right) - \frac{\Delta^2 \varphi}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}}.$$

Setzt man weiter hierin für die Differentialparameter ihre Werte ein, so erhält man

$$g_\varphi = -\frac{1}{T}\left[\frac{G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{T} \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}}}{\partial u} + \frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{T} \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}}}{\partial v}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}} \frac{\partial}{\partial u} \frac{G\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{T} + \frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}} \frac{\partial}{\partial v} \frac{E\frac{\partial \varphi}{\partial v} - F\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{T}\right]$$

oder

$$(8)\quad g_\varphi = -\frac{1}{T}\left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u}-F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2-2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial v}\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v}-F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2-2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}}\right].$$

Dieser Ausdruck ist schon im § 51 (S. 188) auf anderem Wege hergeleitet und dort als Integrabilitäts-Invariante gedeutet worden (S. 191). Er läßt erkennen, daß die orthogonalen Trajektorien einer Schar geodätischer Linien $\varphi =$ const. durch Quadraturen bestimmt werden können. Denn die Bedingung $g_\varphi = 0$ kann dahin ausgesprochen werden, daß der reziproke Wert von

$$\sqrt{G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2-2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}$$

für die Differentialgleichung

$$\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v}-F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)du+\left(F\frac{\partial\varphi}{\partial v}-G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)dv = 0$$

ein integrierender Faktor ist.

§ 95.

Kurven, die bei gegebener Länge ein möglichst großes Flächenstück begrenzen.

Die geodätischen Linien, also die Flächenkurven, deren geodätische Krümmung gleich Null ist, verdankten ihre Entstehung einer Aufgabe der Theorie der Maxima und Minima (§ 78). Auch zu den Linien konstanter geodätischer Krümmung überhaupt führt eine Aufgabe dieser Art, die folgendermaßen ausgesprochen werden kann. Zwischen zwei Punkten A und B einer Fläche sei eine Kurve gegeben; gesucht wird eine andere Kurve mit denselben Endpunkten und von vorgeschriebener Länge, die mit der ersten zusammen einen möglichst großen Flächeninhalt einschließt.

Wie im § 78 soll ohne Rücksicht auf Symmetrie die erste kartesische Koordinate in der Untersuchung bevorzugt werden. Wir betrachten die Projektionen der gesuchten und der gegebenen Kurve auf die (xy)-Ebene. Die erste heiße $A'C'B'$, die zweite $A'C_1B'$. Längs jener ist y eine zu bestimmende Funktion von x, $y = \varphi(x)$,

für diese sei $y = f(x)$, wo f eine gegebene Funktion. Die Fläche sei in der Form (III)

$$z = z(x, y)$$

gegeben, so hat der Flächeninhalt, der ein Maximum werden soll, den Ausdruck

$$\iint \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dx\, dy \equiv S$$

(S. 312 (8)). Das Integrationsgebiet wird von den beiden Kurven $A'C'B'$ und $A'C_1B'$ begrenzt. Die ersten Koordinaten der Endpunkte beider Linien auf der Fläche seien x_0 und x_1; dann kann man bei passender Zuordnung dieser Werte zu den Punkten A und B

$$(1) \qquad S = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\varphi(x)}^{f(x)} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dy$$

setzen. Die Länge der gesuchten Kurve ist, höchstens vom Vorzeichen abgesehen,

$$(2) \qquad s = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Nach der Voraussetzung gilt die Gleichung

$$(3) \qquad s = l,$$

für l als gegebene Konstante.

Verändert man die Kurve ACB, jedoch so, daß ihre Länge gleich l bleibt, so ändert sich im allgemeinen auch die Projektion $A'C'B'$, und y wird eine andere Funktion von x. Sie heiße $\varphi(x) + \eta(x)$. An Stelle von $\varphi(x)$ in (1) eingeführt, muß sie einen Wert S' liefern, der kleiner ist als S. Um die Differenz $S - S'$ darzustellen, bezeichnen wir das unbestimmte Integral $\int \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, dy$, als Funktion von y betrachtet, mit $J(y)$, und erhalten

$$S = \int_{x_0}^{x_1} (J(f) - J(\varphi))\, dx$$

$$S' = \int_{x_0}^{x_1} (J(f) - J(\varphi + \eta))\, dx$$

$$S - S' = \int_{x_0}^{x_1} (J(\varphi + \eta) - J(\varphi))\, dx.$$

Bei der Entwickelung nach Potenzen von η, welches beliebig klein angenommen werden kann, entsteht als Anfangsglied

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial J}{\partial \varphi} \eta\, dx \equiv \delta S,$$

und da

$$\frac{\partial J}{\partial y} = \sqrt{p^2 + q^2 + 1}$$

ist, so wird

(4)
$$\delta S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, \eta\, dx,$$

wo in der Wurzelgröße φ für y gesetzt zu denken ist. Dieser Ausdruck δS muß verschwinden, wenn S ein Maximum werden soll.

Hat jetzt s' dieselbe Bedeutung für s wie S' für S, und wird

$$z(x, \varphi + \eta) - z(x, \varphi) = \zeta$$

gesetzt, so ergibt sich

$$s' = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{d(y+\eta)}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d(z+\zeta)}{dx}\right)^2}\, dx,$$

und man erhält als Anfangsglied von $s' - s$ (vgl. S. 276—277)

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{dy}{ds}\frac{d\eta}{dx} + \frac{dz}{ds}\frac{d\zeta}{dx}\right) dx \equiv \delta s.$$

Die partielle Integration liefert

(5)
$$\delta s = \left[\eta \frac{dy}{ds} + \zeta \frac{dz}{ds}\right]_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \left(\eta \frac{d\frac{dy}{ds}}{dx} + \zeta \frac{d\frac{dz}{ds}}{dx}\right) dx,$$

wo der erste Teil verschwindet, weil η und damit auch ζ für $x = x_0$ und $x = x_1$ gleich Null ist. Allgemein erhält ζ, bei Abkürzung auf das Glied erster Ordnung, den Wert

$$\zeta = \frac{\partial z}{\partial y} \eta \equiv q\eta.$$

Da nun $s' - s = 0$ sein soll, so muß sicher auch δs verschwinden, und die Formel (5) liefert

(6)
$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\frac{d\frac{dy}{ds}}{dx} + q \frac{d\frac{dz}{ds}}{dx}\right) \eta\, dx = 0.$$

Das Ergebnis ist also, daß für alle Werte von η, die der Bedingung (6) genügen, die Gleichung $\delta S = 0$ oder

$$(7) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{p^2 + q^2 + 1}\, \eta\, dx = 0$$

stattfinden muß. Hiernach ist y zu bestimmen.

Es werde zur Abkürzung

$$(8) \qquad \begin{gathered} \sqrt{p^2 + q^2 + 1} = \alpha \\ \frac{d\frac{dy}{ds}}{dx} + q\frac{d\frac{dz}{ds}}{dx} = \beta, \end{gathered}$$

ferner

$$(9) \qquad \int_{x_0}^{x} \beta\eta\, dx = \omega(x)$$

gesetzt. Dann ist die Größe η nur der Bedingung zu unterwerfen, daß die aus ihr gebildete Funktion ω für $x = x_1$ verschwindet; im übrigen ist η, immer innerhalb gewisser Grenzen, ganz willkürlich. Setzt man aus (9)

$$\eta = \frac{\omega'(x)}{\beta}$$

in (7), nämlich

$$\int_{x_0}^{x_1} \alpha\eta\, dx = 0$$

ein, so folgt

$$\int_{x}^{x_1} \frac{\alpha}{\beta}\, \omega'(x)\, dx = 0,$$

d. h. bei nochmaliger Ausführung einer partiellen Integration und Benutzung der Gleichungen $\omega(x_0) = 0$, $\omega(x_1) = 0$:

$$(10) \qquad \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\frac{\alpha}{\beta}}{dx}\, \omega\, dx = 0.$$

Hierin ist ω eine willkürliche Funktion, die nur an die eben angegebenen Gleichungen gebunden ist. Daher wird schließlich

$$\frac{d\frac{\alpha}{\beta}}{dx} = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\beta}{\alpha} = \text{const.},$$

d. h.

$$(11) \qquad \frac{d\frac{dy}{ds} + q\frac{dz}{ds}}{dx\sqrt{p^2 + q^2 + 1}} = \text{const.}$$

Entwickelt man hier die Differentiale im Zähler und zieht die Ausdrücke der Richtungskosinus der Flächennormale (S. 52 (16)) hinzu,

so erhält man nach einer leichten Umformung für die linke Seite einen Wert, der auch aus § 39(2) für $d^2x = 0$ hervorgeht. Es wird also

$$g = C \tag{12}$$

eine notwendige Eigenschaft der gesuchten Linien; d. h. die Kurven, die bei gegebener Bogenlänge ein möglichst großes Stück einer Fläche begrenzen, haben konstante geodätische Krümmung. Dieser Satz rührt von Minding her.

Wie in den Elementen der Variationsrechnung gezeigt wird, auch aus der eben ausgeführten Rechnung selbst leicht geschlossen werden kann, stellt das Ergebnis eine notwendige Bedingung für ein Maximum oder Minimum des Integralausdruckes $\lambda S + \mu s$ dar, in welchem keine der beiden Größen S und s vor der anderen bevorzugt ist. Auf dieselbe Bedingung führt daher auch die Aufgabe, unter allen Kurven, die mit einer gegebenen zusammen ein Flächenstück von vorgeschriebenem Inhalt einschließen, diejenige zu suchen, die die kleinste Länge hat.

§ 96.

Orthogonale Kurvenscharen konstanter geodätischer Krümmung.

Aus S. 325 (8) folgen für die geodätischen Krümmungen der Koordinatenlinien die Ausdrücke

$$g_u = -\frac{1}{T}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{F}{\sqrt{G}}\right) \tag{1}$$

$$g_v = -\frac{1}{T}\left(\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{F}{\sqrt{E}}\right). \tag{2}$$

Soll das Koordinatennetz aus Kurven konstanter geodätischer Krümmung bestehen, so muß g_u eine Funktion von u, g_v eine Funktion von v sein. Nimmt man außerdem an, daß die beiden Scharen des Netzes sich unter rechten Winkeln schneiden, so erhält man als Bedingungen für die Fundamentalgrößen

$$\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = \varphi(u) \tag{3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = \psi(v). \tag{4}$$

Die Funktionen φ und ψ, deren Form für die Voraussetzungen ohne Bedeutung ist, können durch Differentiation entfernt werden. Es folgt

$$\frac{\partial^2 \log\sqrt{G}}{\partial u\,\partial v} = \sqrt{EG}\,\varphi(u)\,\psi(v) = \frac{\partial^2 \log\sqrt{E}}{\partial u\,\partial v}$$

oder

$$\frac{\partial^2 \log \frac{E}{G}}{\partial u \partial v} = 0. \tag{5}$$

Nach § 73 liefert diese Gleichung den Satz: Sind zwei Scharen von Linien konstanter geodätischer Krümmung aufeinander senkrecht, so bilden sie zugleich ein isometrisches Kurvennetz.

Hat umgekehrt die geodätische Krümmung einer Kurvenschar, die mit einer anderen zusammen ein isometrisches Netz bildet, längs jeder einzelnen Linie einen konstanten Wert, so ist dies auch für die zweite Schar der Fall. Es seien wieder die beiden Scharen zu Koordinatenlinien, und ihre Bestimmungsgrößen so gewählt, daß

$$E = G, \qquad F = 0$$

ist. Dann wird

$$g_u = -\frac{1}{E}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial u} = \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{E}}}{\partial u}, \qquad g_v = \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{E}}}{\partial v}. \tag{6}$$

Nach der zweiten Annahme ist

$$\frac{\partial \frac{1}{\sqrt{E}}}{\partial u} = \varphi(u),$$

eine Gleichung, die in der Form

$$\frac{\partial^2 \left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right)}{\partial u \partial v} = 0 \tag{7}$$

geschrieben, die Behauptung

$$\frac{\partial \frac{1}{\sqrt{E}}}{\partial v} = \psi(v)$$

liefert.

Die Gleichung (7) ist mit

$$\frac{1}{\sqrt{E}} = U + V$$

gleichbedeutend, wo U nur von u, V nur von v abhängt. Die Flächen, für welche die Voraussetzungen der obigen Sätze gelten, haben demnach die Eigenschaft, daß das Quadrat ihres Linienelements auf die Form

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(U + V)^2} \tag{8}$$

gebracht werden kann. Diese Bemerkung ist von Bonnet gemacht worden.

Handelt es sich nicht darum, über das Linienelement etwas auszusagen, so können die beiden angegebenen Sätze ohne jede Rechnung aus der für die Isometrie eines orthogonalen Kurvennetzes charakteristischen Bedingung

(9) $$\Theta g = \Theta' g'$$

abgelesen werden. Ist nämlich $g \equiv g_\varphi$ längs der Kurve $\varphi = \text{const.}$ konstant, so heißt das, es besteht die Gleichung

(10) $$\Theta g = 0.$$

Gilt gleichzeitig auch

(11) $$\Theta' g' = 0,$$

so ist die Bedingung (9) erfüllt. Und umgekehrt zieht diese mit einer der beiden (10), (11) zusammen die andere nach sich.

Ein besonders einfacher Wert ergibt sich für g_u unter Zugrundelegung orthogonal-geodätischer Koordinaten. Für $E = 1$, $F = 0$ folgt zunächst, wie es nach § 86 sein muß,

(12) $$g_v = 0,$$

und weiter

(13) $$g_u = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = -\frac{1}{2} \frac{\partial \log G}{\partial u}.$$

Die Gleichung (12) kann als Spezialfall von (4) betrachtet werden. Setzt man jetzt wieder, der Gleichung (3) entsprechend,

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \log G}{\partial u} = \varphi(u),$$

d. h. nimmt man die Parallelkurven als Linien konstanter geodätischer Krümmung an, so kommt

$$G = \varphi_1(u)^2 \psi_1(v)^2,$$

und es wird bei passender Wahl der Koordinaten

(14) $$ds^2 = du^2 + \varphi_1(u)^2 dv^2.$$

Das heißt: Existiert auf einer Fläche eine Schar geodätischer Parallelkurven von konstanter geodätischer Krümmung, so ist die Fläche auf eine Umdrehungsfläche abwickelbar.

Umgekehrt gibt es auf jeder in eine Rotationsfläche verbiegbaren Fläche ein orthogonales Kurvennetz, für welches die Gleichungen

(15) $$g = 0$$

(16) $$\Theta' g' = 0$$

gelten.

§ 97.

Zusammenhang der geodätischen Windung mit der Theorie der geodätischen Linien.

Die Windung einer geodätischen Linie läßt sich unmittelbar aus der Formel S. 61 (18)

$$(1) \qquad k' = t + \Theta\varphi$$

bestimmen, in welcher φ den Winkel der Hauptnormale mit der Flächennormale bedeutete. Nach der charakteristischen Eigenschaft der geodätischen Linien ist nämlich $\varphi = 0$, also

$$(2) \qquad k' = t.$$

Die Größe t ist im § 16 eingeführt und im § 52 berechnet worden. Im Gegensatz zu dem allgemeinen Ausdruck von k' hängt ihr Wert von Differentialen zweiter Ordnung nicht ab, sondern enthält außer den Fundamentalgrößen nur das Verhältnis $du:dv$. Denn es war (S. 193 (7))

$$(3) \qquad t = \frac{(EM - FL)du^2 + (EN - GL)du\,dv + (FN - GM)dv^2}{T(Edu^2 + 2F du\,dv + Gdv^2)}.$$

Betrachtet man nun gleichzeitig mit einer beliebigen Kurve eine geodätische Linie mit derselben Tangente, für welche also im gegebenen Punkte das Differentialverhältnis $\frac{dv}{du}$ denselben Wert hat, so erscheint die geodätische Torsion jener Kurve als Windung dieser berührenden geodätischen Linie. Das ist der Grund für die Bezeichnung. Allerdings entspricht der Begriff der geodätischen Windung nicht dem der geodätischen Krümmung; denn sonst müßte unter dieser die Krümmung der berührenden geodätischen Linie, also die Normalkrümmung, verstanden werden.

Die im § 52 über die geodätische Windung bewiesenen Sätze, namentlich der durch die Gleichung

$$(4) \qquad t^2 = (n_1 - n)(n - n_2)$$

(S. 197) vermittelte Zusammenhang mit der Normalkrümmung und den beiden Hauptkrümmungen, gewinnen durch die Beziehung zur geodätischen Linie eine anschauliche Bedeutung.

Aus der Gleichung (1) erhält man interessante Resultate, wenn man eine oder zwei der darin vorkommenden Größen gleich Null setzt.

Nimmt man z. B. $\Theta\varphi = 0$ an, so folgt die Gleichung (2) wieder. Für alle Kurven also, deren Hauptnormale mit der Flächennormale einen konstanten Winkel bildet, stimmt die Windung mit der geodätischen Windung überein.

Will man t zu Null machen, so hat man zu beachten, daß der Zähler des Ausdruckes (3) diejenige quadratische Differentialform Γ war, die gleich Null gesetzt die Krümmungskurven liefert (S. 233).

Setzt man nun z. B. $t = 0$ und $\varphi = 0$, so wird $k' = 0$. Die Kurve muß dann eben sein. Denn das Verschwinden von k' ist nach S. 13 (7) gleichbedeutend mit

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0$$

oder (S. 13 (3))

$$QdR - RdQ = 0.$$

Die Integration ergibt

$$\frac{Q}{R} = \frac{B}{C}$$

$$B(dx\,d^2y - dy\,d^2x) - C(dz\,d^2x - dx\,d^2z) = 0$$

$$dx(B\,d^2y + C\,d^2z) - d^2x(B\,dy + C\,dz) = 0$$

$$d\,\frac{B\,dy + C\,dz}{dx} = 0$$

$$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

eine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten.

Also: Wenn eine Krümmungslinie zugleich geodätische Linie ist, so muß sie eben sein.

Wird gleichzeitig $t = 0$ und $k' = 0$ angenommen, so ist die betrachtete Kurve eine ebene Krümmungslinie. Es ist dann $\Theta\varphi = 0$, d. h. φ längs der Kurve konstant. Nun liegt die Hauptnormale einer ebenen Kurve in ihrer Ebene. Man erhält mithin den Satz: Wenn eine Krümmungslinie eben ist, so bildet ihre Ebene mit der Flächennormale, d. h. auch mit der Tangentialebene, einen konstanten Winkel.

Umgekehrt: Schneidet eine Ebene eine Fläche unter konstantem Winkel, so ist die Schnittkurve Krümmungslinie.

VIII. Abschnitt.

Die Einheitskugel. Einführung in die Theorie der Strahlensysteme. Geradlinige Flächen.

§ 98.

Formeln aus der Theorie der Einheitskugel.

Wenn Flächen aus vorgeschriebenen Eigenschaften bestimmt werden sollen, so ist es oft zweckmäßig, nicht sofort auf die kartesischen Koordinaten auszugehen, sondern zuerst die Tangentialkoordinaten der Fläche zu ermitteln. Man versteht darunter irgend drei Größen, die geeignet sind, die Tangentialebene zu bestimmen. Dazu gehören vor allem die Richtungskosinus X, Y, Z, die, durch die Identität

$$\sum X^2 = 1 \tag{1}$$

verbunden, zwei Unabhängigen äquivalent sind. Als dritte Bestimmungsgröße möge der algebraische Wert des Abstandes der Tangentialebene im Punkte $(x\,y\,z)$ vom Anfangspunkt der Koordinaten genommen werden. Da

$$\sum (\mathfrak{x} - x) X = 0$$

die Gleichung der Tangentialebene ist, so wird

$$\sum x X \equiv P \tag{2}$$

dieser Wert.

Im Folgenden sollen nicht statt X, Y, Z zwei passend gewählte Funktionen zweier Variablen eingeführt, vielmehr der Symmetrie wegen die Richtungskosinus alle drei beibehalten und die Gleichung (1) beständig hinzugezogen werden.

Betrachtet man unter dieser Voraussetzung X, Y, Z und P als gegebene oder zu bestimmende Funktionen der Parameter u und v, so liefert die Gleichung (2)

$$\begin{aligned} \sum x \frac{\partial X}{\partial u} &= \frac{\partial P}{\partial u} \\ \sum x \frac{\partial X}{\partial v} &= \frac{\partial P}{\partial v}. \end{aligned} \tag{3}$$

Bei der Auflösung der Gleichungen (2, 3) nach x, y, z kann man sich bestimmter Formeln aus der Theorie der Einheitskugel bedienen, die auch für weitergehende Untersuchungen nützlich sind. Sie sollen nebst einigen anderen Formeln aus demselben Gebiet hier im Zusammenhange entwickelt werden.

Aus (1) folgt

$$\sum X \frac{\partial X}{\partial u} = 0 \tag{4}$$
$$\sum X \frac{\partial X}{\partial v} = 0$$

oder

$$\lambda X = \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}, \ldots$$

mit der Bestimmung

$$\lambda^2 = \sum \left(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}\right)^2$$
$$= \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 - \left(\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2.$$

Bedeuten nun wie immer $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ die Fundamentalgrößen erster Ordnung der Einheitskugel, $\mathfrak{T}$ die positive Quadratwurzel aus ihrer Determinante $\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2$, so wird $\lambda = \varepsilon\mathfrak{T}$, und demnach bei passender Wahl des Vorzeichens ε:

$$(5) \quad \begin{aligned} X &= \frac{1}{\varepsilon\mathfrak{T}}\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}\right) \\ Y &= \frac{1}{\varepsilon\mathfrak{T}}\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v}\right) \\ Z &= \frac{1}{\varepsilon\mathfrak{T}}\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\right). \end{aligned}$$

Für die bei der Auflösung von (2) und (3) im Nenner auftretende Determinante ergibt sich dann die Formel

$$(6) \quad \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u} \\ \frac{\partial X}{\partial v} & \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix} = \varepsilon\mathfrak{T}.$$

Ferner ist, ebenfalls in Folge von (5),

$$(7) \quad Y\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{1}{\varepsilon\mathfrak{T}}\left(\mathfrak{E}\frac{\partial X}{\partial v} - \mathfrak{F}\frac{\partial X}{\partial u}\right)$$

$$(8) \quad Y\frac{\partial Z}{\partial v} - Z\frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{1}{\varepsilon\mathfrak{T}}\left(\mathfrak{F}\frac{\partial X}{\partial v} - \mathfrak{G}\frac{\partial X}{\partial u}\right).$$

Die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung der Kugel brauchen nicht erst eingeführt zu werden. Aus (4) folgt nämlich durch Weiterdifferentiieren

$$\sum X \frac{\partial^2 X}{\partial u^2} + \sum \left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = 0$$

$$\sum X \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} + \sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} = 0$$

$$\sum X \frac{\partial^2 X}{\partial v^2} + \sum \left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = 0,$$

d. h.

(9) $$\mathfrak{L} = -\mathfrak{E}, \qquad \mathfrak{M} = -\mathfrak{F}, \qquad \mathfrak{N} = -\mathfrak{G}.$$

Ohne jede Rechnung ergeben sich diese Gleichungen aus der Bemerkung, daß für die Einheitskugel sämtliche Normalkrümmungen einander gleich, und zwar nach der im § 22 getroffenen Zeichenbestimmung gleich -1 sind. Danach ist nämlich

$$n d\sigma^2 \equiv -d\sigma^2,$$

also

$$\mathfrak{L} du^2 + 2\mathfrak{M} du dv + \mathfrak{N} dv^2 \equiv -(\mathfrak{E} du^2 + 2\mathfrak{F} du dv + \mathfrak{G} dv^2).$$

Die zweiten partiellen Ableitungen von X lassen sich nach S. 223 (4, 5, 6) als homogene lineare Funktionen von X, $\frac{\partial X}{\partial u}$ und $\frac{\partial X}{\partial v}$ darstellen. Denn die a. a. O. aufgeführten Gaußschen Gleichungen gelten für jede Fläche, also auch für die Einheitskugel, bei der eben die kartesischen Koordinaten gleich X, Y, Z selbst sind. Berücksichtigt man von vornherein die Gleichungen (9), so erhält man

(10) $$\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} = \mathfrak{J}_1 \frac{\partial X}{\partial u} + \mathfrak{J}_2 \frac{\partial X}{\partial v} - \mathfrak{E} X$$

(11) $$\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \mathfrak{J}_1' \frac{\partial X}{\partial u} + \mathfrak{J}_2' \frac{\partial X}{\partial v} - \mathfrak{F} X$$

(12) $$\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} = \mathfrak{J}_1'' \frac{\partial X}{\partial u} + \mathfrak{J}_2'' \frac{\partial X}{\partial v} - \mathfrak{G} X,$$

und entsprechende Ausdrücke für $\frac{\partial^2 Y}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial u^2}$ usw. Hierin sind die Größen $\mathfrak{J}_1, \ldots \mathfrak{J}_2''$ aus $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ ebenso gebildet wie $J_1, \ldots J_2''$ aus E, F, G (S. 137 (27)).

Aus (5) folgt noch

(13) $$YZ = -\frac{1}{\mathfrak{T}^2}\left[\mathfrak{G} \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial u} - \mathfrak{F}\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} + \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v}\right) + \mathfrak{E} \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial v}\right]$$

(14) $$Y^2 + Z^2 = \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\left[\mathfrak{G}\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 - 2\mathfrak{F}\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \mathfrak{E}\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2\right].$$

Bezeichnet man die Differentialparameter (einschließlich des Zwischenparameters), deren Koeffizienten der quadratischen Differentialform

$$(15)\qquad \mathfrak{E}du^2 + 2\mathfrak{F}du\,dv + \mathfrak{G}dv^2 \equiv \mathsf{E}$$

entnommen sind, durch einen Index e, so kann man schreiben

$$(16)\qquad YZ = -\Delta_e(Y, Z)$$

$$(17)\qquad Y^2 + Z^2 = \Delta_e^1 X.$$

§ 99.

Formeln aus der Theorie der sphärischen Abbildung einer Fläche.

Alle diese Gleichungen sind von der Theorie der Normalen unabhängig; sie gelten für irgend drei Funktionen von u und v, deren Quadratsumme gleich Eins ist.

Gibt man nun X, Y, Z ihre gewöhnliche Bedeutung wieder, so gelten die Formeln des § 61, namentlich (10, 11), (20) und (22). Wir untersuchen, was dann aus den verschiedenen Gleichungen des vorigen Paragraphen wird. Die direkte Bildung der Determinanten zweiten Grades auf den rechten Seiten von (5) liefert mit Hilfe von S. 225 (13) sofort

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} &= KTX \\ \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} &= KTY \\ \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} &= KTZ. \end{aligned}$$

Ebenso erhält man, den Gleichungen (7, 8) entsprechend:

$$(2)\qquad Y\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{1}{T}\left(M\frac{\partial x}{\partial u} - L\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

$$(3)\qquad Y\frac{\partial Z}{\partial v} - Z\frac{\partial Y}{\partial v} = \frac{1}{T}\left(N\frac{\partial x}{\partial u} - M\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Erwähnt seien ferner noch die aus der Definition von X, Y, Z unmittelbar folgenden Formeln

$$(4)\qquad YZ = -\frac{1}{T^2}\left(G\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u} - F\left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right) + E\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

$$(5)\qquad Y^2 + Z^2 = \frac{1}{T^2}\left(G\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + E\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right)$$

oder

$$(6) \qquad YZ = -\Delta(y, z)$$

$$(7) \qquad Y^2 + Z^2 = \Delta^1 x,$$

die den obigen Gleichungen (13), (14), (16), (17) an die Seite treten.

Besonders wichtig aber sind die Formen, die die Grundgleichungen der Krümmungstheorie annehmen, wenn man, wie es in der Theorie der sphärischen Abbildung das Natürliche ist, die Fundamentalgrößen der Kugel an die Spitze stellt. Es handelt sich also darum, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ statt E, F, G zu bevorzugen; die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung,

$$L \equiv -\sum \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial u}, \ldots,$$

sind aus den kartesischen Koordinaten der Fläche und der Kugel in gleicher Weise gebildet und spielen daher hier dieselbe Rolle wie früher. Aus S. 226 (25), nämlich

$$(8) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{E} &= (n_1 + n_2) L - n_1 n_2 E \\ \mathfrak{F} &= (n_1 + n_2) M - n_1 n_2 F \\ \mathfrak{G} &= (n_1 + n_2) N - n_1 n_2 G \end{aligned}$$

folgt durch Auflösung nach E, F, G

$$(9) \qquad \begin{aligned} E &= (\varrho_1 + \varrho_2) L - \varrho_1 \varrho_2 \mathfrak{E} \\ F &= (\varrho_1 + \varrho_2) M - \varrho_1 \varrho_2 \mathfrak{F} \\ G &= (\varrho_1 + \varrho_2) N - \varrho_1 \varrho_2 \mathfrak{G}, \end{aligned}$$

und hieraus weiter

$$(10) \qquad \varrho_1 + \varrho_2 = \frac{\mathfrak{G} L - 2 \mathfrak{F} M + \mathfrak{E} N}{\mathfrak{T}^2}$$

$$(11) \qquad \varrho_1 \varrho_2 = \frac{LN - M^2}{\mathfrak{T}^2}.$$

Setzt man in (8) die Ausdrücke von $n_1 + n_2$ und $n_1 n_2$, in (9) die eben angegebenen für $\varrho_1 + \varrho_2$ und $\varrho_1 \varrho_2$ ein, so kann man schreiben:

$$(12) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{E} &= \frac{1}{T^2}(GL^2 - 2FLM + EM^2) \\ \mathfrak{F} &= \frac{1}{T^2}(GLM - F(LN + M^2) + EMN) \\ \mathfrak{G} &= \frac{1}{T^2}(GM^2 - 2FMN + EN^2) \end{aligned}$$

$$E = \frac{1}{\mathfrak{T}^2}(\mathfrak{G}L^2 - 2\mathfrak{F}LM + \mathfrak{E}M^2)$$

(13) $$F = \frac{1}{\mathfrak{T}^2}(\mathfrak{G}LM - \mathfrak{F}(LN + M^2) + \mathfrak{E}MN)$$

$$G = \frac{1}{\mathfrak{T}^2}(\mathfrak{G}M^2 - 2\mathfrak{F}MN + \mathfrak{E}N^2).$$

Jedes dieser Gleichungssysteme ist wieder die Auflösung des anderen.

Die quadratische Bestimmungsgleichung der Haupttangenten, ursprünglich

$$\begin{vmatrix} Edu + Fdv, & Fdu + Gdv \\ Ldu + Mdv, & Mdu + Ndv \end{vmatrix} = 0,$$

wird

(14) $$\begin{vmatrix} \mathfrak{E}du + \mathfrak{F}dv, & \mathfrak{F}du + \mathfrak{G}dv \\ Ldu + Mdv, & Mdu + Ndv \end{vmatrix} = 0,$$

und der Zusammenhang zwischen Haupttangenten und Hauptkrümmungsradien wird durch die Beziehungen

(15) $$\varrho_\nu = \frac{L + M\lambda_\nu}{\mathfrak{E} + \mathfrak{F}\lambda_\nu} = \frac{M + N\lambda_\nu}{\mathfrak{F} + \mathfrak{G}\lambda_\nu}$$

oder

(16) $$\lambda_\nu = -\frac{L - \mathfrak{E}\varrho_\nu}{M - \mathfrak{F}\varrho_\nu} = -\frac{M - \mathfrak{F}\varrho_\nu}{N - \mathfrak{G}\varrho_\nu}$$

vermittelt.

Transformiert man die Formel S. 226 (26)

(17) $$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = (n_1 + n_2)n - n_1 n_2$$

mittels des Eulerschen Satzes

$$n = n_1 \cos^2 w + n_2 \sin^2 w,$$

so erhält man

(18) $$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = n_1^2 \cos^2 w + n_2^2 \sin^2 w.$$

§ 100.

Die Weingartenschen Formeln und die Fundamentalgleichungen in der Theorie der sphärischen Abbildung.

Es bleibt noch übrig, auch die Weingartenschen Formeln, sowie die Fundamentalgleichungen in eine Gestalt zu setzen, in der die auf die Einheitskugel bezüglichen Größen bevorzugt sind. Insofern das sphärische Bild der Fläche, nämlich das Größensystem (X, Y, Z) als gegeben gilt, wird man die Weingartenschen Gleichungen als nach $\frac{x}{\partial u}\ \frac{\partial x}{\partial v} \cdots$ aufgelöst voraussetzen. Nun war (S. 225 (14, 15))

$$(1)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{1}{K}\left(\quad \eta_{22}\frac{\partial X}{\partial u} - \eta_{12}\frac{\partial X}{\partial v}\right)\\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{1}{K}\left(-\eta_{21}\frac{\partial X}{\partial u} + \eta_{11}\frac{\partial X}{\partial v}\right).\end{aligned}$$

Um diese Gleichungen auf die verlangte Form zu bringen, könnte man z. B. durch § 98 (7, 8) und § 99 (2, 3) hindurchgehen. Aber das natürlichste Verfahren besteht offenbar darin, aus den Koeffizienten auf den rechten Seiten die Größen E, F, G mittels der drei Relationen zu eliminieren, die die Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung der Fläche mit den Fundamentalgrößen der Einheitskugel verbinden, und die sich nach E, F, G aufgelöst a. v. S. unter (13) finden. Die Berechnung der Größen

$$(2)\qquad \begin{aligned}\eta_{11} &= \frac{FM - GL}{T^2}, & \eta_{12} &= \frac{FL - EM}{T^2}\\ \eta_{21} &= \frac{FN - GM}{T^2}, & \eta_{22} &= \frac{FM - EN}{T^2}\end{aligned}$$

(S. 224 (12)) liefert

$$(3)\qquad \begin{aligned}\frac{\eta_{11}}{K} &= \frac{\mathfrak{F}M - \mathfrak{E}N}{\mathfrak{T}^2}, & \frac{\eta_{12}}{K} &= \frac{-\mathfrak{F}L + \mathfrak{E}M}{\mathfrak{T}^2}\\ \frac{\eta_{21}}{K} &= \frac{-\mathfrak{F}N + \mathfrak{G}M}{\mathfrak{T}^2}, & \frac{\eta_{22}}{K} &= \frac{\mathfrak{F}M - \mathfrak{G}L}{\mathfrak{T}^2}.\end{aligned}$$

Schreibt man also

$$(4)\qquad \begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u} &= \vartheta_{11}\frac{\partial X}{\partial u} + \vartheta_{12}\frac{\partial X}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \vartheta_{21}\frac{\partial X}{\partial u} + \vartheta_{22}\frac{\partial X}{\partial v},\end{aligned}$$

so wird

$$(5)\qquad \begin{aligned}\vartheta_{11} &= \frac{\mathfrak{F}M - \mathfrak{G}L}{\mathfrak{T}^2}, & \vartheta_{12} &= \frac{\mathfrak{F}L - \mathfrak{E}M}{\mathfrak{T}^2}\\ \vartheta_{21} &= \frac{\mathfrak{F}N - \mathfrak{G}M}{\mathfrak{T}^2}, & \vartheta_{22} &= \frac{\mathfrak{F}M - \mathfrak{E}N}{\mathfrak{T}^2},\end{aligned}$$

d. h. $\vartheta_{11}, \vartheta_{12}, \vartheta_{21}, \vartheta_{22}$ unterscheiden sich von $\eta_{11}, \eta_{12}, \eta_{21}, \eta_{22}$ nur dadurch, daß E, F, G durch $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ ersetzt sind.

Mit Hilfe dieser einfachen Bemerkung kann man leicht beurteilen, wie jetzt die Fundamentalgleichungen aussehen werden. Sie hatten nach § 63 für die Gauß-Weingartenschen Gleichungen die Bedeutung von Integrabilitäts-Bedingungen. Läßt man in der dort beschriebenen Rechnung

$$X, \qquad \mathfrak{J}_1, \dots \mathfrak{J}_2'', \qquad -\mathfrak{E}, \qquad -\mathfrak{F}, \qquad -\mathfrak{G}$$

an die Stelle von

$$x, \qquad J_1, \dots J_2'', \qquad L, \qquad M, \qquad N$$

treten, wie es wegen der partiellen Differentialgleichungen (10, 11, 12) des § 98 sein muß, so ergeben sich drei Gleichungen, deren erste aus S. 120 (7) dadurch hervorgeht, daß links Eins statt K, rechts $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ statt E, F, G gesetzt wird. Sie besagt nur, daß der Gaußsche Ausdruck des Krümmungsmaßes für die Einheitskugel gleich Eins ist. Die beiden anderen lauten, entsprechend S. 229 (D):

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial v} - \mathfrak{J}_1' \mathfrak{E} - \mathfrak{J}_2' \mathfrak{F} - \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u} - \mathfrak{J}_1 \mathfrak{F} - \mathfrak{J}_2 \mathfrak{G}\right) = 0$$

$$\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial u} - \mathfrak{J}_1' \mathfrak{F} - \mathfrak{J}_2' \mathfrak{G} - \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial v} - \mathfrak{J}_1'' \mathfrak{E} - \mathfrak{J}_2'' \mathfrak{F}\right) = 0.$$

Sie sind vermöge der Werte der Christoffelschen Größen identisch erfüllt.

Um die beiden anderen Fundamentalgleichungen zu finden, muß man also hier, wo die Weingartenschen Gleichungen zu dem erstgenannten System partieller Differentialgleichungen in keinem Abhängigkeitsverhältnis stehen, diese Gleichungen (4) ausdrücklich hinzunehmen. Dabei hat man nur auf einen einzigen Punkt zu achten, daß nämlich bei der Gleichsetzung von $\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}$ und $\frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u}$ als Koeffizient von X

$$\text{links} \quad -(\mathfrak{F}\vartheta_{11} + \mathfrak{G}\vartheta_{12}), \qquad \text{rechts} \quad -(\mathfrak{E}\vartheta_{21} + \mathfrak{F}\vartheta_{22})$$

vorkommt; Größen, die die Stelle von

$$M\eta_{11} + N\eta_{12} \qquad \text{und} \qquad L\eta_{21} + M\eta_{22}$$

vertreten. Im übrigen kommen L, M, N hier genau so vor wie dort. Es ist aber

$$\mathfrak{F}\vartheta_{11} + \mathfrak{G}\vartheta_{12} = \mathfrak{E}\vartheta_{21} + \mathfrak{F}\vartheta_{22},$$

sodaß die beiden Glieder sich auch hier aufheben. Die zweite und dritte Fundamentalgleichung werden

(6)
$$\frac{\partial L}{\partial v} - \mathfrak{J}_1' L - \mathfrak{J}_2' M - \left(\frac{\partial M}{\partial u} - \mathfrak{J}_1 M - \mathfrak{J}_2 N\right) = 0$$

$$\frac{\partial N}{\partial u} - \mathfrak{J}_1' M - \mathfrak{J}_2' N - \left(\frac{\partial M}{\partial v} - \mathfrak{J}_1'' L - \mathfrak{J}_2'' M\right) = 0.$$

§ 101.

Parameter der Asymptotenlinien. Die Formeln von Lelieuvre.

Es seien jetzt, wie im § 72, die Koordinatenlinien mit den Asymptotenkurven identisch. Unter den Bedingungen

(1) $$L = 0, \qquad N = 0$$

geben die Gleichungen (4) und (6):

(2)
$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{M}{\mathfrak{T}^2}\left(\mathfrak{F}\frac{\partial X}{\partial u} - \mathfrak{E}\frac{\partial X}{\partial v}\right)$$
$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{M}{\mathfrak{T}^2}\left(-\mathfrak{G}\frac{\partial X}{\partial u} + \mathfrak{F}\frac{\partial X}{\partial v}\right)$$

(3)
$$\frac{\partial \log M}{\partial u} - (\mathfrak{J}_1 - \mathfrak{J}_2') = 0$$
$$\frac{\partial \log M}{\partial v} - (\mathfrak{J}_2'' - \mathfrak{J}_1') = 0.$$

Setzt man

(4) $$-\varrho_1\varrho_2 = \varrho^2$$

und benutzt die aus S. 338 (11) folgende Gleichung

(5) $$\varrho_1\varrho_2 = -\frac{M^2}{\mathfrak{T}^2},$$

so kann man ϱ selbst, dem Vorzeichen nach, durch den Ansatz

(6) $$\varrho = \frac{M}{\mathfrak{T}}$$

bestimmen. Statt M möge dann ϱ in die Fundamentalgleichungen (3) eingeführt werden. Dabei sind die für die Determinante jeder quadratischen Differentialform geltenden Gleichungen S. 185 (21)

$$\frac{\partial \log \sqrt{a}}{\partial u_l} = \left\{ {1\ l \atop 1} \right\} + \left\{ {2\ l \atop 2} \right\} \qquad (l = 1, 2)$$

für $\sqrt{a} = \mathfrak{T}$ zu benutzen:

(7)
$$\frac{\partial \log \mathfrak{T}}{\partial u} = \mathfrak{J}_1 + \mathfrak{J}_2'$$
$$\frac{\partial \log \mathfrak{T}}{\partial v} = \mathfrak{J}_1' + \mathfrak{J}_2''.$$

Es folgt

(8)
$$\frac{\partial \log \varrho}{\partial u} = -2\mathfrak{J}_2'$$
$$\frac{\partial \log \varrho}{\partial v} = -2\mathfrak{J}_1'.$$

Das Zusammenbestehen dieser beiden Gleichungen erfordert die Bedingung

(9) $$\frac{\partial \mathfrak{J}_1'}{\partial u} = \frac{\partial \mathfrak{J}_2'}{\partial v}.$$

Sie gibt eine Differential-Relation zwischen den Fundamentalgrößen der Einheitskugel, wenn diese auf Koordinatenlinien bezogen ist, die den Asymptotenkurven der gegebenen Fläche entsprechen.

Stellt man nun umgekehrt die Koordinaten X, Y, Z der Einheitskugel durch zwei Parameter u, v so dar, daß die Beziehung (9) gilt, so kann man ϱ aus (8) bis auf einen konstanten Faktor bestimmen. Es mögen dann x, y, z durch drei Gleichungspaare gleicher Form definiert werden, deren erstes ist

$$(10)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{\varrho}{\mathfrak{T}}\left(\ \ \mathfrak{F}\frac{\partial X}{\partial u} - \mathfrak{E}\frac{\partial X}{\partial v}\right) \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{\varrho}{\mathfrak{T}}\left(-\mathfrak{G}\frac{\partial X}{\partial u} + \mathfrak{F}\frac{\partial X}{\partial v}\right). \end{aligned}$$

Ihre Integrabilitätsbedingungen sind erfüllt. Ferner gelten offenbar die Gleichungen

$$\sum X\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \sum X\frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

d. h. die Größen X, Y, Z, die von vornherein durch

$$\sum X^2 = 1$$

verbunden sind, bedeuten für die Fläche (x, y, z) die Richtungskosinus der Normale. Endlich wird

$$L \equiv -\sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} = 0, \qquad N \equiv -\sum\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v} = 0;$$

die Fläche ist auf die Asymptotenkurven als Koordinatenlinien bezogen, oder die sphärischen Kurven $u =$ const., $v =$ const. sind die Bilder der Asymptotenlinien der Fläche.

Die Christoffelschen Größen auf den rechten Seiten der Gleichungen (8) erscheinen als Koeffizienten in der zweiten Gaußschen Gleichung

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} = \mathfrak{J}_1'\frac{\partial X}{\partial u} + \mathfrak{J}_2'\frac{\partial X}{\partial v} - \mathfrak{F}X,$$

die in gleicher Weise auch für Y und Z gilt. Wird statt $\mathfrak{J}_1'$ und $\mathfrak{J}_2'$ die eine Größe ϱ eingeführt, so ergibt sich

$$(11)\qquad \frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log\varrho}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{2}\frac{\partial\log\varrho}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \mathfrak{F}X = 0.$$

Um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, nehme man $\varrho > 0$, sodaß

$$(12)\qquad \frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial\log\sqrt{\varrho}}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial\log\sqrt{\varrho}}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \mathfrak{F}X = 0$$

geschrieben werden kann, und setze

$$(13)\qquad X\sqrt{\varrho} = \xi,$$

so wird für

$$\frac{1}{\sqrt{\varrho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\varrho}}{\partial u \partial v} - \mathfrak{F} = \mu: \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v} = \mu \xi. \tag{15}$$

Diese Gleichung vertritt wieder drei, denn sie gilt ebenfalls für

$$Y\sqrt{\varrho} \equiv \eta, \qquad Z\sqrt{\varrho} \equiv \zeta.$$

Um ξ, η, ζ auch in die Weingartenschen Gleichungen einzuführen, benutzen wir zunächst die Identitäten S. 335 (7, 8) und setzen demnach (10) in die Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= -\varepsilon\varrho\left(Y\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial Y}{\partial u}\right) \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \varepsilon\varrho\left(Y\frac{\partial Z}{\partial v} - Z\frac{\partial Y}{\partial v}\right). \end{aligned} \tag{16}$$

Dann wird

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= -\varepsilon\left(\eta\frac{\partial \zeta}{\partial u} - \zeta\frac{\partial \eta}{\partial u}\right), \ldots \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \varepsilon\left(\eta\frac{\partial \zeta}{\partial v} - \zeta\frac{\partial \eta}{\partial v}\right), \ldots. \end{aligned} \tag{17}$$

Daß die Annahme $\varrho > 0$ hierbei nicht wesentlich ist, übersieht man sofort; für $\varrho < 0$ braucht man nur $\sqrt{-\varrho}$ statt $\sqrt{\varrho}$ zu benutzen. Allein man kann, wenn man auch diese Rechnung umzukehren sucht, von der Größe ϱ überhaupt absehen und in der partiellen Differentialgleichung (15) μ als beliebige Funktion von u und v betrachten. Es seien dann ξ, η, ζ irgend drei linear-unabhängige Lösungen dieser Gleichung, und drei Größen x, y, z aus ihnen mittels der Formeln (17), jetzt auch unter Weglassung des Vorzeichens ε, also

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \zeta\frac{\partial \eta}{\partial u} - \eta\frac{\partial \zeta}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} &= \eta\frac{\partial \zeta}{\partial v} - \zeta\frac{\partial \eta}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= \xi\frac{\partial \zeta}{\partial u} - \zeta\frac{\partial \xi}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \zeta\frac{\partial \xi}{\partial v} - \xi\frac{\partial \zeta}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= \eta\frac{\partial \xi}{\partial u} - \xi\frac{\partial \eta}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial v} &= \xi\frac{\partial \eta}{\partial v} - \eta\frac{\partial \xi}{\partial v} \end{aligned} \tag{18}$$

definiert. Diese Größen können durch Quadraturen bestimmt werden, weil infolge der gemachten Annahmen die Integrabilitätsbedingungen gelten. Die Relationen

$$\sum \xi\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \sum \xi\frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

zeigen, daß ξ, η, ζ den Richtungskosinus der Fläche (x, y, z) pro-

portional sein müssen. Bezeichnet man den Proportionalitätsfaktor mit $\sqrt{\varrho}$, setzt also

$$\xi = X\sqrt{\varrho}, \ldots,$$

sodaß

(19) $$\varrho = \sum \xi^2$$

wird, und bildet $\sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}$ und $\sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}$, so findet man für beide Summen den Wert Null. Die Fläche (x, y, z) ist also wieder auf die Parameter der Asymptotenlinien bezogen.

Stellt man noch die Größe M her, um daraus nach (5) $\varrho_1\varrho_2$ oder $\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}$ zu bilden, so erhält man

(20) $$K = -\frac{1}{\varrho^2} = -\frac{1}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}.$$

Die Gleichungen (18) heißen die Lelieuvreschen Formeln.

Die einfachste partielle Differentialgleichung vom Typus (15) ist

(21) $$\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

Ihre allgemeine Lösung hat die Form $\varphi(u) + \psi(v)$. Wird nun speziell

(22) $$\xi = v, \qquad \eta = \varphi(v), \qquad \zeta = u$$

angenommen, so liefern die Lelieuvreschen Formeln:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\varphi(v), \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -u\varphi'(v)$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v \qquad , \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = u$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 0 \qquad , \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = v\varphi'(v) - \varphi(v),$$

also bei passender Wahl von Integrationskonstanten

$$x = -u\varphi(v), \qquad y = uv, \qquad z = v\varphi(v) - 2\int \varphi(v)\,dv.$$

Gibt man hierin v einen konstanten Wert, so erhält man zwei Gleichungen der Form

$$y = \alpha x, \qquad z = c.$$

Die Fläche entsteht durch Bewegung einer geraden Linie, die die z-Achse senkrecht schneidet, sie ist eine gerade Konoidfläche.

Daß auf jeder geradlinigen Fläche die eine Schar von Asymptotenlinien mit den Geraden selbst zusammenfällt, war schon im § 70 bewiesen worden.

§ 102.

Tangentialkoordinaten.

Um nun zu den Tangentialkoordinaten zurückzukehren, so folgt aus den Gleichungen (2, 3) des § 98 unter Benutzung von (5), (6), (7) und (8):

$$
(1)\quad
\begin{aligned}
x &= PX + \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\left(\mathfrak{G}\,\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u} - \mathfrak{F}\left(\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right) + \mathfrak{E}\,\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}\right)\\
y &= PY + \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\left(\mathfrak{G}\,\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial u} - \mathfrak{F}\left(\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}\right) + \mathfrak{E}\,\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial v}\right)\\
z &= PZ + \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\left(\mathfrak{G}\,\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial u} - \mathfrak{F}\left(\frac{\partial P}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}\right) + \mathfrak{E}\,\frac{\partial P}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial v}\right),
\end{aligned}
$$

d. h.

$$
(2)\quad
\begin{aligned}
x &= PX + \Delta_e(P, X)\\
y &= PY + \Delta_e(P, Y)\\
z &= PZ + \Delta_e(P, Z).
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen liefern also die kartesischen Koordinaten der Fläche, wenn die Tangentialkoordinaten als bekannt gelten.

Für die Hauptkrümmungsradien bestehen die Formeln S. 338 (10, 11), in denen aber noch L, M, N bestimmt werden müssen. Dies geschieht am einfachsten durch Bildung der zweiten partiellen Ableitungen von P, also durch Differentiation der Gleichungen § 98 (3); es folgt

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
L &= \sum x\,\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}\\
M &= \sum x\,\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} - \frac{\partial^2 P}{\partial u\,\partial v}\\
N &= \sum x\,\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}.
\end{aligned}
$$

Setzt man für die zweiten Ableitungen der Richtungskosinus X, Y, Z ihre Ausdrücke aus § 98 (10, 11, 12), so entstehen die Formeln

$$
(4)\quad
\begin{aligned}
L &= -\mathfrak{E}P + \mathfrak{I}_1\frac{\partial P}{\partial u} + \mathfrak{I}_2\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial^2 P}{\partial u^2}\\
M &= -\mathfrak{F}P + \mathfrak{I}_1'\frac{\partial P}{\partial u} + \mathfrak{I}_2'\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial^2 P}{\partial u\,\partial v}\\
N &= -\mathfrak{G}P + \mathfrak{I}_1''\frac{\partial P}{\partial u} + \mathfrak{I}_2''\frac{\partial P}{\partial v} - \frac{\partial^2 P}{\partial v^2}.
\end{aligned}
$$

Über das Produkt der Hauptkrümmungshalbmesser ist nichts Besonderes zu bemerken, aber die Summe,

(5)
$$\begin{aligned}\varrho_1+\varrho_2=-2P&+\frac{1}{\mathfrak{T}^2}(\mathfrak{G}\mathfrak{J}_1-2\mathfrak{F}\mathfrak{J}_1'+\mathfrak{E}\mathfrak{J}_1'')\frac{\partial P}{\partial u}\\&+\frac{1}{\mathfrak{T}^2}(\mathfrak{G}\mathfrak{J}_2-2\mathfrak{F}\mathfrak{J}_2'+\mathfrak{E}\mathfrak{J}_2'')\frac{\partial P}{\partial v}\\&-\frac{1}{\mathfrak{T}^2}\left(\mathfrak{G}\frac{\partial^2 P}{\partial u^2}-2\mathfrak{F}\frac{\partial^2 P}{\partial u\,\partial v}+\mathfrak{E}\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}\right),\end{aligned}$$

läßt eine elegante Umformung zu. Benutzt man nämlich die Beziehungen § 93 (9, 11), nachdem man darin überall die Fundamentalgrößen E, F, G durch $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ ersetzt hat, in umgekehrtem Sinne wie dort, so erhält man

(6)
$$\varrho_1+\varrho_2=-2P-\frac{1}{\mathfrak{T}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathfrak{G}\frac{\partial P}{\partial u}-\mathfrak{F}\frac{\partial P}{\partial v}}{\mathfrak{T}}+\frac{\partial}{\partial v}\frac{\mathfrak{E}\frac{\partial P}{\partial v}-\mathfrak{F}\frac{\partial P}{\partial u}}{\mathfrak{T}}\right)$$

(7)
$$\varrho_1+\varrho_2=-2P-\Delta_e^2 P.$$

§ 103.

Strahlensysteme.

Die mit der Einheitskugel zusammenhängenden Formeln finden eine wichtige Anwendung in der Theorie der Strahlensysteme, die die Theorie der Normalen einer Fläche als besonderen Fall enthält. Ein Strahlensystem ist, allgemein gesprochen, eine zweifache Mannigfaltigkeit von Geraden, auf deren jeder eine bestimmte Richtung bevorzugt ist. Versteht man in den Gleichungen

(1)
$$\frac{\mathfrak{x}-x_0}{X}=\frac{\mathfrak{y}-y_0}{Y}=\frac{\mathfrak{z}-z_0}{Z}$$

unter x_0, y_0, z_0, X, Y, Z Funktionen zweier unabhängigen Variablen u und v, so stellen sie ein Strahlensystem dar. Zwischen den Größen X, Y, Z kann man, der Allgemeinheit unbeschadet, die Identität

(2)
$$X^2+Y^2+Z^2=1$$

gelten lassen, sodaß sie, wie bisher, den Richtungskosinus eines Strahles gleich, nicht bloß proportional sind. Die Punkte $(x_0\,y_0\,z_0)\equiv A_0$ füllen eine Fläche, die Leitfläche des Strahlensystems, aus; durch jeden solchen Punkt geht ein Strahl des Systems hindurch. Da die Gleichungen (1) auf die Form

(3)
$$\mathfrak{x}=k\mathfrak{z}+l,\qquad \mathfrak{y}=m\mathfrak{z}+n$$

oder eine ihr äquivalente gebracht werden können, so kann man auf unendlich viele Weisen eine Fläche als Leitfläche annehmen.

Über den Winkel zweier benachbarten Strahlen im Strahlensystem ist nichts Neues zu sagen; er wird durch das Linienelement der Einheitskugel

$$(4) \qquad d\sigma = \sqrt{dX^2 + dY^2 + dZ^2}$$

gemessen. Kennte man außer diesem Winkel noch die Bestimmungsstücke des kürzesten Abstandes der beiden Strahlen, so würde die Lage eines von ihnen gegen den anderen fixiert sein.

In den Gleichungen (1) mögen den Parametern u, v feste Werte beigelegt werden, sodaß sie einen bestimmten Strahl des Systems darstellen. Die Gleichungen eines anderen Strahles, der vorläufig dem ersten nicht unendlichnahe zu sein braucht, seien

$$(5) \qquad \frac{\mathfrak{x} - x_1}{X_1} = \frac{\mathfrak{y} - y_1}{Y_1} = \frac{\mathfrak{z} - z_1}{Z_1}.$$

Während also x_0 für $x_0(u, v), \ldots, Z$ für $Z(u, v)$ steht, sind $x_1, \ldots Z_1$ die Werte dieser Funktionen für ein von (u, v) verschiedenes Argumentenpaar (u_1, v_1). Der kürzeste Abstand p der beiden Geraden (1) und (5) wird durch die Formel

$$(6) \qquad p = \frac{\varepsilon_0}{W} \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ X & Y & Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \end{vmatrix}$$

bestimmt; hierin ist

$$(7) \qquad W = \sqrt{\Sigma (YZ_1 - ZY_1)^2}$$

und ε_0 das Vorzeichen der Determinante. Die gerade Linie, auf der der Abstand p liegt, steht auf (1) und (5) senkrecht, also sind ihre Richtungskosinus den Größen $YZ_1 - ZY_1, \ldots$ proportional. Bevorzugt man eine bestimmte Richtung (ABC) des kürzesten Abstandes, indem man

$$(8) \qquad A = \frac{YZ_1 - ZY_1}{W}, \qquad B = \frac{ZX_1 - XZ_1}{W}, \qquad C = \frac{XY_1 - YX_1}{W}$$

setzt, so ist die durch die Folge von Richtungen

$$(XYZ), \qquad (X_1 Y_1 Z_1), \qquad (ABC)$$

bestimmte Windung positiv.

Die von A_0 aus gemessene Abszisse des Fußpunktes des kürzesten Abstandes auf dem ersten Strahl heiße r, ferner sei w der Winkel der beiden Strahlen. Dann ist

$$(9) \qquad r = \frac{1}{W^2} \sum (x_1 - x_0)(X - X_1 \cos w).$$

Jetzt sei der zweite Strahl dem ersten benachbart:

$$u_1 = u + du, \qquad v_1 = v + dv$$
$$x_1 = x_0 + dx_0, \qquad X_1 = X + dX$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Die Gleichungen (7), (6), (8) und (9) gehen über in

(10) $$W = \sqrt{\Sigma dX^2} \equiv d\sigma$$

(11) $$p = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\Sigma dX^2}} \begin{vmatrix} dx_0 & dy_0 & dz_0 \\ X & Y & Z \\ dX & dY & dZ \end{vmatrix}$$

(12) $$A = \frac{YdZ - ZdY}{\sqrt{\Sigma dX^2}}, \ldots$$

(13) $$r = -\frac{\Sigma dx_0 dX}{\Sigma dX^2}.$$

§ 104.

Hamiltonscher Satz. Grenzpunkte.

Von diesen verschiedenen Ausdrücken soll zunächst r genauer untersucht werden. Setzt man

$$dx_0 = \frac{\partial x_0}{\partial u} du + \frac{\partial x_0}{\partial v} dv, \ldots$$
$$dX = \frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial v} dv, \ldots,$$

so werden Zähler und Nenner quadratische Differentialformen, und zwar sei

(1) $$-\sum dx_0 dX = \mathsf{B}$$

(2) $$\sum dX^2 = \mathsf{E}.$$

Ferner werde das System von Bezeichnungen

(3) $$-\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial u} = L, \qquad -\sum \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v} = M$$
$$-\sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial u} = \overline{M}, \qquad -\sum \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial v} = N$$

eingeführt, sodaß

(4) $$-\sum dx_0 dX = Ldu^2 + (M + \overline{M})du\,dv + Ndv^2$$

ist. Die Formel

(5) $$r = \frac{\mathsf{B}}{\mathsf{E}}$$

lautet dann ausgeschrieben

$$r = \frac{L\,du^2 + (M + \overline{M})\,du\,dv + N\,dv^2}{\mathfrak{E}\,du^2 + 2\mathfrak{F}\,du\,dv + \mathfrak{G}\,dv^2} \tag{6}$$

oder

$$r = \frac{L + (M + \overline{M})\lambda + N\lambda^2}{\mathfrak{E} + 2\mathfrak{F}\lambda + \mathfrak{G}\lambda^2}. \tag{7}$$

Bestünde das Strahlensystem aus den Normalen der Leitfläche, so würden L, M, N die frühere Bedeutung haben und $\overline{M} = M$ sein.

An die Gleichung (7) lassen sich nun genau dieselben Fragen knüpfen, die in der Theorie der Normalkrümmung aufgeworfen und beantwortet worden sind. Treten doch jetzt nur

$$\frac{1}{2}(M + \overline{M}), \quad \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{G}$$

an die Stelle von

$$M \quad , \quad E, \quad F, \quad G$$

in dem Ausdruck S. 75 (1). L und N kommen hier und dort in gleicher Weise vor, nur daß sie hier eine allgemeinere Bedeutung haben.

Namentlich kann man nach den größten und kleinsten Werten von r fragen, wenn man diese Größe als Funktion von λ betrachtet. Verfolgt man zu dem Ende die Untersuchung im § 24 Schritt für Schritt, so findet man als notwendige Bedingung

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{E}\,du + \mathfrak{F}\,dv \quad , & \mathfrak{F}\,du + \mathfrak{G}\,dv \\ L\,du + \frac{M + \overline{M}}{2}\,dv, & \frac{M + \overline{M}}{2}\,du + N\,dv \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Ihre linke Seite unterscheidet sich nur um einen rein numerischen Faktor von der Funktionaldeterminante der beiden quadratischen Formen E und B (vgl. S. 76 (9)). Mit den Wurzeln λ_1 und λ_2 der quadratischen Gleichung (8) hängen die zugehörigen Werte von r mittels der Formeln

$$r_i = \frac{\frac{M + \overline{M}}{2} + N\lambda_i}{\mathfrak{F} + \mathfrak{G}\lambda_i} \qquad (i = 1, 2) \tag{9}$$

oder

$$r_i = \frac{L + \frac{M + \overline{M}}{2}\lambda_i}{\mathfrak{E} + \mathfrak{F}\lambda_i} \qquad (i = 1, 2) \tag{10}$$

zusammen. Die Elimination von λ_i liefert für r_1 und r_2 die quadratische Gleichung

$$(11)\qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{E}r - L, & \mathfrak{F}r - \frac{M+\overline{M}}{2} \\ \mathfrak{F}r - \frac{M+\overline{M}}{2}, & \mathfrak{G}r - N \end{vmatrix} = 0,$$

d. h.

$$(12)\quad (\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2)r^2-(\mathfrak{G}L-\mathfrak{F}(M+\overline{M})+\mathfrak{E}N)r+LN-\left(\frac{M+\overline{M}}{2}\right)^2=0,$$

woraus die elementaren symmetrischen Funktionen von r_1 und r_2 in der Form

$$(13)\qquad r_1+r_2=\frac{\mathfrak{G}L-\mathfrak{F}(M+\overline{M})+\mathfrak{E}N}{\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2}$$

$$(14)\qquad r_1r_2=\frac{LN-\left(\frac{M+\overline{M}}{2}\right)^2}{\mathfrak{E}\mathfrak{G}-\mathfrak{F}^2}$$

hervorgehen.

Der Realitätsbeweis für die Wurzeln von (8) und (12) (vgl. S. 78) bleibt ebenfalls bestehen.

In der Flächentheorie ist die simultane Transformation der beiden Fundamentalformen A und B in algebraische Summen von Quadraten linearer Formen behandelt und für den Beweis des Eulerschen Satzes verwertet worden (S. 88—89). Der in der Eulerschen Formel vorkommende Winkel tritt dabei von selbst auf (S. 89). Offenbar würde es nicht zweckmäßig sein, gerade diesen Winkel auch in der Theorie der Strahlensysteme zu benutzen, wenigstens so lange es sich um diese Theorie als solche, nicht um ihre Anwendung auf eine spezielle Fläche handelt. Vielmehr wird man die Kennzeichnung der Winkelgröße, auf die es an dieser Stelle ankommt, aus den Formeln selbst entnehmen müssen. Den Ausgangspunkt der Untersuchung bilden, entsprechend S. 88 (2), die Gleichungen

$$(15)\qquad \begin{aligned} \mathsf{E} &= \mathfrak{Q}_1^2+\mathfrak{Q}_2^2 \\ \mathsf{B} &= r_1\mathfrak{Q}_1^2+r_2\mathfrak{Q}_2^2, \end{aligned}$$

vermöge deren

$$(16)\qquad r=\frac{r_1\mathfrak{Q}_1^2+r_2\mathfrak{Q}_2^2}{\mathfrak{Q}_1^2+\mathfrak{Q}_2^2}$$

wird. Daß die Koeffizienten r_1 und r_2 mit den vorher ebenso bezeichneten Größen übereinstimmen, ergibt sich genau so wie dort. Für die Koeffizienten der linearen Differentialformen

$$(17)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{Q}_1 &\equiv q_{11}du+q_{12}dv \\ \mathfrak{Q}_2 &\equiv q_{21}du+q_{22}dv \end{aligned}$$

gelten u. a. die Gleichungen

$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
q_{11}^2 + q_{21}^2 &= \mathfrak{E} \\
q_{11}q_{12} + q_{21}q_{22} &= \mathfrak{F} \\
q_{12}^2 + q_{22}^2 &= \mathfrak{G}.
\end{aligned}
$$

Führt man noch einen zweiten Nachbarstrahl ein, der zu den Parameterwerten $u + \delta u$, $v + \delta v$ gehört, und setzt

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
q_{11}\delta u + q_{12}\delta v &= \overline{\mathfrak{Q}}_1 \\
q_{21}\delta u + q_{22}\delta v &= \overline{\mathfrak{Q}}_2,
\end{aligned}
$$

so erhält man unter Benutzung von (18)

$$
(20)\qquad \mathfrak{Q}_1\overline{\mathfrak{Q}}_1 + \mathfrak{Q}_2\overline{\mathfrak{Q}}_2 = \mathfrak{E}\,du\,\delta u + \mathfrak{F}(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \mathfrak{G}\,dv\,\delta v.
$$

Die Bedeutung der rechten Seite dieser Formel ist leicht anzugeben. Bezeichnet nämlich w' den Winkel, den die kürzesten Abstände des erstangenommenen Strahls von den beiden Nachbarstrahlen miteinander bilden, so wird nach S. 349 (12)

$$
(21)\qquad \cos w' = \frac{\Sigma(Y\,dZ - Z\,dY)(Y\,\delta Z - Z\,\delta Y)}{\sqrt{\Sigma dX^2}\sqrt{\Sigma \delta X^2}},
$$

d. h.

$$
d\sigma\,\delta\sigma \cos w' = \begin{Vmatrix} X & Y & Z \\ dX & dY & dZ \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} X & Y & Z \\ \delta X & \delta Y & \delta Z \end{Vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} \sum X^2, & \sum X\delta X \\ \sum X dX, & \sum dX\delta X \end{vmatrix}
$$

$$
= \sum dX\,\delta X,
$$

$$
(22)\qquad d\sigma\,\delta\sigma \cos w' = \mathfrak{E}\,du\,\delta u + \mathfrak{F}(du\,\delta v + dv\,\delta u) + \mathfrak{G}\,dv\,\delta v,
$$

mithin schließlich

$$
(23)\qquad d\sigma\,\delta\sigma \cos w' = \mathfrak{Q}_1\overline{\mathfrak{Q}}_1 + \mathfrak{Q}_2\overline{\mathfrak{Q}}_2.
$$

Nun ist für $\mathfrak{Q}_2 = 0$ nach (16) $r = r_1$, und ebenso entsprechen einander $\mathfrak{Q}_1 = 0$ und $r = r_2$. Läßt man demnach in der allgemeinen Formel (23) $\frac{\delta v}{\delta u}$ mit λ_1, $\frac{dv}{du}$ mit λ_2 zusammenfallen, so hat man

$$
\mathfrak{Q}_1 = 0, \qquad \overline{\mathfrak{Q}}_2 = 0
$$

zu setzen. Dann wird

$$
(24)\qquad \cos w' = 0;
$$

die beiden von den Punkten $r = r_1$ und $r = r_2$ ausgehenden Abstandsrichtungen — wie man sie kurz bezeichnen kann — stehen aufeinander senkrecht.

Es werde jetzt in der Formel (23) nur einer der beiden Nachbarstrahlen spezialisiert, und zwar sei $\frac{\partial v}{\partial u} = \lambda_1$, also $\overline{\mathfrak{Q}}_2 = 0$. Der Winkel, den eine beliebige Abstandsrichtung mit der zu $r = r_1$ gehörigen bildet, heiße ω. Man erhält

$$d\sigma^2 \delta\sigma^2 \cos^2\omega = \mathfrak{Q}_1^2 \overline{\mathfrak{Q}}_1^2,$$

worin noch

$$d\sigma^2 = \mathfrak{Q}_1^2 + \mathfrak{Q}_2^2, \qquad \delta\sigma^2 = \overline{\mathfrak{Q}}_1^2$$

zu setzen ist; also

(25) $$\cos^2\omega = \frac{\mathfrak{Q}_1^2}{\mathfrak{Q}_1^2 + \mathfrak{Q}_2^2}, \qquad \sin^2\omega = \frac{\mathfrak{Q}_2^2}{\mathfrak{Q}_1^2 + \mathfrak{Q}_2^2}.$$

Die Gleichung (16)

$$r = \frac{r_1 \mathfrak{Q}_1^2 + r_2 \mathfrak{Q}_2^2}{\mathfrak{Q}_1^2 + \mathfrak{Q}_2^2}$$

liefert

(26) $$r = r_1 \cos^2\omega + r_2 \sin^2\omega.$$

Dies ist der Hamiltonsche Satz der Theorie der Strahlensysteme. Er läßt am anschaulichsten hervortreten (vgl. S. 85), daß r_1 und r_2 die Eigenschaft des Maximums und Minimums wirklich haben. Die Punkte eines Strahles, die Fußpunkte kürzester Abstände von benachbarten Strahlen sein können, liegen also auf einem begrenzten Stück des Strahles. Die durch die Abszissen r_1 und r_2 selbst bestimmten Endpunkte dieses Stückes heißen Grenzpunkte.

Läßt man den betrachteten Strahl alle möglichen Lagen im System annehmen, so beschreibt jeder Grenzpunkt eine Grenzfläche.

§ 105.

Brennpunkte, Mittelpunkt.

Von den Bestimmungsstücken der Lage eines Nachbarstrahls zu einem gegebenen betrachten wir zweitens den kürzesten Abstand selbst,

(1) $$p = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{\Sigma dX^2}} \begin{vmatrix} dx_0 & dy_0 & dz_0 \\ X & Y & Z \\ dX & dY & dZ \end{vmatrix}$$

(S. 349 (11)). Bei Hinzuziehung der unmittelbar folgenden Formel kann

(2) $$p = \varepsilon_0 \sum A\, dx_0$$

geschrieben werden. Dabei ist

(3) $$A\, d\sigma = \left(Y\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial Y}{\partial u}\right) du + \left(Y\frac{\partial Z}{\partial v} - Z\frac{\partial Y}{\partial v}\right) dv$$

oder, nach S. 335 (7, 8),

$$(4)\qquad A\,d\sigma = \frac{1}{\varepsilon\mathfrak{T}}\left(\left(\mathfrak{E}\frac{\partial X}{\partial v} - \mathfrak{F}\frac{\partial X}{\partial u}\right)du + \left(\mathfrak{F}\frac{\partial X}{\partial v} - \mathfrak{G}\frac{\partial X}{\partial u}\right)dv\right).$$

Multipliziert man mit dx_0, bildet die Summe auf der rechten Seite von (2) und zieht die beiden Vorzeichen ε_0 und ε in $-\varepsilon'$ zusammen, so ergibt sich

$$(5)\qquad p = \frac{\varepsilon'}{\mathfrak{T}\,d\sigma}\begin{vmatrix} \mathfrak{E}du + \mathfrak{F}dv, & \mathfrak{F}du + \mathfrak{G}dv \\ Ldu + Mdv, & \overline{M}du + Ndv \end{vmatrix}.$$

Die durch Nullsetzung der Determinante entstehende quadratische Gleichung

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{E}du + \mathfrak{F}dv, & \mathfrak{F}du + \mathfrak{G}dv \\ Ldu + Mdv, & \overline{M}du + Ndv \end{vmatrix} = 0$$

definiert, ebenso wie die Gleichung S. 350 (8), zwei bestimmte, dem gegebenen benachbarte Strahlen. Auf den ersten Anblick scheint es, als ob sie diesen schneiden müßten; aber im allgemeinen läßt sich nur behaupten, daß ihr kürzester Abstand von ihm eine unendlichkleine Größe höherer Ordnung ist. Der nach der Methode des Unendlichkleinen abgeleitete Ausdruck (5) oder (1), der von derselben Ordnung ist wie $d\sigma$, gilt nämlich nur so lange, wie die Glieder niedrigster Dimension nicht von selbst verschwinden oder gleich Null gesetzt werden.

Das Bildungsgesetz der linken Seite von (6) läßt sich in ähnlicher Weise beschreiben wie das der Determinante, deren Nullsetzung die beiden Werte λ_1 und λ_2 geliefert hat. Man setze den quadratischen Formen E und B entsprechend die bilinearen Differentialformen

$$\sum dX\,\delta X \equiv (\mathfrak{E}du + \mathfrak{F}dv)\delta u + (\mathfrak{F}du + \mathfrak{G}dv)\delta v$$

$$-\sum dx_0\,\delta X \equiv (Ldu + Mdv)\delta u + (\overline{M}du + Ndv)\delta v$$

an und stelle aus ihnen die Funktionaldeterminante inbezug auf δu und δv her.

Zu jeder Wurzel $\frac{dv}{du} \equiv \lambda$ der Gleichung (6) gehört ein Wert von r vermöge der Formel

$$(7)\qquad r = \frac{L + (M + \overline{M})\lambda + N\lambda^2}{\mathfrak{E} + 2\mathfrak{F}\lambda + \mathfrak{G}\lambda^2}$$

(S. 350 (7)). Man kann diese einfacher darstellen, indem man (6) in der Gestalt

$$(8)\qquad \frac{L + M\lambda}{\mathfrak{E} + \mathfrak{F}\lambda} = \frac{\overline{M} + N\lambda}{\mathfrak{F} + \mathfrak{G}\lambda}$$

schreibt und daraus

$$(9)\qquad \begin{aligned} L + M\lambda &= \varrho(\mathfrak{E} + \mathfrak{F}\lambda) \\ \overline{M} + N\lambda &= \varrho(\mathfrak{F} + \mathfrak{G}\lambda) \end{aligned}$$

entnimmt, wo ϱ den gemeinsamen Wert der beiden Quotienten in (8) bezeichnet. Die Einführung in (7) liefert unmittelbar

$$r = \varrho,$$

d. h. die Größe ϱ ist zugleich Fußpunktsabszisse für die jetzt betrachteten kürzesten Abstände. Sie genügt der durch Elimination von λ aus (9) entstehenden Gleichung

$$(10)\qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{E}\varrho - L, & \mathfrak{F}\varrho - M \\ \mathfrak{F}\varrho - \overline{M}, & \mathfrak{G}\varrho - N \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(11)\quad (\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2)\varrho^2 - (\mathfrak{G}L - \mathfrak{F}(M + \overline{M}) + \mathfrak{E}N)\varrho + LN - M\overline{M} = 0.$$

Die beiden elementaren symmetrischen Funktionen der Wurzeln sind

$$(12)\qquad \varrho_1 + \varrho_2 = \frac{\mathfrak{G}L - \mathfrak{F}(M + \overline{M}) + \mathfrak{E}N}{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}$$

$$(13)\qquad \varrho_1\varrho_2 = \frac{LN - M\overline{M}}{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2}.$$

Die zu $\varrho = \varrho_1$ und $\varrho = \varrho_2$ gehörenden Punkte werden die Brennpunkte des Strahls genannt. Sie brauchen nicht, wie die Grenzpunkte, reell zu sein. Jeder Brennpunkt beschreibt eine Brennfläche, wenn der Strahl das System durchläuft.

Die Gleichung (12) stimmt genau mit der für $r_1 + r_2$ (S. 351 (13)) überein. Es ist also

$$(14)\qquad \varrho_1 + \varrho_2 = r_1 + r_2,$$

und die beiden durch die Grenzpunkte einerseits, die Brennpunkte andererseits begrenzten Strecken haben denselben Mittelpunkt. Er heißt Mittelpunkt des Strahls, sein geometrischer Ort die Mittelfläche des Strahlensystems.

Von den beiden eben erwähnten Strecken sei $2d$ die zwischen den Grenzpunkten, 2δ die zwischen den Brennpunkten. Aus

$$4d^2 = (r_1 - r_2)^2, \qquad 4\delta^2 = (\varrho_1 - \varrho_2)^2$$

folgt

$$4(d^2 - \delta^2) = (r_1 + r_2)^2 - 4r_1r_2 - (\varrho_1 + \varrho_2)^2 + 4\varrho_1\varrho_2,$$

d. h. wegen (14), (13) und S. 351 (14):

$$d^2 - \delta^2 = \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\left(LN - M\overline{M} - \left(LN - \left(\frac{M + \overline{M}}{2}\right)^2\right)\right)$$

(15) $$d^2 - \delta^2 = \frac{(M - \overline{M})^2}{4\mathfrak{T}^2},$$

$$d \geqq \delta,$$

d. h. die Grenzpunkte sind im allgemeinen weiter voneinander — und damit auch vom Mittelpunkt — entfernt als die Brennpunkte. Nach der Erklärung der Grenzpunkte versteht sich das übrigens von selbst; denn sie waren die Endpunkte der Strecke auf dem Strahl, von deren Punkten überhaupt kürzeste Abstände ausgehen können.

§ 106.

Brennflächen.

Die Gleichungen S. 350 (8), S. 354 (6) kann man, ebenso wie in der Flächentheorie z. B. die Bestimmungsgleichung für die Haupttangenten, als Differentialgleichungen erster Ordnung und zweiten Grades auffassen, indem man u und v veränderlich sein läßt. Integriert liefern sie je zwei funktionale Beziehungen oder vielmehr Scharen von Beziehungen zwischen u und v. Jedem solchen Integral

(1) $$\varphi(u, v) = C$$

entspricht für einen gegebenen Wert von C eine Kurve auf der Leitfläche, eine Schar von Strahlen im Strahlensystem. Besonders anschauliche Resultate erhält man beim Ausgehen von der zweiten der genannten Gleichungen,

(2) $$\begin{vmatrix} \mathfrak{E}du + \mathfrak{F}dv, & \mathfrak{F}du + \mathfrak{G}dv \\ Ldu + Mdv, & Mdu + Ndv \end{vmatrix} = 0.$$

Man bestimme nämlich die beiden Brennpunkte A_1 und A_2 auf einem beliebigen Strahl und gehe von einem von ihnen, etwa A_1, längs des kürzesten Abstandes (der für den Brennpunkt ein Minimum war) zu einem benachbarten Strahl fort. Auf ihm liegen wieder zwei Brennpunkte, davon einer, B_1, dem Punkte A_1 unendlich nahe. Von B_1 gehe man, ebenso wie vorher, zu einem zweiten Nachbarstrahl über, und so fort.

Es werde nun der Ort der Brennpunkte $\mathsf{A}_1, \mathsf{B}_1, \ldots$ untersucht. Sind ξ_1, η_1, ζ_1 die Koordinaten von A_1, so ist

(3) $$\begin{aligned} \xi_1 &= x_0 + \varrho_1 X \\ \eta_1 &= y_0 + \varrho_1 Y \\ \zeta_1 &= z_0 + \varrho_1 Z \end{aligned}$$

die Darstellung dieses Ortes, wenn die Argumente u und v der vorkommenden Funktionen variabel, aber durch die zu ϱ_1 gehörende Beziehung (1) verbunden sind. Wir fragen nach der Tangente der Kurve (3). Die Differentiation der ersten Gleichung ergibt

$$d\xi_1 = dx_0 + \varrho_1 dX + X d\varrho_1. \tag{4}$$

Nun ist die Voraussetzung (1) oder (2) gleichbedeutend mit

$$\begin{vmatrix} dx_0 & dy_0 & dz_0 \\ X & Y & Z \\ dX & dY & dZ \end{vmatrix} = 0 \tag{5}$$

(S. 353—354). Stellt man diese Gleichung,

$$(Ydz_0 - Zdy_0)dX + (Zdx_0 - Xdz_0)dY + (Xdy_0 - Ydx_0)dZ = 0,$$

mit

$$XdX + YdY + ZdZ = 0$$

zusammen, so erhält man

$$\mu dX = (Zdx_0 - Xdz_0)Z - (Xdy_0 - Ydx_0)Y,$$

$$\mu dX = dx_0 - X\sum X dx_0, \tag{6}$$

und der Proportionalitätsfaktor μ bestimmt sich durch Multiplikation der drei zusammengehörenden Gleichungen mit dX, dY, dZ und Addition:

$$\mu \sum dX^2 = \sum dx_0 dX,$$

$$\mu = -\frac{\mathsf{B}}{\mathsf{E}} = -\varrho_1.$$

Daher wird

$$dx_0 + \varrho_1 dX = X\sum X dx_0 \tag{7}$$

und nach (4)

$$d\xi_1 = X(d\varrho_1 + \sum X dx_0). \tag{8}$$

Hieraus folgt schließlich

$$d\xi_1 : d\eta_1 : d\zeta_1 = X : Y : Z,$$

die Strahlen selbst fallen mit den Tangenten der betrachteten Kurve zusammen, ihr Ort ist eine abwickelbare Fläche (§ 88). Die Strahlen eines Systems, dessen Brennflächen reell sind, lassen sich demnach auf zwei verschiedene Weisen zu einer Schar abwickelbarer Flächen zusammenfassen. Die Rückkehrkanten dieser Flächen füllen die Brennflächen aus; alle Strahlen des Systems berühren also beide Brennflächen.

§ 107.

Geradlinige Flächen. Striktionslinie.

Es ist von Interesse, die letzten Untersuchungen in einer bestimmten Hinsicht zu spezialisieren, indem man nämlich nur von einer einzigen einfachen Mannigfaltigkeit stetig aufeinander folgender Strahlen ausgeht. Der Ort einer solchen Schar von Strahlen ist eine geradlinige Fläche (S. 257). Von Brennpunkten ist nicht mehr die Rede, sondern auf jedem Strahl nur von einem Fußpunkt eines kürzesten Abstandes. Der geometrische Ort dieser Fußpunkte heißt die Striktionslinie der geradlinigen Fläche.

Betrachtet man in den Gleichungen

$$(1) \qquad \frac{\mathfrak{x} - x_0}{X} = \frac{\mathfrak{y} - y_0}{Y} = \frac{\mathfrak{z} - z_0}{Z}$$

die sechs Größen x_0, y_0, z_0, X, Y, Z als Funktionen einer Variablen v und setzt demnach z. B. $dx_0 = x_0' dv$, $dX = X'dv$, so bleiben die auf den kürzesten Abstand bezüglichen Formeln des § 103 bestehen. Die Striktionslinie hat die Gleichungen

$$(2) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{x} &= x_0 + rX \\ \mathfrak{y} &= y_0 + rY \\ \mathfrak{z} &= z_0 + rZ, \end{aligned}$$

wenn darin

$$(3) \qquad r = -\frac{\Sigma x_0' X'}{\Sigma X'^2}$$

angenommen wird.

Es möge beispielsweise für das hyperbolische Paraboloid

$$(4) \qquad 2z = \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} \qquad (a > 0, \; b > 0)$$

die Striktionslinie bestimmt werden. Oder vielmehr die beiden Striktionslinien, denn man kann die Fläche auf zwei Arten als Ort einer Schar gerader Linien betrachten. Jede der Scharen ist einer festen Ebene parallel. Ihren analytischen Ausdruck finden diese Tatsachen darin, daß die Gleichung (4) sowohl durch Elimination des Parameters t aus

$$(5) \qquad \begin{aligned} 2z &= \left(\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}}\right) t \\ t &= \frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{b}} \end{aligned}$$

wie des Parameters τ aus

$$(6)\qquad \begin{aligned} 2z &= \left(\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{b}}\right)\tau \\ \tau &= \frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}} \end{aligned}$$

hervorgeht.

Es sei t_1 ein von t verschiedener Wert des ersten Parameters. Der kürzeste Abstand der beiden Geraden (5) und

$$(7)\qquad \begin{aligned} 2z &= \left(\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}}\right)t_1 \\ t_1 &= \frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{b}} \end{aligned}$$

kann als Abstand zweier Ebenen angesehen werden, deren jede durch eine der beiden Geraden hindurchgeht und der anderen parallel ist. Die Fußpunkte des kürzesten Abstandes liegen auf der Schnittlinie zweier Ebenen, von denen jede wieder eine der beiden Geraden enthält und die auf dem Paar paralleler Ebenen senkrecht sind. Hier ist das erste Ebenenpaar unmittelbar gegeben, nämlich durch die zweiten Gleichungen (5) und (7). Man hat also, um den Abstandsfußpunkt auf der ersten Geraden zu finden, nur eine Ebene durch die zweite Gerade zu legen,

$$(8)\qquad \left(\frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}}\right)t_1 - 2z + \mu\left(\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{b}} - t_1\right) = 0,$$

und μ so zu wählen, daß sie auf

$$\frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{b}} = 0$$

senkrecht wird, d. h.

$$\mu = \frac{a-b}{a+b}t_1$$

zu setzen; hierauf die aus (8) entstehende Gleichung mit (5) zusammenzustellen. Die Koordinaten des Fußpunktes werden dann durch

$$(9)\qquad \begin{aligned} 2z &= \frac{a-b}{a+b}tt_1 \\ \frac{x}{\sqrt{a}} + \frac{y}{\sqrt{b}} &= \frac{a-b}{a+b}t_1 \\ \frac{x}{\sqrt{a}} - \frac{y}{\sqrt{b}} &= t \end{aligned}$$

bestimmt. Nimmt man jetzt die zweite erzeugende Gerade der ersten unendlichnahe, setzt also $t_1 = t + dt$, vernachlässigt die unendlichkleinen Größen und eliminiert t aus den beiden letzten Gleichungen, so findet man

(10) $$\frac{x}{a\sqrt{a}} + \frac{y}{b\sqrt{b}} = 0.$$

Die Flächengleichung, welche die zweite durch die Elimination entstehende Gleichung sein würde, erhält unter Benutzung von (10) die Form

$$2cz = x^2.$$

Die Striktionslinie ist eine Parabel.

In einer zweiten Striktionslinie derselben Art wird das Paraboloid durch die Ebene

(11) $$\frac{x}{a\sqrt{a}} - \frac{y}{b\sqrt{b}} = 0$$

geschnitten.

Man kann fragen, wann die durch (1) oder

(12) $$\begin{aligned} x &= x_0(v) + u\,X(v) \\ y &= y_0(v) + u\,Y(v) \\ z &= z_0(v) + u\,Z(v) \end{aligned}$$

dargestellte geradlinige Fläche abwickelbar ist, und die Entscheidung darüber aus der Theorie des Krümmungsmaßes entnehmen. Das Quadrat des Linienelements wird

(13) $$ds^2 = du^2 + 2\sum x_0' X\,du\,dv + \sum (x_0' + uX')^2 dv^2,$$

und die Fundamentalgrößen haben demnach die Werte

(14) $$E = 1, \qquad F = \sum x_0' X, \qquad G = \sum (x_0' + uX')^2,$$

d. h. E ist konstant, F eine Funktion von v, G eine ganze Funktion zweiten Grades von u, deren Koeffizienten Funktionen von v sind. Setzt man

(15) $$G = \alpha u^2 + 2\beta u + \gamma,$$

so ist

(16) $$\alpha = \sum X'^2, \qquad \beta = \sum x_0' X', \qquad \gamma = \sum x_0'^2.$$

Für $E = 1$, $F = F(v)$ ergibt sich aus S. 120 (7)

(17) $$K = \frac{1}{4(G - F^2)^2}\left(\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 - 2(G - F^2)\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right),$$

und die Einführung des Wertes (15) in den Zähler liefert

(18) $$(G - F^2)^2 K = \beta^2 - \alpha\gamma + \alpha F^2.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung läßt sich aber unmittelbar zu dem kürzesten Abstande in Beziehung setzen. Denn die Formel S. 349 (11) lautet in den hier benutzten Bezeichnungen

(19)
$$p = \frac{\varepsilon\, dv}{\sqrt{\Sigma X'^2}} \begin{vmatrix} x_0' & y_0' & z_0' \\ X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix},$$

und andererseits wird

(20)
$$(G - F^2)^2 K = - \begin{vmatrix} x_0' & y_0' & z_0' \\ X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix}^2.$$

Die Fläche kann also nur dann abwickelbar sein, wenn der kürzeste Abstand benachbarter Erzeugenden eine unendlichkleine Größe höherer Ordnung ist.

Geht man umgekehrt von einer beliebigen abwickelbaren Fläche aus, so ist für eine solche der kürzeste Abstand benachbarter Geraden ein Unendlichkleines höherer Ordnung. Dies ergibt sich sofort mittels der Gleichungen S. 304 (15) oder auch der obigen Gleichungen (12), wenn man darin X, Y, Z den Ableitungen von x_0, y_0, z_0 proportional setzt. Die Fläche erscheint dann als Tangentenfläche der Rückkehrkante (§ 88). Wenn nun auch aus bekannten Gründen die Ausdrucksweise zulässig ist: Eine Tangente geht durch zwei unendlichnahe Kurvenpunkte hindurch, oder: Zwei unendlichnahe Tangenten haben einen Kurvenpunkt gemein, so ist nach dem Obigen doch festzuhalten, daß es einer weiteren Spezialisierung der Voraussetzungen bedarf, damit die Tangenten einer Raumkurve sich wirklich schneiden.

Während im allgemeinen die Geraden der Schar die Striktionslinie nicht berühren, so ist ersichtlich, daß für eine abwickelbare Fläche die Striktionslinie mit der Rückkehrkante identisch ist. Aus den Formeln (2, 3), d. h., nach Heranziehung von (16), den Gleichungen

(21)
$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= x_0 - \frac{\beta}{\alpha} X \\ \mathfrak{y} &= y_0 - \frac{\beta}{\alpha} Y \\ \mathfrak{z} &= z_0 - \frac{\beta}{\alpha} Z, \end{aligned}$$

in denen man wieder $X, \ldots$ proportional zu $x_0', \ldots$, also $x_0' = \mu X, \ldots$ zu denken hat, ergibt sich dies unmittelbar wegen $\beta \equiv \mu \Sigma X X' = 0$; es wird $\mathfrak{x} = x_0, \ldots$.

Allgemein können die Formeln dieses Paragraphen dazu benutzt werden, die geradlinigen Flächen zu untersuchen, die mit einer gegebenen Raumkurve zusammenhängen, soweit sie nicht von vornherein ihrer Definition nach abwickelbar sind; also namentlich den geometrischen Ort der Hauptnormalen oder der Binormalen.

§ 108.

Bedingung für ein Normalensystem.

Unter den Strahlensystemen sind diejenigen besonders ausgezeichnet, deren Strahlen als Normalen einer Fläche, wenn auch nicht gerade der Leitfläche, betrachtet werden können. Um die Bedingung für ein Normalensystem zu finden, denke man sich in den Gleichungen des Strahlensystems

(1) $$x = x_0 + rX, \ldots$$

r als eine noch zu bestimmende Funktion von u und v und drücke aus, daß X, Y, Z mit den Richtungskosinus der Normale der dann durch diese Gleichungen dargestellten Fläche übereinstimmen. Dafür notwendig und hinreichend sind die Bedingungen

$$\sum X \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \sum X \frac{\partial x}{\partial v} = 0,$$

d. h.

$$\sum X \left(\frac{\partial x_0}{\partial u} + r \frac{\partial X}{\partial u} + X \frac{\partial r}{\partial u} \right) = 0, \ldots$$

oder

(2) $$\sum X \frac{\partial x_0}{\partial u} = -\frac{\partial r}{\partial u}$$
$$\sum X \frac{\partial x_0}{\partial v} = -\frac{\partial r}{\partial v}.$$

Sie sind nur vereinbar für

(3) $$\frac{\partial}{\partial u} \sum X \frac{\partial x_0}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} \sum X \frac{\partial x_0}{\partial u}$$

oder

$$\sum \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial x_0}{\partial v} = \sum \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial x_0}{\partial u}.$$

Nach S. 349 (3) heißt diese Gleichung

(4) $$M = \bar{M}.$$

Umgekehrt: Wenn diese Beziehung oder die ihr äquivalente (3) besteht, so ist die lineare Differentialform

$$\left(\sum X \frac{\partial x_0}{\partial u} \right) du + \left(\sum X \frac{\partial x_0}{\partial v} \right) dv \equiv \sum X dx_0$$

ein vollständiges Differential, das mit $-dr(u, v)$ bezeichnet werden möge, sodaß die Gleichungen (2) gelten. Nach Bestimmung von r mittels Quadraturen setze man

(5) $$x_0 + rX = x, \ldots.$$

Dann wird

$$\sum X \frac{\partial x}{\partial u} \equiv \sum X \frac{\partial x_0}{\partial u} + \frac{\partial r}{\partial u} = 0,$$

und ebenso

$$\sum X \frac{\partial x}{\partial v} = 0.$$

X, Y, Z sind also Richtungskosinus der Normale der Fläche (5); die Bedingung (4) ist für ein Normalensystem nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend.

Die Formeln der Paragraphen 104 und 105 lehren, daß für ein Normalensystem die Grenzpunkte allenthalben mit den Brennpunkten zusammenfallen.

Durch die Gleichung

$$\sum X dx_0 = -dr$$

wird r nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Es gibt also, wenn überhaupt, eine ganze Schar von Flächen, auf denen die Strahlen des Systems senkrecht sind. Sie entstehen aus der Fläche (5) durch Einführung von $r + a$ an Stelle von r und haben von ihr in Richtung der gemeinsamen Normale den Abstand $\pm a$. Sie werden als Parallelflächen bezeichnet.

Man kann die Bedingung (3) so umformen, daß sie einen mit der Theorie der Biegung zusammenhängenden Satz hervortreten läßt. Die Größen $\frac{\partial x_0}{\partial u}, \ldots$ geben, durch $\sqrt{E_0}$ dividiert, die Richtungskosinus der Koordinatenlinie $v = \text{const.}$ auf der Leitfläche, und die entsprechende Bedeutung haben $\frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial x_0}{\partial v}, \ldots$ für die Koordinatenlinie $u = \text{const.}$ Setzt man also

$$(6) \qquad \sum \frac{1}{\sqrt{E_0}} \frac{\partial x_0}{\partial u} X = \cos w', \qquad \sum \frac{1}{\sqrt{G_0}} \frac{\partial x_0}{\partial v} X = \cos w'',$$

so sind w' und w'' die Winkel des Strahls mit den beiden Koordinatenlinien. Unter Benutzung dieser Ausdrücke wird

$$(7) \qquad M - \overline{M} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{E_0} \cos w'\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{G_0} \cos w''\right).$$

Betrachtet man nun als Ausgangsfläche eines zweiten Strahlensystems eine Biegungsfläche der Leitfläche und bezieht sie auf dieselben Parameter wie diese, sodaß E_0 und G_0 auf beiden Flächen die gleichen Werte haben; nimmt außerdem an, daß w' und w'' für die Biegungsfläche dieselben Funktionen von u und v sind wie für die Leitfläche, so hat der Ausdruck auf der rechten Seite von (7) für beide Flächen

denselben Wert. Das Strahlensystem bleibt mithin dann, wenn es ein Normalensystem ist, auch nach der Biegung ein solches.

Insbesondere gilt dieser Satz, wenn die Strahlen als Tangenten der Leitfläche angenommen werden. Man kann sich in diesem Fall die Fläche mit einer Schar von Kurven überzogen denken, deren Tangenten das Strahlensystem bilden. Diese Kurven seien die u-Linien des Koordinatensystems, ihre orthogonalen Trajektorien die v-Linien. Dann ist $w' = 0$, $w'' = \frac{\pi}{2}$,

$$M - \bar{M} = \frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v}.$$

Ist nun die Bedingung (4) erfüllt, so wird

$$\frac{\partial \sqrt{E_0}}{\partial v} = 0, \qquad E_0 = \varphi(u)^2,$$

$$ds_0^2 = \varphi(u)^2 du^2 + G_0 dv^2,$$

die Kurven $v =$ const. sind geodätisch. Das heißt: Wenn auf einer Fläche eine Schar von Kurven existieren soll, deren Tangenten Normalen einer anderen Fläche sind, so müssen diese Kurven geodätisch sein.

Wird umgekehrt eine Fläche auf ein beliebiges System orthogonal-geodätischer Koordinaten bezogen, so kann $E_0 = 1$, $F_0 = 0$ gesetzt werden. Für das System der Tangenten der Kurven $v =$ const. gilt $\cos w' = 1$, $\cos w'' = 0$, also $M - \bar{M} = 0$, die Tangenten der geodätischen Linien bilden ein Normalensystem.

IX. Abschnitt.

Spezielle Flächen, die mit einer gegebenen zusammenhängen.

§ 109.

Berührung zweier Flächen.

Die Flächen, die mit einer gegebenen in Zusammenhang stehen, zerfallen in zwei Gruppen: erstens spezielle Flächen, zu deren Einführung man veranlaßt wird, wenn man die gegebene in der unmittelbaren Nähe eines einzelnen Punktes untersucht; zweitens solche, bei denen zu einem Stück von endlicher Ausdehnung auch ein endliches Stück der gegebenen Fläche gehört. Die zweite Gruppe ist ungleich wichtiger als die erste, die daher nur kurz behandelt werden soll.

In den Anwendungen der Differentialrechnung auf ebene Kurven spielt die Theorie der Berührung eine Hauptrolle. Fragt man nach der einfachsten Linie, die eine vorgelegte Kurve in einem vorgeschriebenen Punkte berührt, so gelangt man nach Erledigung der Tangente alsbald zum Krümmungskreise, auf den sich die ganze Theorie der Krümmung stützt. Der Krümmungskreis hat mit der Kurve eine Berührung zweiter Ordnung, er oskuliert die Kurve.

Man könnte nun versucht sein, in die Theorie der krummen Flächen eine oskulierende Kugel einzuführen, als Gebilde, das mit dem Kreise die Eigenschaft teilt, in allen Punkten gleiche Krümmung zu haben. Allein eine einfache Überlegung lehrt, daß eine solche Kugel nur für besondere Punkte existieren kann.

Fragen wir zunächst, was es bedeuten soll, zwei Flächen haben in einem gegebenen Punkte A eine Berührung von einer bestimmten Ordnung. Damit überhaupt eine Berührung stattfinde, ist nötig, daß die Tangentialebenen beider Flächen in A übereinstimmen. Jede Ebene durch die gemeinsame Normale trifft dann die Flächen in zwei entsprechenden Normalschnitten, die einander ebenfalls berühren. Angenommen nun, die Ordnung dieser Berührung sei im allgemeinen gleich n und höchstens für besondere Lagen der Schnittebene größer, so sagen wir, die Ordnung der Berührung der Flächen sei ebenfalls gleich n. Um die Bedingungen für eine solche Berührung zu finden,

nehmen wir die (xy)-Ebene parallel der gemeinsamen Tangentialebene, also die z-Achse parallel der Normale an. x, y, z seien die Koordinaten von A; $x + dx$, $y + dy$ die beiden ersten Koordinaten zweier dem A unendlichnahen Punkte A_1, A_1' der beiden Flächen, für welche die z-Koordinaten z_1, z_1' heißen. Die Entwickelung dieser Größen nach der Taylorschen Formel liefert

$$(1) \quad z_1 = z + (p\,dx + q\,dy) + \frac{1}{2}(r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2) + \cdots + R_{n+1}$$

$$(2) \quad z_1' = z' + (p'dx + q'dy) + \frac{1}{2}(r'dx^2 + 2s'dx\,dy + t'dy^2) + \cdots + R_{n+1}'.$$

Bildet der Normalschnitt, dem die Punkte A_1, A_1' angehören, mit der (xz)-Ebene den Winkel w, so ist noch

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} w = \lambda$$

zu setzen. Wird nun dx als unendlichkleine Größe erster Ordnung betrachtet, und soll $z_1 - z_1'$ unendlichklein von der $n + 1$. Ordnung sein, so hat man erstens, wie bereits angenommen,

$$z' = z;$$

ferner müssen in den beiden Formeln (1), (2) die Aggregate mit gleichen Potenzen von dx bis zur n. Ordnung paarweise übereinstimmen.

Dies gibt n Gleichungen:

$$p' + q'\lambda = p + q\lambda$$
$$r' + 2s'\lambda + t'\lambda^2 = r + 2s\lambda + t\lambda^2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

und da diese für unendlichviele Werte von λ gelten sollen, so erhält man als notwendig und hinreichend für eine Berührung n. Ordnung die Gleichheit der partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial^\nu z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^\nu z'}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} \qquad \begin{pmatrix} \alpha + \beta = \nu \\ \nu = 1, \ldots n \end{pmatrix}$$

für das zu A gehörige Wertepaar (xy). Unwesentlich ist hierbei, daß p und q für das spezielle Koordinatensystem den Wert Null haben. Vielmehr lehren dieselben Schlüsse wie in der Theorie der ebenen Kurven, daß die Bedingungen bestehen bleiben, solange bestimmte besondere Lagen der Flächen zum Koordinatensystem ausgeschlossen werden.

Die Anzahl der Bedingungen ist

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \equiv n'.$$

Soll nun eine Fläche m. Ordnung bestimmt werden können, die eine gegebene Fläche in einem beliebigen Punkte in der n. Ordnung berührt, so muß, wenn m' die Anzahl der verfügbaren Konstanten in der Gleichung der hinzugenommenen Fläche bezeichnet,

$$n' \leqq m'$$

sein. Die Anzahl der Glieder einer vollständigen ganzen Funktion m. Grades von drei Variablen ist aber $\binom{m+3}{3}$, mithin

$$m' = \binom{m+3}{3} - 1,$$

da die Gleichung durch eine Konstante dividiert werden kann. Diese Zahl erniedrigt sich, wenn spezielle Formen der Fläche m. Ordnung vorausgesetzt werden.

So enthält die allgemeine Gleichung 2. Grades

$$(3) \qquad a_{11}\mathfrak{x}^2 + a_{22}\mathfrak{y}^2 + a_{33}\mathfrak{z}^2 + 2a_{23}\mathfrak{y}\mathfrak{z} + 2a_{31}\mathfrak{z}\mathfrak{x} + 2a_{12}\mathfrak{x}\mathfrak{y} + 2a_{14}\mathfrak{x} + 2a_{24}\mathfrak{y} + 2a_{34}\mathfrak{z} + a_{44} = 0$$

neun willkürliche Konstanten, die Kugel

$$(4) \qquad (\mathfrak{x} - x_0)^2 + (\mathfrak{y} - y_0)^2 + (\mathfrak{z} - z_0)^2 = a^2$$

nur deren vier. Hieraus folgt, daß es unendlichviele Kugeln gibt, die eine Berührung erster Ordnung mit der Fläche haben, denn eine Konstante bleibt vermöge der drei Bedingungen willkürlich. Den Gleichungen

$$(5) \qquad \begin{aligned} x - x_0 + p(z - z_0) &= 0 \\ y - y_0 + q(z - z_0) &= 0 \end{aligned}$$

gemäß liegen die Mittelpunkte aller dieser Kugeln auf der Normale. Soll dagegen eine Berührung 2. Ordnung stattfinden, die das Bestehen der Gleichungen

$$(6) \qquad \begin{aligned} 1 + (z - z_0)r + p^2 &= 0 \\ 1 + (z - z_0)t + q^2 &= 0 \\ (z - z_0)s + pq &= 0 \end{aligned}$$

erfordert, so ist dies nur möglich, wenn unter x, y, z selbst Relationen stattfinden. Die Elimination von $z - z_0$ aus (6) liefert

$$\frac{r}{1+p^2} = \frac{s}{pq} = \frac{t}{1+q^2},$$

d. h. nur für die Kreispunkte kann eine oskulierende Kugel existieren. Dieser Umstand begründet den Ausdruck, eine Fläche sei in einem Kreispunkte sphärisch gekrümmt.

Soll eine allgemeine Fläche 2. Grades bestimmt werden, die eine gegebene Fläche in der 2. Ordnung berührt, so ist die Lösung dieser Aufgabe auf unendlichviele Arten möglich, da drei Konstanten willkürlich bleiben. Dagegen reichen die Konstanten nicht aus, um die Berührung in einem beliebigen Punkte bis zur 3. Ordnung zu steigern, denn diese würde zehn Bedingungen erfordern. Hält man die Voraussetzung fest, daß der Berührungspunkt auf der gegebenen Fläche beliebig sei, sieht also von Überlegungen ab, wie sie eben für die Kreispunkte und im § 33 für $K=0$ angestellt worden sind, so kann man die erstgenannte Aufgabe dadurch zu einer bestimmten machen, daß man die Fläche 2. Grades spezialisiert und außerdem den Punkt dieser Fläche, in welchem die Berührung stattfinden soll, besonderen Bedingungen unterwirft. So liefert die Forderung, daß die oskulierende Fläche eine Umdrehungsfläche sei, zwei Gleichungen unter den drei noch verfügbaren Konstanten; eine dritte tritt hinzu, wenn man vorschreibt, daß der Berührungspunkt dem Äquator der Rotationsfläche (die wir als Ellipsoid oder Hyperboloid voraussetzen) angehören soll.

Wichtiger als diese Umdrehungsflächen sind die oskulierenden Paraboloide. Ihre Existenz ist nämlich nur der geometrische Ausdruck für die Entwickelbarkeit von z_1 nach der Taylorschen Formel bis zu den Gliedern zweiter Dimension. Spezialisiert man das vorher angenommene Koordinatensystem noch weiter, indem man A mit dem Koordinatenanfangspunkt, die Tangentialebene mit der (xy)-Ebene, die x- und y-Achse mit den Haupttangenten zusammenfallen läßt, so geht nach § 26 die Gleichung (1) in

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{dx^2}{\varrho_1} + \frac{dy^2}{\varrho_2}\right) + R_3 \tag{7}$$

über. Sie besagt, daß das Paraboloid

$$2\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{x}^2}{\varrho_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{\varrho_2}, \tag{8}$$

dessen Scheitel A ist, in diesem Punkte die gegebene Fläche in der 2. Ordnung berührt. Je nachdem das Krümmungsmaß positiv oder negativ ist, wird das Paraboloid ein elliptisches oder ein hyperbolisches. Sein Schnitt mit der Ebene $\mathfrak{z} = \zeta$ liefert den Dupinschen Kegelschnitt (§ 33).

Kehren wir zu der allgemeinen Aufgabe zurück. Ihre Lösung würde ein besonderes Interesse haben, wenn es gelänge, sämtliche m' Konstanten der Fläche m. Grades ohne Annahme einer speziellen Gestalt der Fläche allein dadurch zu bestimmen, daß sie die gegebene

in einem willkürlichen Punkte mit bestimmter Ordnungszahl berühren solle. Die ganzen Zahlen m und n müssen dann durch die Gleichung

$$(9) \qquad \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} - 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

verbunden sein. Ihre Ermittelung führt also auf eine zahlentheoretische Aufgabe. Die kleinsten Wertepaare, die der Gleichung genügen, sind, abgesehen von $m = 1$, $n = 1$:

$$m = 5, \quad n = 9; \qquad m = 20, \quad n = 58.$$

In einem beliebigen Punkte einer Fläche gibt es mithin oskulierende Flächen 5. und 20. Grades. Im übrigen ist nur bekannt, daß zwischen 21 und 675 keine Werte von m liegen können. Hiernach sind einfache, geometrisch interessante Resultate auf Grund der Gleichung (9) nicht zu erwarten.

§ 110.

Zwei spezielle Flächen 4. Grades.

Sieht man von den Formulierungen des Berührungsproblems ab, die durch die analytische Darstellung der Flächen veranlaßt werden, und stellt sich auf den rein geometrischen Standpunkt, so kann man z. B. nach dem Ort der Krümmungskreise aller Normalschnitte einer Fläche in einem gegebenen Punkte fragen. Ein solcher Kreis werde als Hauptkreis einer Kugel betrachtet, die die Fläche in A berührt und deren Radius gleich $|\varrho|$ ist. Beschränkt man sich auf das vorher benutzte spezielle Koordinatensystem, so lautet ihre Gleichung

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + (z - \varrho)^2 = \varrho^2.$$

Die zweite Gleichung des Krümmungskreises hat für $\lambda = \frac{dy}{dx}$ die Form

$$(2) \qquad y - \lambda x = 0.$$

λ und ϱ hängen durch die Formel des Eulerschen Satzes (S. 84)

$$(3) \qquad \frac{1}{\varrho} = \frac{n_1 + n_2 \lambda^2}{1 + \lambda^2}$$

zusammen. Nach Einführung des Wertes von ϱ aus (3) in (1) ergibt sich die Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes durch Elimination von λ aus (1) und (2):

$$(4) \qquad (n_1 x^2 + n_2 y^2)(x^2 + y^2 + z^2) - 2(x^2 + y^2) z = 0$$

oder

$$(5) \qquad (\varrho_2 x^2 + \varrho_1 y^2)(x^2 + y^2 + z^2) - 2 \varrho_1 \varrho_2 (x^2 + y^2) z = 0.$$

Der Ort ist also eine spezielle Fläche 4. Grades.

Die Aufgabe, den Ort der Krümmungsmittelpunkte aller ebenen Schnitte einer Fläche in einem beliebigen Punkte zu finden, steht vermöge des Meusnierschen Satzes hiermit in engem Zusammenhange. Ganz direkt kann man nach den allgemeinen Formeln auf S. 72 folgenden Ansatz machen. Es sei

$$\alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y} + \gamma\mathfrak{z} = 0$$

die Gleichung, die mit der der Fläche zusammen den ebenen Schnitt liefert. Dann ergeben sich aus den Ausdrücken für ξ, η, ζ, nachdem man darin

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0,$$

ferner

$$p = 0, \qquad q = 0$$

$$r = n_1, \qquad s = 0, \qquad t = n_2$$

gesetzt hat, die Geichungen

$$(6) \qquad \begin{aligned} \xi &= \frac{-\alpha\gamma(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(n_1\beta^2 + n_2\alpha^2)} \\ \eta &= \frac{-\beta\gamma(\alpha^2 + \beta^2)}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(n_1\beta^2 + n_2\alpha^2)} \\ \zeta &= \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(n_1\beta^2 + n_2\alpha^2)}, \end{aligned}$$

aus denen die Verhältnisse $\alpha : \beta : \gamma$ zu eliminieren sind. Bildet man zuerst

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^3}{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)(n_1\beta^2 + n_2\alpha^2)^2}$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{n_1\beta^2 + n_2\alpha^2}\zeta,$$

benutzt dann die Beziehung

$$\frac{\xi}{\alpha} = \frac{\eta}{\beta}$$

und schreibt schließlich x, y, z für ξ, η, ζ, so findet man

$$(7) \qquad (n_1y^2 + n_2x^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (x^2 + y^2)z = 0$$

oder

$$(8) \qquad (\varrho_1x^2 + \varrho_2y^2)(x^2 + y^2 + z^2) - \varrho_1\varrho_2(x^2 + y^2)z = 0,$$

eine Fläche derselben Art wie die erste.

Ohne ihre Gestalt näher zu untersuchen, wenden wir uns jetzt zu der zweiten Gruppe von Flächen, die mit einer gegebenen zusammenhängen (S. 365).

§ 111.

Die zu einer gegebenen Fläche parallelen Flächen.

Wenn die Strahlen eines Normalensystems die Leitfläche selbst unter rechten Winkeln schneiden, so ist

$$X = X_0, \qquad Y = Y_0, \qquad Z = Z_0$$

in die Formeln S. 347 (1) oder S. 362 (1) einzusetzen. Die Theorie der Strahlensysteme kann dann auf solche Flächen angewendet werden, deren Gleichungen für die Annahme $r = r(u, v)$ aus diesen hervorgehen. Es sind das also Flächen, die aus einer gegebenen, dem Ort des Punktes $A_0 \equiv (x_0 y_0 z_0)$, dadurch entstehen, daß man auf ihren Normalen von A_0 aus die Strecke $\pm r(u, v)$ abträgt. Hierbei sind zwei Voraussetzungen besonders bemerkenswert: r konstant oder gleich einem Hauptkrümmungsradius.

Im Folgenden soll der Index 0 überall weggelassen werden. Dann sind die Koordinaten der abgeleiteten Fläche anders zu bezeichnen als im vorigen Paragraphen.

Wir beschäftigen uns zuerst mit der Annahme

$$r = a,$$

wo die Konstante a positiv oder negativ sein kann. Die Fläche

$$(1) \qquad \begin{aligned} x' &= x + aX \\ y' &= y + aY \\ z' &= z + aZ \end{aligned}$$

ist dann der gegebenen parallel (S. 363).

Alle auf die Parallelfläche bezüglichen Größen mögen durch einen Akzent gekennzeichnet werden. Da hier von einer Transformation der Parameter nicht die Rede ist, so können Verwechslungen mit früheren Bezeichnungen nicht vorkommen.

Aus (1) folgt

$$(2) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial u} &= \frac{\partial x}{\partial u} + a\frac{\partial X}{\partial u}, \cdots \\ \frac{\partial x'}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial v} + a\frac{\partial X}{\partial v}, \cdots. \end{aligned}$$

Die Fundamentalgrößen erster Ordnung und das Quadrat des Linienelements werden:

$$(3) \qquad \begin{aligned} E' &= E - 2aL + a^2\mathfrak{E} \\ F' &= F - 2aM + a^2\mathfrak{F} \\ G' &= G - 2aN + a^2\mathfrak{G} \end{aligned}$$

$$(4) \qquad ds'^2 = ds^2 - 2a\frac{ds^2}{\varrho} + a^2 d\sigma^2,$$

wofür man nach S. 226 (25) auch schreiben kann:

$$(5) \qquad \begin{aligned} E' &= \left(1 - \frac{a^2}{\varrho_1\varrho_2}\right)E + a\left(a\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) - 2\right)L \\ F' &= \left(1 - \frac{a^2}{\varrho_1\varrho_2}\right)F + a\left(a\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) - 2\right)M \\ G' &= \left(1 - \frac{a^2}{\varrho_1\varrho_2}\right)G + a\left(a\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) - 2\right)N \end{aligned}$$

$$(6) \qquad \begin{aligned} ds'^2 &= (1 - Ka^2)ds^2 + a(Ha - 2)n ds^2 \\ &= \left(\left(\frac{a}{\varrho} - 1\right)^2 + a^2\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho}\right)\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_2}\right)\right)ds^2. \end{aligned}$$

Ersetzt man in (2) die partiellen Ableitungen der Richtungskosinus der Normale durch ihre Ausdrücke nach den Weingartenschen Gleichungen, so erhält man

$$(7) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial u} &= (1 + a\eta_{11})\frac{\partial x}{\partial u} + a\eta_{12}\frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial x'}{\partial v} &= a\eta_{21}\frac{\partial x}{\partial u} + (1 + a\eta_{22})\frac{\partial x}{\partial v}, \end{aligned}$$

und weiter

$$\frac{\partial(y', z')}{\partial(u, v)} = ((1 + a\eta_{11})(1 + a\eta_{22}) - a^2\eta_{12}\eta_{21})\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)},$$

d. h. nach S. 225 (13, 16)

$$(8) \qquad \frac{\partial(y', z')}{\partial(u, v)} = (1 - Ha + Ka^2)\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}$$

$$(9) \qquad T'^2 = (1 - Ha + Ka^2)^2 T^2.$$

Diese Formeln lehren, daß man bei einer ins einzelne gehenden Untersuchung der Parallelflächen die Punkte besonders zu beachten hat, für welche

$$1 - Ha + Ka^2 = 0$$

ist, die also mit einem Hauptkrümmungsmittelpunkt der Ausgangsfläche zusammenfallen. Allgemein kann man bei passender Verfügung über die positive Normale der abgeleiteten Fläche

$$(10) \qquad X' = X, \qquad Y' = Y, \qquad Z' = Z$$

setzen (vgl. S. 363).

Hieraus folgen leicht die Werte der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung, wenn man sie nach den Formeln S. 75 (4) berechnet. Es ist nämlich

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
L' &= L - a\mathfrak{E}\\
M' &= M - a\mathfrak{F}\\
N' &= N - a\mathfrak{G}
\end{aligned}
$$

oder

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
L' &= \frac{a}{\varrho_1 \varrho_2} E + \left(1 - a\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\right) L\\
M' &= \frac{a}{\varrho_1 \varrho_2} F + \left(1 - a\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\right) M\\
N' &= \frac{a}{\varrho_1 \varrho_2} G + \left(1 - a\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)\right) N.
\end{aligned}
$$

Aus (5) und (12) lassen sich die Ausdrücke zusammensetzen, die zur Berechnung der Hauptkrümmungsradien ϱ_1', ϱ_2' der Parallelfläche gebraucht werden:

$$
(13)\qquad G'L' - 2F'M' + E'N' = \left(1 - \frac{a}{\varrho_1}\right)\left(1 - \frac{a}{\varrho_2}\right)\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} - \frac{2a}{\varrho_1 \varrho_2}\right) T^2
$$

$$
(14)\qquad L'N' - M'^2 = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}\left(1 - \frac{a}{\varrho_1}\right)\left(1 - \frac{a}{\varrho_2}\right) T^2.
$$

Hiernach wird

$$
(15)\qquad H' \equiv \frac{1}{\varrho_1'} + \frac{1}{\varrho_2'} = \frac{\varrho_1 + \varrho_2 - 2a}{(\varrho_1 - a)(\varrho_2 - a)} = \frac{1}{\varrho_1 - a} + \frac{1}{\varrho_2 - a}
$$

$$
(16)\qquad K' \equiv \frac{1}{\varrho_1' \varrho_2'} = \frac{1}{(\varrho_1 - a)(\varrho_2 - a)},
$$

d. h.

$$
(17)\qquad \varrho_1' = \varrho_1 - a, \qquad \varrho_2' = \varrho_2 - a.
$$

Die Differenz entsprechender Hauptkrümmungsradien der ursprünglichen und der abgeleiteten Fläche ist also ihrem absoluten Betrage nach gleich dem Abstande der beiden Flächen.

§ 112.

Die Krümmungsmittelpunktsflächen für die II. Flächendarstellung. Beispiel des Ellipsoids.

Die im Anfange des vorigen Paragraphen an zweiter Stelle erwähnten Flächen, die als Örter der Hauptkrümmungsmittelpunkte einer gegebenen Fläche erklärt werden können, sollen eingehender untersucht werden als die Parallelflächen. Die Gleichungen der Krümmungsmittelpunktsflächen sind

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
x_i &= x + \varrho_i X\\
y_i &= y + \varrho_i Y\\
z_i &= z + \varrho_i Z.
\end{aligned}
\qquad (i = 1, 2)
$$

Überträgt man, nur der Kürze des Ausdrucks wegen, eine Benennung aus der Kurventheorie auf zweidimensionale Gebilde, so kann man diese Flächen auch als Evoluten der gegebenen, und umgekehrt die letztere als Evolvente jener bezeichnen.

In den Gleichungen (1) sind ϱ_1 und ϱ_2 Wurzeln einer quadratischen Gleichung, die für die verschiedenen Darstellungen der Fläche auf S. 77, 80 und 92 entweder angegeben ist oder aus einer dort aufgestellten unmittelbar durch die Substitution $n = \frac{1}{\varrho}$ abgeleitet werden kann. Wird z. B.

$$\text{(II)} \qquad F(x, y, z) = 0$$

als Darstellung der Fläche angenommen, so gilt für die Hauptkrümmungen die Gleichung (16) auf S. 92, und ferner ist

$$X = \frac{1}{W} \frac{\partial F}{\partial x}, \dots,$$

also

$$x_i = x + \frac{\varrho_i}{W} \frac{\partial F}{\partial x}, \dots .$$

Nun war (16) aus der Gleichung (15), nämlich

$$\text{(2)} \qquad \begin{vmatrix} F_{11} - \mu, & F_{12}, & F_{13}, & F_1 \\ F_{21}, & F_{22} - \mu, & F_{23}, & F_2 \\ F_{31}, & F_{32}, & F_{33} - \mu, & F_3 \\ F_1, & F_2, & F_3, & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

vermöge (14),

$$\mu = -nW \equiv -\frac{W}{\varrho},$$

hervorgegangen. Man kann also auch schreiben

$$\text{(3)} \qquad x_i = x - \frac{1}{\mu_i} \frac{\partial F}{\partial x}, \dots,$$

wo μ_1 und μ_2 die Wurzeln der Gleichung (2) bezeichnen. Die Darstellung der Krümmungsmittelpunktsflächen selbst in der Form (II) erfordert die Elimination der vier Größen x, y, z und μ_1 oder μ_2 aus (2), den drei Gleichungen (3) und der gegebenen Flächengleichung. Da das Eliminationsproblem inbezug auf μ_1 und μ_2 die gleiche Form hat, so erscheinen im allgemeinen die beiden Evoluten in einer und derselben Gleichung vereinigt, als Schalen oder Mäntel einer und derselben Fläche. Im Folgenden wird immer aus dem Zusammenhange hervorgehen, ob unter Krümmungsmittelpunktsfläche (Evolute) der

Ort sämtlicher Hauptkrümmungsmittelpunkte oder, wie bis hierher, nur eine Schale verstanden werden soll.

Bei der Anwendung auf das Ellipsoid

(4) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

kann man

(5) $$F(x, y, z) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$

setzen und erhält

(6) $$\begin{array}{lll} F_1 = \frac{x}{a^2}, & F_2 = \frac{y}{b^2}, & F_3 = \frac{z}{c^2} \\ F_{11} = \frac{1}{a^2}, & F_{22} = \frac{1}{b^2}, & F_{33} = \frac{1}{c^2} \\ F_{23} = 0\ , & F_{31} = 0\ , & F_{12} = 0. \end{array}$$

Werden zuerst nur die drei letzten Gleichungen zur Vereinfachung von (2) benutzt, so findet sich

(7) $$F_1^2(F_{22} - \mu)(F_{33} - \mu) + F_2^2(F_{33} - \mu)(F_{11} - \mu) + F_3^2(F_{11} - \mu)(F_{22} - \mu) = 0$$

oder für $-\frac{1}{\mu} = \alpha$, wobei es auf die Bedeutung von α nicht weiter ankommt,

(8) $$\frac{F_1^2}{\alpha F_{11} + 1} + \frac{F_2^2}{\alpha F_{22} + 1} + \frac{F_3^2}{\alpha F_{33} + 1} = 0,$$

d. h. für das Ellipsoid:

(9) $$\frac{x^2}{a^2(a^2 + \alpha)} + \frac{y^2}{b^2(b^2 + \alpha)} + \frac{z^2}{c^2(c^2 + \alpha)} = 0.$$

Bezeichnet man die laufenden Koordinaten für beide Evolutenschalen übereinstimmend mit $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, so hat man x, y, z und α aus (4), (9) und

(10) $$\mathfrak{x} = x + \alpha\frac{x}{a^2}, \qquad \mathfrak{y} = y + \alpha\frac{y}{b^2}, \qquad \mathfrak{z} = z + \alpha\frac{z}{c^2}$$

wegzuschaffen. Für x, y, z ist dies sehr einfach: Man entnimmt ihre Werte aus (10),

$$x = \frac{a^2\mathfrak{x}}{a^2 + \alpha}, \qquad y = \frac{b^2\mathfrak{y}}{b^2 + \alpha}, \qquad z = \frac{c^2\mathfrak{z}}{c^2 + \alpha},$$

und setzt in (4) und (9) ein. Dann bleibt α aus

(11) $$\frac{a^2\mathfrak{x}^2}{(a^2 + \alpha)^2} + \frac{b^2\mathfrak{y}^2}{(b^2 + \alpha)^2} + \frac{c^2\mathfrak{z}^2}{(c^2 + \alpha)^2} = 1$$

und

(12) $$\frac{a^2\mathfrak{x}^2}{(a^2 + \alpha)^3} + \frac{b^2\mathfrak{y}^2}{(b^2 + \alpha)^3} + \frac{c^2\mathfrak{z}^2}{(c^2 + \alpha)^3} = 0$$

zu eliminieren. Bezeichnet man die linke Seite der auf Null gebrachten Gleichung (11) als Funktion von α mit $R(\alpha)$, so kann (12) in der Form

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = 0$$

geschrieben werden. Die Ermittelung der Krümmungsmittelpunktsfläche des Ellipsoids ist hiernach auf die Bildung einer Diskriminante zurückgeführt. Die entstehende Gleichung wird vom 12. Grade.

§ 113.

Die Krümmungsmittelpunktsflächen für die I. und III. Flächendarstellung.

Liegt die Evolvente in der Darstellung (I) vor, so tritt zu den Gleichungen S. 373 (1) die Bestimmung S. 77 (17)

$$(1) \qquad (LN - M^2)\varrho^2 - (GL - 2FM + EN)\varrho + EG - F^2 = 0$$

für die Hauptkrümmungsradien. Die Koordinaten der Evoluten erscheinen dann selbst als Funktionen der beiden Parameter u und v.

In manchen Fällen ist es zweckmäßig,

$$(2) \qquad \varrho_i = \frac{E + F\lambda_i}{L + M\lambda_i} = \frac{F + G\lambda_i}{M + N\lambda_i} \qquad (i = 1, 2)$$

zu setzen (vgl. S. 76 (11, 10)) und $\lambda \equiv \lambda_i$ aus

$$(3) \qquad (FN - GM)\lambda^2 + (EN - GL)\lambda + (EM - FL) = 0\,.$$

(S. 76 (4)) zu entnehmen.

Sind speziell die Variablen u, v die Hauptparameter der Ausgangsfläche (S. 252), ist also

$$F = 0, \qquad M = 0,$$

so kann man nach S. 253 (4)

$$(4) \qquad \varrho_1 = \frac{E}{L}, \qquad \varrho_2 = \frac{G}{N}$$

setzen. Dies trifft beim Ellipsoide für die Darstellung

$$(5) \qquad \begin{aligned} x^2 &= \frac{a^2(a^2 - u)(a^2 - v)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \\ y^2 &= \frac{b^2(b^2 - u)(b^2 - v)}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} \\ z^2 &= \frac{c^2(c^2 - u)(c^2 - v)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \end{aligned}$$

(S. 241) zu. Nun war für elliptische Koordinaten, wenn

$$(6)\qquad \begin{aligned}(a^2-u)(b^2-u)(c^2-u)&=U\\(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)&=V\end{aligned}$$

gesetzt wird,

$$(7)\qquad E=\frac{u(u-v)}{4U},\qquad G=\frac{v(v-u)}{4V}$$

(S. 286 (11, 12)). Ferner wird

$$(8)\qquad X=\frac{bc}{a}\frac{x}{\sqrt{uv}},\qquad Y=\frac{ca}{b}\frac{y}{\sqrt{uv}},\qquad Z=\frac{ab}{c}\frac{z}{\sqrt{uv}}$$

$$(9)\qquad L=\frac{abc(v-u)}{4U\sqrt{uv}},\qquad N=\frac{abc(u-v)}{4V\sqrt{uv}},$$

mithin

$$(10)\qquad \varrho_1=-\frac{u\sqrt{uv}}{abc},\qquad \varrho_2=-\frac{v\sqrt{uv}}{abc}$$

(S. 293). Die eine Schale der Evolute ist durch

$$x_1=x-\frac{ux}{a^2},\qquad y_1=y-\frac{uy}{b^2},\qquad z_1=z-\frac{uz}{c^2}$$

dargestellt oder, bei Benutzung der Ausdrücke für x, y, z, durch:

$$(11)\qquad \begin{aligned}x_1^2&=\frac{(a^2-u)^3(a^2-v)}{a^2(a^2-b^2)(a^2-c^2)}\\y_1^2&=\frac{(b^2-u)^3(b^2-v)}{b^2(b^2-c^2)(b^2-a^2)}\\z_1^2&=\frac{(c^2-u)^3(c^2-v)}{c^2(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.\end{aligned}$$

Für die zweite Schale vertauschen sich u und v. Daß die Elimination dieser Variablen offenbar in beiden Fällen dasselbe Ergebnis liefert, bestätigt aufs neue die oben gemachte Bemerkung über den analytischen Zusammenhang der beiden Schalen.

Was endlich die Flächendarstellung

$$(\text{III})\qquad z=z(x, y)$$

angeht, so konnte diese als Spezialfall sowohl von (I) wie von (II) aufgefaßt werden. Es ist also überflüssig, für diese Annahme die Formeln noch besonders hinzuschreiben.

§ 114.

Linienelement der Evolute. Satz von Weingarten.

Wenden wir uns nun zu allgemeinen Eigenschaften der Krümmungsmittelpunktsfläche und beziehen zu diesem Zweck alle Größen

auf die Hauptparameter der Evolvente, wie es wegen des engen Zusammenhanges zwischen den Hauptkrümmungsradien und den Krümmungskurven zweckmäßig ist. Allerdings wird man bei dieser Annahme nicht stehen bleiben dürfen, wenn es sich um das Bildungsgesetz der auftretenden geometrischen Größen handelt. Aber für eine Übersicht über die Grundeigenschaften der Evolute reicht die Voraussetzung aus, und es läßt sich mit ihrer Hilfe sogar ein schöner und wichtiger Satz der Abwickelungstheorie beweisen.

Schreitet man von einem Flächenpunkte A längs einer Krümmungslinie zu einem benachbarten Punkte B fort, so ist der kürzeste Abstand benachbarter Flächennormalen in A und B eine unendlichkleine Größe höherer Ordnung. Aus der allgemeinen Theorie der Strahlensysteme, insbesondere aus § 105, folgt dies unmittelbar. Setzt man nämlich in den Gleichungen S. 354(6), S. 355(11) nach S. 362(4) $\overline{M} = M$, nimmt ferner $X = X_0, \ldots$ an und läßt schließlich überall den Index 0 weg, so werden die erstgenannten Gleichungen mit der Differentialgleichung der Krümmungslinien und der Bestimmungsgleichung für die Hauptkrümmungsradien identisch (vgl. S. 339), und die Koordinaten der Brennpunkte (S. 356) stimmen mit denen der Hauptkrümmungsmittelpunkte überein. Zugleich tritt hervor, daß die in Rede stehende Eigenschaft der Flächennormalen für die Krümmungslinien charakteristisch ist. Die Annahme, daß für die Evolvente $K = 0$ sei, ist überall ausgeschlossen.

Es seien nun p und q die Hauptparameter der Ausgangsfläche, und der Hauptkrümmungsradius ϱ_1 der Kurve $q = \text{const.}$ zugeordnet. Das heißt also, wenn man längs einer solchen Kurve fortschreitet, so hat der Fußpunkt des kürzesten Abstandes benachbarter Flächennormalen auf der ersten von diesen die Abszisse ϱ_1. Es genügt, die zu $\varrho = \varrho_1$ gehörende Evolute zu betrachten, deren Punkte durch

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_1 &= x + \varrho_1 X \\ y_1 &= y + \varrho_1 Y \\ z_1 &= z + \varrho_1 Z \end{aligned}$$

dargestellt werden. Alle Formeln für die zweite Evolute ergeben sich durch Vertauschung von p mit q, ϱ_1 mit ϱ_2.

Die Differentiation der Gleichungen (1) nach p liefert

$$\frac{\partial x_1}{\partial p} = \frac{\partial x}{\partial p} + \varrho_1 \frac{\partial X}{\partial p} + X \frac{\partial \varrho_1}{\partial p}, \ldots,$$

d. h. vermöge der Formeln von Rodrigues (S. 254(14)):

(2) $$\frac{\partial x_1}{\partial p} = X\frac{\partial \varrho_1}{\partial p}, \dots,$$

also

(3) $$\frac{\partial x_1}{\partial p} : \frac{\partial y_1}{\partial p} : \frac{\partial z_1}{\partial p} = X : Y : Z.$$

Die drei partiellen Ableitungen links unterscheiden sich um einen und denselben Faktor von den Richtungskosinus der Kurve $q =$ const. auf der Evolute. Die Tangente dieser Kurve fällt demnach mit der Normale der Evolvente zusammen.

Dieses Resultat hätte aus § 106 entnommen werden können. Man kann es vollständiger so aussprechen: Längs einer Krümmungskurve lassen sich die Flächennormalen zu einer abwickelbaren Fläche zusammenfassen und berühren mithin eine bestimmte Kurve, die Rückkehrkante dieser Fläche. Die zu einer Schar von Krümmungslinien gehörenden Rückkehrkanten füllen eine Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche aus.

Sämtliche Größen, die sich auf die Parameter p, q beziehen, mögen durch einen Stern gekennzeichnet werden. Für

$$\sum\left(\frac{\partial x_1}{\partial p}\right)^2 \equiv E_1^*$$

folgt dann aus (2) der Wert

(4) $$E_1^* = \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial p}\right)^2.$$

Durch Differentiation der Gleichungen (1) nach q ergibt sich

(5) $$\frac{\partial x_1}{\partial q} = \frac{\partial x}{\partial q} + \varrho_1\frac{\partial X}{\partial q} + X\frac{\partial \varrho_1}{\partial q}, \dots,$$

woraus

(6) $$G_1^* = G^* - 2\varrho_1 N^* + \varrho_1^2 \mathfrak{G}^* + \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial q}\right)^2.$$

Nun ist aber

$$N^* = n_2 G^* = \frac{1}{\varrho_2} G^*$$

$$\mathfrak{G}^* = \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right) N^* - \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} G^* = \frac{1}{\varrho_2^2} G^*,$$

also

(7) $$G_1^* = \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 G^* + \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial q}\right)^2.$$

Ohne Benutzung des Ausdruckes von $\mathfrak{G}^*$ kann man diesen Wert auch dadurch herleiten, daß man aus dem zweiten System der Formeln von Rodrigues

$$\frac{\partial X}{\partial q} = -\frac{1}{\varrho_2}\frac{\partial x}{\partial q}, \dots$$

in (5) einsetzt, wobei sich

$$(8)\qquad \frac{\partial x_1}{\partial q} = \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial x}{\partial q} + X\frac{\partial \varrho_1}{\partial q}, \dots$$

herausstellt.

Endlich folgt durch Zusammenstellung von (5) mit (2)

$$(9)\qquad F_1^* = \frac{\partial \varrho_1}{\partial p}\,\frac{\partial \varrho_1}{\partial q},$$

sodaß

$$(10)\qquad ds_1^2 = \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial p}\right)^2 dp^2 + 2\frac{\partial \varrho_1}{\partial p}\,\frac{\partial \varrho_1}{\partial q}\,dp\,dq + \left(\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial q}\right)^2 + \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 G^*\right)dq^2$$

wird. Wegen

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial p}\,dp + \frac{\partial \varrho_1}{\partial q}\,dq = d\varrho_1$$

kann man auch

$$(11)\qquad ds_1^2 = d\varrho_1^2 + \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 G^* dq^2$$

schreiben.

Die Größe G^* ist mit den Hauptkrümmungsradien durch eine partielle Differentialgleichung, die dritte Fundamentalgleichung, verbunden, die nach S. 254 (11) in die Form

$$(12)\qquad \frac{\partial \log \sqrt{G^*}}{\partial p} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_2)}\,\frac{\partial \varrho_2}{\partial p}$$

gesetzt werden kann. Nimmt man nun an, daß längs der ganzen Fläche die beiden Hauptkrümmungshalbmesser durch eine von u und v freie funktionale Beziehung

$$(13)\qquad f(\varrho_1, \varrho_2) = 0$$

verbunden sind, so kann man vermöge (12)

$$\frac{\partial \log \sqrt{G^*}}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p}\int \frac{\varrho_1\, d\varrho_2}{\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_2)}$$

setzen, woraus

$$(14)\qquad G^* = \psi(q)^2 e^{2\int \frac{\varrho_1\, d\varrho_2}{\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_2)}}$$

und nach der Substitution $\psi(q)\,dq = dq'$

$$(15)\qquad ds_1^2 = d\varrho_1^2 + \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 e^{2\int \frac{\varrho_1\, d\varrho_2}{\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_2)}}\, dq'^2$$

folgt. Diese Formel ist von der speziellen Fläche, die man gerade betrachtet, unabhängig, d. h. sie ist für alle Flächen der durch die Gleichung (13) oder

$$(16)\qquad \varrho_2 = \lambda(\varrho_1)$$

definierten Klasse dieselbe, und stellt außerdem das Linienelement einer Umdrehungsfläche dar. Es ergibt sich also der folgende, von Weingarten herrührende Satz:

Die Krümmungsmittelpunktsflächen aller Flächen, bei denen auf gleiche Weise in jedem Punkte der eine Hauptkrümmungsradius allein durch den anderen bestimmt ist, sind aufeinander und jedesmal auf eine gewisse Rotationsfläche abwickelbar.

Die Formel (15) für das Linienelement ds_1 kann äußerlich vereinfacht werden. Es ist dazu nur nötig, die partielle Differentialgleichung (12) in eine solche für die Größe

(17) $$\overline{G}_1 \equiv \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 G^*,$$

die in (11) vorkommt, umzusetzen und dann erst die Voraussetzung (13) einzuführen. Die einfache Rechnung ergibt

(18) $$\frac{\partial \log \sqrt{\overline{G}_1}}{\partial p} = \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_2} \frac{\partial \varrho_1}{\partial p}.$$

Sind demnach die Hauptkrümmungsradien durch eine Relation verbunden, so wird

(19) $$ds_1^2 = d\varrho_1^2 + e^{2\int \frac{d\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2}} dq^2.$$

§ 115.

Einige allgemeine Eigenschaften der Evolute.

Bevor der Weingartensche Satz weiter verfolgt wird, mögen noch einige Eigenschaften der Krümmungsmittelpunktsflächen besprochen werden, die bei beliebigen Evolventen Geltung haben.

Die Gleichung (11) des vorigen Paragraphen, die wegen

(1) $$\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 G^* = \overline{G}_1$$

die Form

(2) $$ds_1^2 = d\varrho_1^2 + \overline{G}_1 dq^2$$

annimmt, besagt, daß die Kurven, die auf der Evolute den Linien $q =$ const. und $\varrho_1 =$ const. der Evolvente entsprechen, ein orthogonalgeodätisches Netz bilden. Und zwar entsprechen die geodätischen Linien den Krümmungslinien, d. h. die zu einer Krümmungslinie gehörende Schar von Hauptkrümmungsmittelpunkten bildet auf der Evolute eine geodätische Linie. Dieser Satz erscheint als Korollar eines im § 108 (S. 364) bewiesenen.

Um die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung der Evolute zu berechnen, braucht man die Richtungskosinus der Normale. Aus S. 379 (2)

und S. 380 (8) folgt für den Zähler des ersten Richtungskosinus die Formel

$$\frac{\partial(y_1, z_1)}{\partial(p, q)} = \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) \frac{\partial \varrho_1}{\partial p} \left(Y \frac{\partial z}{\partial q} - Z \frac{\partial y}{\partial q}\right).$$

Nach S. 126 (4) war aber

$$Y \frac{\partial z}{\partial q} - Z \frac{\partial y}{\partial q} = \frac{1}{T^*}\left(- G^* \frac{\partial x}{\partial p} + F^* \frac{\partial x}{\partial q}\right),$$

worin

$$F^* = 0, \qquad T^* = \sqrt{E^* G^*}$$

zu setzen ist. Mithin wird

$$\frac{\partial(y_1, z_1)}{\partial(p, q)} = -\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) \frac{\partial \varrho_1}{\partial p} \sqrt{\frac{G^*}{E^*}} \frac{\partial x}{\partial p},$$

also jedenfalls

(3) $$X_1 : Y_1 : Z_1 = \frac{\partial x}{\partial p} : \frac{\partial y}{\partial p} : \frac{\partial z}{\partial p},$$

d. h.

$$X_1 = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E^*}} \frac{\partial x}{\partial p}, \ldots \qquad (\varepsilon_1 = \pm 1).$$

Auf den rechten Seiten dieser Gleichungen stehen die Richtungskosinus der Krümmungslinien $q = \text{const.}$

In derselben Weise ergibt sich für die zweite Evolute

$$X_2 = \frac{\varepsilon_2}{\sqrt{G^*}} \frac{\partial x}{\partial q}, \ldots, \qquad (\varepsilon_2 = \pm 1)$$

und die rechts vorkommenden Größen sind die Richtungskosinus der Krümmungslinien $p = \text{const.}$

Hiernach sind die Normalen der beiden Evoluten den Tangenten der zugehörigen Krümmungslinien im entsprechenden Punkte der Evolvente parallel. Daraus folgt insbesondere

(4) $$\sum X_1 X_2 = 0,$$

die Normalen und damit auch die Tangentialebenen in zusammengehörenden Punkten der Evolutenschalen stehen aufeinander senkrecht. Ferner ist

(5) $$\sum X X_1 = 0, \qquad \sum X X_2 = 0,$$

wie es sein muß, weil die Normale der Evolvente beide Evoluten berührt (vgl. S. 379).

Da nun die Normale der Evolvente und die Normalen der Evoluten, wenn man sie durch einen und denselben Punkt gehend denkt, ein rechtwinkliges Dreikant bilden, so erscheint es angemessen, die positiven Richtungen der Normalen der abgeleiteten Flächen, ohne

Rücksicht auf die Festsetzungen des § 15 (S. 49), so anzunehmen, daß das Dreikant

$$n_1 \equiv (X_1 Y_1 Z_1), \qquad n_2 \equiv (X_2 Y_2 Z_2), \qquad n \equiv (XYZ)$$

dem Dreikant x, y, z äquivalent ist. Dies tritt ein, wenn ε_1 und ε_2 gleich $+1$, also

$$(6) \qquad X_1 = \frac{1}{\sqrt{E^*}} \frac{\partial x}{\partial p}, \qquad Y_1 = \frac{1}{\sqrt{E^*}} \frac{\partial y}{\partial p}, \qquad Z_1 = \frac{1}{\sqrt{E^*}} \frac{\partial z}{\partial p}$$

$$(7) \qquad X_2 = \frac{1}{\sqrt{G^*}} \frac{\partial x}{\partial q}, \qquad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{G^*}} \frac{\partial y}{\partial q}, \qquad Z_2 = \frac{1}{\sqrt{G^*}} \frac{\partial z}{\partial q}$$

gesetzt wird.

Zur Berechnung der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung verwenden wir die zweiten Ausdrücke, die mit

$$L_1^* = -\sum \frac{\partial x_1}{\partial p} \frac{\partial X_1}{\partial p}$$

beginnen. Es wird

$$\sum \frac{\partial x_1}{\partial p} \frac{\partial X_1}{\partial p} = \frac{1}{\sqrt{E^*}} \sum \frac{\partial x_1}{\partial p} \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + \sum \frac{\partial x_1}{\partial p} \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial \frac{1}{\sqrt{E^*}}}{\partial p}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E^*}} \frac{\partial \varrho_1}{\partial p} \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial p^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E^*}} \frac{\partial \varrho_1}{\partial p} L^*,$$

denn die zweite Summe verschwindet.

Zweitens erhält man, unter sofortiger Weglassung der zweiten Summe,

$$\sum \frac{\partial x_1}{\partial p} \frac{\partial X_1}{\partial q} = \frac{1}{\sqrt{E^*}} \frac{\partial \varrho_1}{\partial p} \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial p \, \partial q}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E^*}} \frac{\partial \varrho_1}{\partial p} M^*,$$

und drittens ebenso

$$\sum \frac{\partial x_1}{\partial q} \frac{\partial X_1}{\partial q} = \frac{1}{\sqrt{E^*}} \sum \left(\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) \frac{\partial x}{\partial q} + X \frac{\partial \varrho_1}{\partial q} \right) \frac{\partial^2 x}{\partial p \, \partial q}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{E^*}} \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) \sum \frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial^2 x}{\partial p \, \partial q} + \frac{1}{\sqrt{E^*}} \frac{\partial \varrho_1}{\partial q} M^*$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{E^*}} \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) \frac{\partial G^*}{\partial p} + \frac{1}{\sqrt{E^*}} \frac{\partial \varrho_1}{\partial q} M^*$$

oder infolge der dritten Fundamentalgleichung (S. 254 (11))

$$\sum \frac{\partial x_1}{\partial q} \frac{\partial X_1}{\partial q} = -\frac{G^*}{\sqrt{E^*}} \frac{\varrho_1}{\varrho_2^2} \frac{\partial \varrho_2}{\partial p} + \frac{1}{\sqrt{E^*}} \frac{\partial \varrho_1}{\partial q} M^*.$$

Wegen

$$L^* = \frac{E^*}{\varrho_1}, \qquad M^* = 0$$

ergibt sich also

$$(8) \qquad L_1^* = -\frac{\sqrt{E^*}}{\varrho_1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial p}, \qquad M_1^* = 0, \qquad N_1^* = \frac{G^*}{\sqrt{E^*}} \frac{\varrho_1}{\varrho_2^2} \frac{\partial \varrho_2}{\partial p}.$$

Die zweite dieser Gleichungen lehrt, daß die beiden Kurvenscharen auf der Evolute, die den Krümmungslinien der Evolvente entsprechen, einander konjugiert sind.

Aus den Formeln (8) und § 114 (4, 9, 7) setzen sich die Größen

$$H_1 \equiv \frac{G_1^* L_1^* - 2 F_1^* M_1^* + E_1^* N_1^*}{E_1^* G_1^* - F_1^{*2}}$$

$$K_1 \equiv \frac{L_1^* N_1^* - M_1^{*2}}{E_1^* G_1^* - F_1^{*2}}$$

zusammen:

$$(9) \qquad H_1 = \frac{G^* \varrho_1^2 \frac{\partial \varrho_1}{\partial p} \frac{\partial \varrho_2}{\partial p} - E^* \varrho_2^2 \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial q}\right)^2 - E^* G^* (\varrho_1 - \varrho_2)^2}{G^* \sqrt{E^*} \varrho_1 (\varrho_1 - \varrho_2)^2 \frac{\partial \varrho_1}{\partial p}}$$

$$(10) \qquad K_1 = -\frac{\frac{\partial \varrho_2}{\partial p}}{(\varrho_1 - \varrho_2)^2 \frac{\partial \varrho_1}{\partial p}}.$$

Obwohl die entsprechenden Formeln für die zweite Evolute aus den angegebenen durch Vertauschung von p mit q, ϱ_1 mit ϱ_2 hervorgehen, so mögen sie doch hier Platz finden, weil sie bei gleichzeitiger Betrachtung beider Schalen mit jenen zusammen gebraucht werden.

$$(11) \qquad E_2^* = \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^2 E^* + \left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial p}\right)^2, \qquad F_2^* = \frac{\partial \varrho_2}{\partial p} \frac{\partial \varrho_2}{\partial q}, \qquad G_2^* = \left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial q}\right)^2$$

$$(12) \qquad L_2^* = \frac{E^*}{\sqrt{G^*}} \frac{\varrho_2}{\varrho_1^2} \frac{\partial \varrho_1}{\partial q}, \qquad M_2^* = 0, \qquad N_2^* = -\frac{\sqrt{G^*}}{\varrho_2} \frac{\partial \varrho_2}{\partial q}$$

$$(13) \qquad H_2 = \frac{E^* \varrho_2^2 \frac{\partial \varrho_1}{\partial q} \frac{\partial \varrho_2}{\partial q} - G^* \varrho_1^2 \left(\frac{\partial \varrho_2}{\partial p}\right)^2 - E^* G^* (\varrho_1 - \varrho_2)^2}{E^* \sqrt{G^*} \varrho_2 (\varrho_1 - \varrho_2)^2 \frac{\partial \varrho_2}{\partial q}}$$

$$(14) \qquad K_2 = -\frac{\frac{\partial \varrho_1}{\partial q}}{(\varrho_1 - \varrho_2)^2 \frac{\partial \varrho_2}{\partial q}}.$$

§ 116.

Evoluten und Evolventen von besonderen Eigenschaften.

Um von den Formeln des letzten Paragraphen einige einfache Anwendungen zu machen, fragen wir zunächst nach einem metrischen Kennzeichen aller Weingartenschen Flächen, nämlich der Flächen, für die der eine der beiden Hauptkrümmungsradien eine Funktion des anderen ist. Die Gleichung

$$\varrho_2 = \lambda(\varrho_1)$$

(S. 380 (16)) ist, solange die Funktion λ nicht näher bestimmt wird, gleichbedeutend mit

$$\frac{\partial(\varrho_1, \varrho_2)}{\partial(u, v)} = 0. \tag{1}$$

Wegen der Invarianteneigenschaft der Funktionaldeterminante kann man auch

$$\frac{\partial(\varrho_1, \varrho_2)}{\partial(p, q)} = 0$$

schreiben. Aus (10) und (14) a. v. S. ergibt sich nun

$$\frac{\partial(\varrho_1, \varrho_2)}{\partial(p, q)} = (1 - K_1 K_2 (\varrho_1 - \varrho_2)^4) \frac{\partial \varrho_1}{\partial p} \frac{\partial \varrho_2}{\partial q}, \tag{2}$$

also im allgemeinen für Weingartensche Flächen

$$K_1 K_2 = \frac{1}{(\varrho_1 - \varrho_2)^4} \tag{3}$$

oder, wenn $\varrho_{11}, \varrho_{12}; \varrho_{21}, \varrho_{22}$ die Hauptkrümmungshalbmesser der beiden Evoluten bezeichnen,

$$\varrho_{11} \varrho_{12} \varrho_{21} \varrho_{22} = (\varrho_1 - \varrho_2)^4. \tag{4}$$

Allerdings hören die Formeln für H_1 und K_1 auf zu gelten, wenn

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial p} = 0,$$

also

$$\varrho_1 = \varphi(q)$$

wird, d. h. wenn längs jeder Krümmungslinie der zugehörige Hauptkrümmungsradius einen konstanten Wert hat. Für diese Annahme verschwindet

$$T_1^2 \equiv \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial p}\right)^2 G^*,$$

und die Evolute degeneriert in eine Linie (S. 30). Dies tritt z. B. für die Umdrehungsflächen ein. Denn für diese waren die Krümmungslinien mit den Meridianen und den Parallelkreisen identisch, ferner

ist längs jedes Parallelkreises der zugehörige Hauptkrümmungshalbmesser konstant, und der Ort der Endpunkte aller dieser Halbmesser fällt mit der Achse der Fläche zusammen (vgl. S. 99).

Das Krümmungsmaß K_1 verschwindet, d. h. eine Evolute wird abwickelbar, wenn entweder ein Hauptkrümmungsradius der Evolvente unendlich groß wird, was hier stets ausgeschlossen ist, oder die Gleichung

$$\frac{\partial \varrho_2}{\partial p} = 0,$$

d. h.

$$\varrho_2 = \psi(q)$$

besteht. Auf solche Flächen führt auch die Forderung, daß die Krümmungslinien der Evolute denen der Evolvente entsprechen sollen. Denn nimmt man zu $M_1^* = 0$ noch

$$F_1^* \equiv \frac{\partial \varrho_1}{\partial p} \frac{\partial \varrho_1}{\partial q} = 0$$

hinzu, so sieht man, daß wenn die Evolute überhaupt eine Fläche (nicht eine Kurve) sein soll, die Gleichung $\frac{\partial \varrho_1}{\partial q} = 0$ gelten muß. Das Krümmungsmaß der zweiten Evolutenschale wird dann gleich Null.

Sollen dagegen die Asymptotenlinien auf der Evolute denen auf der Evolvente entsprechen, so müssen die beiden Gleichungen

$$L_1^* dp^2 + 2 M_1^* dp\, dq + N_1^* dq^2 = 0$$

und

$$L^* dp^2 + 2 M^* dp\, dq + N^* dq^2 = 0$$

denselben Inhalt haben. Nun ist $M^* = 0$, $M_1^* = 0$,

$$L_1^* = -\frac{\sqrt{E^*}}{\varrho_1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial p} = -\frac{L^*}{\sqrt{E^*}} \frac{\partial \varrho_1}{\partial p},$$

$$N_1^* = \frac{G^*}{\sqrt{E^*}} \frac{\varrho_1}{\varrho_2^2} \frac{\partial \varrho_2}{\partial p} = \frac{N^*}{\sqrt{E^*}} \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \frac{\partial \varrho_2}{\partial p},$$

$$L_1^* dp^2 + N_1^* dq^2 = -\frac{1}{\sqrt{E^*}} \frac{\partial \varrho_1}{\partial p} \left(L^* dp^2 - \frac{\varrho_1 \frac{\partial \varrho_2}{\partial p}}{\varrho_2 \frac{\partial \varrho_1}{\partial p}} N^* dq^2 \right).$$

$\frac{\partial \varrho_1}{\partial p} = 0$ soll wieder ausgeschlossen sein. Dann führt die gestellte Bedingung zu

(5)
$$\varrho_1 \frac{\partial \varrho_2}{\partial p} = -\varrho_2 \frac{\partial \varrho_1}{\partial p}$$

oder

$$\frac{\partial(\varrho_1\varrho_2)}{\partial p} = 0$$

$$K = \chi(q),$$

das Krümmungsmaß der Evolvente muß längs jeder Krümmungslinie der Schar, die zu der betrachteten Evolutenschale gehört, einen konstanten Wert haben.

Bleibt man bei (5) stehen und eliminiert das Verhältnis der Ableitungen der beiden Hauptkrümmungsradien mittels der Formel für K_1, so findet man für diese Flächenklasse die metrische Relation

$$K_1 = \frac{\varrho_2}{\varrho_1(\varrho_1 - \varrho_2)^2} \equiv \frac{K}{\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2}. \tag{6}$$

Zur Entscheidung der Frage, wann die Asymptotenlinien der beiden Evolutenschalen einander, aber zunächst nicht den Asymptotenkurven der Evolvente entsprechen, hat man in den beiden Gleichungen

$$L_1^* dp^2 + N_1^* dq^2 \equiv -\frac{\sqrt{E^*}}{\varrho_1}\frac{\partial \varrho_1}{\partial p} dp^2 + \frac{G^*}{\sqrt{E^*}}\frac{\varrho_1}{\varrho_2^2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial p} dq^2 = 0$$

und

$$L_2^* dp^2 + N_2^* dq^2 \equiv \frac{E^*}{\sqrt{G^*}}\frac{\varrho_2}{\varrho_1^2}\frac{\partial \varrho_1}{\partial q} dp^2 - \frac{\sqrt{G^*}}{\varrho_2}\frac{\partial \varrho_2}{\partial q} dq^2 = 0$$

entsprechende Koeffizienten einander proportional zu setzen. Dies führt, wie unmittelbar ersichtlich, auf die Weingartenschen Flächen.

Wird endlich vorgeschrieben, daß die Asymptotenlinien auf der Evolvente und auf beiden Evoluten einander entsprechen sollen, so kann dieser Forderung nur durch die Flächen konstanten Krümmungsmaßes genügt werden. Denn K müßte dann eine Funktion sowohl von q allein wie von p allein werden, und dies ist wegen der Unabhängigkeit der Parameter p und q nur möglich, wenn sich beide Funktionen auf eine und dieselbe Konstante reduzieren. Ihr Wert ist der Realität der Asymptotenkurven wegen als negativ anzunehmen.

§ 117.

Einführung der geometrischen Ableitungen in die Theorie der Evoluten.

Die Formeln für die Krümmungsmittelpunktsflächen sind wenig übersichtlich, namentlich auch wegen der Art des Auftretens der Größen E^* und G^*. Aber diese Unübersichtlichkeit verschwindet sofort, wenn man statt der gewöhnlichen Differentialquotienten geometrische Ableitungen einführt. Die geometrischen Differentiationen

längs der ersten und zweiten Krümmungslinie mögen durch die Operationszeichen Θ_1 und Θ_2 gekennzeichnet werden (S. 254), sodaß für die Parameter der Krümmungslinien selbst

$$(1) \qquad \Theta_1 \chi = \frac{1}{\sqrt{E^*}} \frac{\partial \chi}{\partial p}, \qquad \Theta_2 \chi = \frac{1}{\sqrt{G^*}} \frac{\partial \chi}{\partial q}$$

ist.

Die auf S. 379—384 aufgestellten Formeln, soweit sie für die Theorie der Evoluten grundlegend sind, werden nun für die erste Schale

$$(2) \qquad \begin{aligned} E_1^* &= E^*(\Theta_1 \varrho_1)^2 \\ F_1^* &= T^* \Theta_1 \varrho_1 \cdot \Theta_2 \varrho_1 \\ G_1^* &= G^*\left(\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 + (\Theta_2 \varrho_1)^2\right) \end{aligned}$$

$$(3) \qquad X_1 = \Theta_1 x, \qquad Y_1 = \Theta_1 y, \qquad Z_1 = \Theta_1 z$$

$$(4) \qquad L_1^* = - L^* \Theta_1 \varrho_1, \qquad M_1^* = 0, \qquad N_1^* = N^* \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \Theta_1 \varrho_2$$

$$(5) \qquad H_1 = \frac{\varrho_1^2 \Theta_1 \varrho_1 \cdot \Theta_1 \varrho_2 - \varrho_2^2 (\Theta_2 \varrho_1)^2 - (\varrho_1 - \varrho_2)^2}{\varrho_1 (\varrho_1 - \varrho_2)^2 \Theta_1 \varrho_1}$$

$$(6) \qquad K_1 = - \frac{\Theta_1 \varrho_2}{(\varrho_1 - \varrho_2)^2 \Theta_1 \varrho_1}.$$

Für die zweite Schale ist ebenso

$$(7) \qquad \begin{aligned} E_2^* &= E^*\left(\left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^2 + (\Theta_1 \varrho_2)^2\right) \\ F_2^* &= T^* \Theta_1 \varrho_2 \cdot \Theta_2 \varrho_2 \\ G_2^* &= G^* (\Theta_2 \varrho_2)^2 \end{aligned}$$

$$(8) \qquad X_2 = \Theta_2 x, \qquad Y_2 = \Theta_2 y, \qquad Z_2 = \Theta_2 z$$

$$(9) \qquad L_2^* = L^* \frac{\varrho_2}{\varrho_1} \Theta_2 \varrho_1, \qquad M_2^* = 0, \qquad N_2^* = - N^* \Theta_2 \varrho_2$$

$$(10) \qquad H_2 = \frac{\varrho_2^2 \Theta_2 \varrho_1 \cdot \Theta_2 \varrho_2 - \varrho_1^2 (\Theta_1 \varrho_2)^2 - (\varrho_1 - \varrho_2)^2}{\varrho_2 (\varrho_1 - \varrho_2)^2 \Theta_2 \varrho_2}$$

$$(11) \qquad K_2 = - \frac{\Theta_2 \varrho_1}{(\varrho_1 - \varrho_2)^2 \Theta_2 \varrho_2}.$$

Hiermit sind die elementaren symmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen vollständig, die übrigen vorkommenden Größen so weit, wie es der Natur der Sache nach möglich ist, durch geometrische Größen dargestellt, die von der Wahl der Koordinaten nicht abhängen.

Zwei von den geometrischen Ableitungen der Hauptkrümmungsradien können noch durch die Tangentialkrümmungen der Krümmungslinien vertreten werden. Denn nach S. 255 (B) ist, wenn

$$n_1 = \frac{1}{\varrho_1}, \qquad n_2 = \frac{1}{\varrho_2}$$

eingesetzt wird,

$$\Theta_2 \varrho_1 + \varrho_1 \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) g_1 = 0 \tag{12}$$

$$\Theta_1 \varrho_2 + \varrho_2 \left(1 - \frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right) g_2 = 0. \tag{13}$$

§ 118.

Allgemeine Darstellung der geometrischen Ableitungen längs der Krümmungslinien.

In den Formeln (2) bis (11) kann man ϱ_1 und ϱ_2 von vornherein als in beliebigen Parametern gegeben annehmen; aber von wesentlicher Bedeutung ist es, auch die geometrischen Ableitungen von der speziellen Darstellung (1) frei zu machen. Zu diesem Zweck braucht man nur die schon im § 28 angebahnte Transformation der beiden Grundformen A und B in algebraische Summen von Quadraten linearer Formen weiter zu verfolgen. Die dort vorkommenden Gleichungen $\mathfrak{P}_1 = 0$, $\mathfrak{P}_2 = 0$ können nämlich jetzt als Differentialgleichungen der Krümmungslinien der Ausgangsfläche betrachtet werden, und zwar würde $\mathfrak{P}_2 = 0$ nach der auf S. 88 in Verbindung mit S. 378 getroffenen Zuordnung das Integral $q(u, v) = \text{const.}$, $\mathfrak{P}_1 = 0$ das Integral $p(u, v) = \text{const.}$ liefern. Hiernach sind z. B. in $\Theta_1 \chi$, dem Quotienten aus dem Differential $d\chi \equiv \frac{\partial \chi}{\partial u} du + \frac{\partial \chi}{\partial v} dv$ beim Fortgange längs der ersten Krümmungslinie und dem Bogenelement $ds \equiv \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}$ dieser Kurve, die Differentiale du und dv durch die Bedingung

$$p_{21} du + p_{22} dv = 0$$

verbunden. Was nun aber die Koeffizienten in den linearen Differentialformen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ angeht, so bestimmt man diese, nachdem n_1 und n_2 einmal als Wurzeln einer quadratischen Gleichung dargestellt sind, zweckmäßig aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathsf{A} &= \mathfrak{P}_1^2 + \mathfrak{P}_2^2 \\ \mathsf{B} &= n_1 \mathfrak{P}_1^2 + n_2 \mathfrak{P}_2^2, \end{aligned} \tag{1}$$

die

$$(2) \qquad \mathfrak{P}_1^2 = \frac{\mathsf{B} - n_2 \mathsf{A}}{n_1 - n_2}, \qquad \mathfrak{P}_2^2 = \frac{n_1 \mathsf{A} - \mathsf{B}}{n_1 - n_2}$$

liefern. Wegen

$$(3) \qquad (L - En_i)(N - Gn_i) = (M - Fn_i)^2 \qquad (i = 1, 2)$$

darf man

$$(4) \qquad \mathfrak{P}_1 = \sqrt{\frac{L - En_2}{n_1 - n_2}}\, du + \sqrt{\frac{N - Gn_2}{n_1 - n_2}}\, dv$$

ansetzen, wobei der eine der beiden Wurzelwerte, etwa der erste, zunächst willkürlich bleibt, der andere aber mit ihm durch die Gleichung

$$(5) \qquad \sqrt{\frac{L - En_2}{n_1 - n_2}} \sqrt{\frac{N - Gn_2}{n_1 - n_2}} = \frac{M - Fn_2}{n_1 - n_2}$$

verbunden ist. Nun ist $\mathfrak{P}_1$ eine Kovariante des Formenpaares (A, B), d. h. es besteht beim Übergange zu den Parametern p, q die Gleichung

$$p_{11} du + p_{12} dv = p_{11}^* dp + p_{12}^* dq.$$

Und da $\mathfrak{P}_1 = 0$ das Integral $p = \text{const.}$ haben sollte, so muß $p_{12}^* = 0$ sein, und p_{11}^{*2} wird gleich E^*, mithin die rechte Seite der vorhergehenden Gleichung gleich $\sqrt{E^*}dp$, bei passender Wahl des Wertes von $\sqrt{E^*}$. Es empfiehlt sich, diesen Wurzelwert ein für allemal zu fixieren und der allgemein festgehaltenen Bestimmung gemäß als positiv anzunehmen. Dann läßt sich also der Wert von $\sqrt{\frac{L - En_2}{n_1 - n_2}}$ und damit auch der von $\sqrt{\frac{N - Gn_2}{n_1 - n_2}}$ so wählen, daß für

$$(6) \qquad p_{11} = \sqrt{\frac{L - En_2}{n_1 - n_2}}, \qquad p_{12} = \sqrt{\frac{N - Gn_2}{n_1 - n_2}}$$

die Gleichung

$$(7) \qquad p_{11} du + p_{12} dv = \sqrt{E^*}\, dp$$

stattfindet.

Für die Koeffizienten von $\mathfrak{P}_2$ bedarf es keiner neuen Vorzeichenbestimmung. Es ist nämlich (vgl. die allgemeinere Untersuchung S. 178—179)

$$(8) \qquad \mathfrak{P}_2^2 = D_a(\mathfrak{P}_1, \mathsf{A})^2,$$

wo nach der Definitionsgleichung S. 173 (8)

$$(9) \qquad D_a(\mathfrak{P}_1, \mathsf{A}) = \frac{1}{T}\left((Fp_{11} - Ep_{12}) du + (Gp_{11} - Fp_{12}) dv\right)$$

ist. Erklärt man nun die Koeffizienten von $\mathfrak{P}_2$ eindeutig durch den Ansatz

$$(10)\qquad p_{21} = \frac{1}{T}(Fp_{11} - Ep_{12}), \qquad p_{22} = \frac{1}{T}(Gp_{11} - Fp_{12}),$$

so sieht man, daß beim Übergange zu p und q die der Gleichung (7) entsprechende

$$(11)\qquad p_{21}du + p_{22}dv = \sqrt{G^*}dq$$

besteht, in der $\sqrt{G^*}$ ebenfalls den positiven Wert hat.

Zwischen den Größen $p_{11}, \dots p_{22}$ gilt die Relation

$$(12)\qquad p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12} = T,$$

und p_{21}, p_{22} für sich allein genügen, wie sich nach (2) von selbst versteht, den den Formeln (6) und (5) entsprechenden

$$(13)\qquad p_{21}^2 = \frac{En_1 - L}{n_1 - n_2}, \qquad p_{22}^2 = \frac{Gn_1 - N}{n_1 - n_2}$$

$$(14)\qquad p_{21}p_{22} = \frac{Fn_1 - M}{n_1 - n_2}.$$

Die Gleichungen (10) können auch in der Form

$$(15)\qquad p_{11} = \frac{1}{T}(-Fp_{21} + Ep_{22}), \qquad p_{12} = \frac{1}{T}(-Gp_{21} + Fp_{22})$$

geschrieben werden.

Nun sind ferner die Ausdrücke

$$(16)\qquad \begin{aligned} \Theta_1\chi &\equiv \frac{1}{T}\left(\ \ p_{22}\frac{\partial\chi}{\partial u} - p_{21}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right) \\ \Theta_2\chi &\equiv \frac{1}{T}\left(-p_{12}\frac{\partial\chi}{\partial u} + p_{11}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right) \end{aligned}$$

Kovarianten des Formensystems $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, d\chi)$. Mit diesem Vorzeichen angesetzt, liefern sie beim Übergange zu p und q

$$(17)\qquad \Theta_1\chi = \frac{1}{\sqrt{E^*}}\frac{\partial\chi}{\partial p}, \qquad \Theta_2\chi = \frac{1}{\sqrt{G^*}}\frac{\partial\chi}{\partial q}.$$

Das heißt, die Formeln (16) geben die gesuchten allgemeinen Ausdrücke der geometrischen Ableitungen einer beliebigen Funktion beim Fortgang längs der Krümmungslinien.

§ 119.

Die allgemeinen Ausdrücke der Fundamentalgrößen der Evolute.

Hiernach können z. B. die Richtungskosinus der Normalen der Evoluten, oder was dasselbe ist, die Richtungskosinus der Haupttangenten der Evolvente, allgemein angegeben werden:

$$(1)\qquad X_1 = \frac{1}{T}\left(\ \ p_{22}\frac{\partial x}{\partial u} - p_{21}\frac{\partial x}{\partial v}\right), \dots$$

$$(2)\qquad X_2 = \frac{1}{T}\left(-p_{12}\frac{\partial x}{\partial u} + p_{11}\frac{\partial x}{\partial v}\right), \dots .$$

Es sollen jetzt auch die Fundamentalgrößen der ersten Evolutenschale allgemein bestimmt werden.

Aus S. 378 (1) ergibt sich

$$(3)\qquad \frac{\partial x_1}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u} + \varrho_1\frac{\partial X}{\partial u} + X\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}, \dots$$

$$(4)\qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v} + \varrho_1\frac{\partial X}{\partial v} + X\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}, \dots ,$$

also

$$(5)\qquad \begin{aligned} E_1 &= E - 2\varrho_1 L + \varrho_1^2\mathfrak{E} + \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right)^2 \\ F_1 &= F - 2\varrho_1 M + \varrho_1^2\mathfrak{F} + \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} \\ G_1 &= G - 2\varrho_1 N + \varrho_1^2\mathfrak{G} + \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}\right)^2, \end{aligned}$$

oder wegen

$$\mathfrak{E} = \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}\right)L - \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}E, \dots :$$

$$(6)\qquad \begin{aligned} E_1 &= \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)(E - L\varrho_1) + \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right)^2 \\ F_1 &= \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)(F - M\varrho_1) + \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} \\ G_1 &= \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)(G - N\varrho_1) + \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}\right)^2, \end{aligned}$$

wozu noch

$$(7)\qquad T_1^2 = \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\left((E - L\varrho_1)\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}\right)^2 - 2(F - M\varrho_1)\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}\frac{\partial \varrho_1}{\partial u} + (G - N\varrho_1)\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right)^2\right),$$

d. h.

$$(8)\qquad \begin{aligned} T_1^2 &= \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\frac{1}{E - L\varrho_1}\left((E - L\varrho_1)\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} - (F - M\varrho_1)\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\frac{1}{G - N\varrho_1}\left((F - M\varrho_1)\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} - (G - N\varrho_1)\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right)^2 \end{aligned}$$

tritt.

Zur Berechnung der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung

$$L_1 \equiv -\sum \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial X_1}{\partial u}, \dots$$

wird man die gewöhnlichen Ableitungen durch geometrische ersetzen, weil dann die allgemeinen Frenetschen Formeln benutzt werden können. Aus (16) und (12) (S. 391) folgt für irgendeine Funktion $\chi(u, v)$

$$\text{(9)} \quad \begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial u} &= p_{11} \Theta_1 \chi + p_{21} \Theta_2 \chi \\ \frac{\partial \chi}{\partial v} &= p_{12} \Theta_1 \chi + p_{22} \Theta_2 \chi, \end{aligned}$$

also speziell für $\chi = x$

$$\text{(10)} \quad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= p_{11} X_1 + p_{21} X_2 \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= p_{12} X_1 + p_{22} X_2. \end{aligned}$$

Um auch die Ergebnisse der Annahmen $\chi = X, X_1, X_2$ auf eine einfache Form zu bringen, hat man in den Gleichungen (a, b, c) (S. 55)

$$A = X_1, \qquad A' = X_2,$$

$$t = 0, \qquad n = n_1, \qquad g = g_1$$

zu setzen und Θ_1 für Θ zu schreiben. Dann wird

$$\text{(11)} \quad \Theta_1 X_1 = g_1 X_2 + n_1 X, \ldots$$

$$\text{(12)} \quad \Theta_1 X_2 = - g_1 X_1, \ldots$$

$$\text{(13)} \quad \Theta_1 X = - n_1 X_1, \ldots .$$

Die entsprechenden Formeln für die zweite Krümmungslinie brauchen nicht besonders angegeben zu werden.

Die Gleichungen (13) sind natürlich wieder die Formeln von Rodrigues.

Nun wird

$$\text{(14)} \quad \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= - p_{11} n_1 X_1 - p_{21} n_2 X_2, \ldots \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= - p_{12} n_1 X_1 - p_{22} n_2 X_2, \ldots, \end{aligned}$$

also nach (3) und (4)

$$\text{(15)} \quad \begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial u} &= p_{21} \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) X_2 + (p_{11} \Theta_1 \varrho_1 + p_{21} \Theta_2 \varrho_1) X, \ldots \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} &= p_{22} \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) X_2 + (p_{12} \Theta_1 \varrho_1 + p_{22} \Theta_2 \varrho_1) X, \ldots . \end{aligned}$$

Ferner ist

$$(16)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial X_1}{\partial u} &= (p_{11}g_1 - p_{21}g_2)X_2 + p_{11}n_1 X, \ldots \\ \frac{\partial X_1}{\partial v} &= (p_{12}g_1 - p_{22}g_2)X_2 + p_{12}n_1 X, \ldots . \end{aligned}$$

Aus diesen Formeln entsteht

$$(17)\qquad \begin{aligned} -L_1 &= p_{21}(p_{11}g_1 - p_{21}g_2)\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) + \frac{p_{11}}{\varrho_1}(p_{11}\Theta_1\varrho_1 + p_{21}\Theta_2\varrho_1) \\ -M_1 &= p_{21}(p_{12}g_1 - p_{22}g_2)\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) + \frac{p_{12}}{\varrho_1}(p_{11}\Theta_1\varrho_1 + p_{21}\Theta_2\varrho_1) \\ -M_1 &= p_{22}(p_{11}g_1 - p_{21}g_2)\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) + \frac{p_{11}}{\varrho_1}(p_{12}\Theta_1\varrho_1 + p_{22}\Theta_2\varrho_1) \\ -N_1 &= p_{22}(p_{12}g_1 - p_{22}g_2)\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right) + \frac{p_{12}}{\varrho_1}(p_{12}\Theta_1\varrho_1 + p_{22}\Theta_2\varrho_1). \end{aligned}$$

Der Einheitlichkeit der Darstellung wegen hat man hierin die geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien durch ihre Werte aus den Fundamentalgleichungen (S. 389 (12, 13))

$$(18)\qquad g_1 = \frac{\varrho_2\Theta_2\varrho_1}{\varrho_1(\varrho_1 - \varrho_2)}, \qquad g_2 = \frac{\varrho_1\Theta_1\varrho_2}{\varrho_2(\varrho_2 - \varrho_1)}$$

zu ersetzen. Auf diese Weise ergibt sich

$$(19)\qquad \begin{aligned} L_1 &= p_{21}^2\frac{\varrho_1\Theta_1\varrho_2}{\varrho_2^2} - p_{11}^2\frac{\Theta_1\varrho_1}{\varrho_1} \\ M_1 &= p_{21}p_{22}\frac{\varrho_1\Theta_1\varrho_2}{\varrho_2^2} - p_{11}p_{12}\frac{\Theta_1\varrho_1}{\varrho_1} \\ N_1 &= p_{22}^2\frac{\varrho_1\Theta_1\varrho_2}{\varrho_2^2} - p_{12}^2\frac{\Theta_1\varrho_1}{\varrho_1}. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man schließlich die Gleichungen (6), (5), (13) und (14) des vorigen Paragraphen in der Form

$$(20)\qquad \begin{aligned} p_{11}^2 &= \frac{(L\varrho_2 - E)\varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_1} \\ p_{11}p_{12} &= \frac{(M\varrho_2 - F)\varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_1} \\ p_{12}^2 &= \frac{(N\varrho_2 - G)\varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_1} \end{aligned}$$

$$(21)\qquad \begin{aligned} p_{21}^2 &= \frac{(E - L\varrho_1)\varrho_2}{\varrho_2 - \varrho_1} \\ p_{21}p_{22} &= \frac{(F - M\varrho_1)\varrho_2}{\varrho_2 - \varrho_1} \\ p_{22}^2 &= \frac{(G - N\varrho_1)\varrho_2}{\varrho_2 - \varrho_1}, \end{aligned}$$

so erhält man

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{\varrho_2(\varrho_2-\varrho_1)}((E-L\varrho_2)\varrho_2\Theta_1\varrho_1 + (E-L\varrho_1)\varrho_1\Theta_1\varrho_2) \\ (22)\qquad M_1 &= \frac{1}{\varrho_2(\varrho_2-\varrho_1)}((F-M\varrho_2)\varrho_2\Theta_1\varrho_1 + (F-M\varrho_1)\varrho_1\Theta_1\varrho_2) \\ N_1 &= \frac{1}{\varrho_2(\varrho_2-\varrho_1)}((G-N\varrho_2)\varrho_2\Theta_1\varrho_1 + (G-N\varrho_1)\varrho_1\Theta_1\varrho_2). \end{aligned}$$

Obgleich die elementaren symmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen bereits im § 117 (S. 388) mittels Durchganges durch die Hauptparameter der Evolvente allgemein bestimmt worden sind, so ist es doch interessant, sich klar zu machen, wie diese Ausdrücke aus den Formeln (6), (7) und (22) wieder hervorgehen. Behält man in den Gleichungen (6) vorerst die gewöhnlichen Ableitungen bei, so treten die Differentialparameter

$$\frac{G\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varrho_1}{\partial u}\frac{\partial\varrho_1}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial v}\right)^2}{EG-F^2} \equiv \Delta_a^1\varrho_1$$

und

$$\frac{N\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial u}\right)^2 - 2M\frac{\partial\varrho_1}{\partial u}\frac{\partial\varrho_1}{\partial v} + L\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial v}\right)^2}{EG-F^2} \equiv \Delta_{ab}^1\varrho_1$$

auf, wie aus der Gleichung (7) unmittelbar ersichtlich ist. Auf Grund der Formeln S. 389 (1) wird nun

$$(23)\qquad \Delta_a^1\chi = \Theta_1^2\varphi + \Theta_2^2\chi$$

$$(24)\qquad \Delta_{ab}^1\chi = \frac{1}{\varrho_1\varrho_2}(\varrho_1\Theta_1^2\chi + \varrho_2\Theta_2^2\chi),$$

mithin

$$(E-L\varrho_1)\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial v}\right)^2 - 2(F-M\varrho_1)\frac{\partial\varrho_1}{\partial v}\frac{\partial\varrho_1}{\partial u} + (G-N\varrho_1)\left(\frac{\partial\varrho_1}{\partial u}\right)^2$$

$$\equiv T^2(\Delta_a^1\varrho_1 - \varrho_1\Delta_{ab}^1\varrho_1) = T^2\left(1-\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\Theta_1^2\varrho_1,$$

$$(25)\qquad T_1^2 = T^2\left(1-\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2\Theta_1^2\varrho_1.$$

Im übrigen ist es nicht nötig, die Einzelheiten der einfachen Rechnung, die zu H_1 und K_1 führt, zu verfolgen.

§ 120.

Spezielle Parameter.

Handelt es sich, wie beim Weingartenschen Satze, um eine Aussage über das Linienelement der Krümmungsmittelpunktsfläche unter

besonderen Voraussetzungen, so wird man auch die Parameter spezialisieren. Nun ist auf S. 381 unter (2) für dieses Linienelement die Formel

$$ds_1^2 = d\varrho_1^2 + \overline{G}_1 dq^2 \tag{1}$$

aufgestellt worden. Sie führt von selbst darauf, für eine bestimmte Schale der Evolute einen der beiden Hauptparameter der Evolvente durch einen bestimmten Hauptkrümmungsradius zu ersetzen. Es soll jetzt untersucht werden, was aus den auf die Evolute bezüglichen Größen wird, wenn man diese Annahme macht, also die Evolvente auf die erste Schar ihrer Krümmungslinien und die Kurvenschar $\varrho_1 =$ const. bezieht. Es versteht sich von selbst, daß für $u = \varrho_1$, $v = q$ von vornherein die auf S. 385 erwähnten Flächen außer Betracht bleiben, für welche ϱ_1 längs der zugehörigen Krümmungslinie einen konstanten Wert hat.

Die Bedingung dafür, daß die Differentialgleichung der Krümmungslinien durch $dv = 0$ erfüllt wird, lautet

$$FL - EM = 0. \tag{2}$$

Der zu $v =$ const. gehörende Halbmesser der Normalkrümmung ist dann der Hauptkrümmungsradius ϱ_1, mithin wird

$$\frac{E}{L} = \varrho_1 \tag{3}$$

und infolge von (2) auch

$$\frac{F}{M} = \varrho_1. \tag{4}$$

Die letzte Gleichung gilt nicht, wenn F und demnach auch M gleich Null ist. Allein diese Annahme, die auf die Parameter beider Krümmungslinien zurückführen würde, soll jetzt ausgeschlossen sein. Im übrigen werde vorläufig über u nicht verfügt. Auch möge für q zunächst das Zeichen v beibehalten und das alleinige Bestehen der Voraussetzung (2) in den Bezeichnungen für die Fundamentalgrößen nicht besonders zum Ausdruck gebracht werden.

Da zwischen ϱ_1, ϱ_2 und den sechs Fundamentalgrößen die beiden Gleichungen

$$(5) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} &= \frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2} \\ \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \end{aligned}$$

gelten, so lassen sich immer dann, wenn die Fundamentalgrößen durch eine Relation verbunden sind, die der zweiten Ordnung durch die der

ersten und die Hauptkrümmungsradien darstellen. Bei sofortiger Benutzung der Werte aus (3) und (4),

(6) $$L = \frac{E}{\varrho_1} \equiv E n_1$$

(7) $$M = \frac{F}{\varrho_1} \equiv F n_1,$$

geben die Gleichungen (5) übereinstimmend:

(8) $$N = \frac{1}{E}\left(\frac{F^2}{\varrho_1} + \frac{T^2}{\varrho_2}\right) \equiv \frac{F^2 n_1 + T^2 n_2}{E}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die zweite und dritte Fundamentalgleichung (S. 229 (D)) ein, so erhält man, je nachdem man mit den Hauptkrümmungen oder den Hauptkrümmungsradien rechnet,

(9) $$\begin{gathered} E\left(E\frac{\partial n_1}{\partial v} - F\frac{\partial n_1}{\partial u}\right) - (n_1 - n_2)T^2 J_2 = 0 \\ F\left(E\frac{\partial n_1}{\partial v} - F\frac{\partial n_1}{\partial u}\right) - T^2\frac{\partial n_2}{\partial u} - (n_1 - n_2)T^2\left(\frac{2F}{E}J_2 - J_2'\right) = 0 \end{gathered}$$

oder

(10) $$\begin{gathered} E\left(E\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} - F\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right) + \varrho_1\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)T^2 J_2 = 0 \\ F\left(E\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} - F\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right) - \frac{\varrho_1^2}{\varrho_2^2}T^2\frac{\partial \varrho_2}{\partial u} + \varrho_1\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)T^2\left(\frac{2F}{E}J_2 - J_2'\right) = 0. \end{gathered}$$

Für $u = \varrho_1$, also

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial u} = 1, \qquad \frac{\partial \varrho_1}{\partial v} = 0,$$

vereinfachen sich die Gleichungen wesentlich. Kennzeichnet man für q und ϱ_1 als Parameter alle von ihnen abhängigen Größen durch einen Horizontalstrich, so erhält man

(11) $$\begin{gathered} \overline{E}\,\overline{F} - \varrho_1\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\overline{T}^2\overline{J}_2 = 0 \\ \overline{F}^2 + \frac{\varrho_1^2}{\varrho_2^2}\overline{T}^2\frac{\partial \varrho_2}{\partial \varrho_1} - \varrho_1\left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\overline{T}^2\left(\frac{2\overline{F}}{\overline{E}}\overline{J}_2 - \overline{J}_2'\right) = 0. \end{gathered}$$

Um diese Relationen für die Theorie der Evoluten nutzbar zu machen, muß man vor allem die Fundamentalgrößen erster Ordnung dieser Fläche für die Annahme $v = q$ kennen. Daß $\overline{E}_1 = 1$, $\overline{F}_1 = 0$ wird, wenn man sofort $u = \varrho_1$ hinzunimmt, lehrt zwar die Formel (1) unmittelbar. Aber der auf S. 381 angegebene Wert von $\overline{G}_1$ ist hier nicht brauchbar, weil die darin vorkommende Fundamentalgröße G^* der Evolvente sich auf die Annahme $v = q$, $u = p$ bezieht. Nun

folgt aus S. 392 (6) unter der Bedingung (2), also auch (6), (7) und (8):

$$(12)\quad E_1 = \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right)^2, \qquad F_1 = \frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}, \qquad G_1 = \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 \frac{T^2}{E} + \left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}\right)^2,$$

und noch spezieller, wenn $u = \varrho_1$ ist,

$$(13)\qquad \overline{E}_1 = 1, \qquad \overline{F}_1 = 0, \qquad \overline{G}_1 = \left(1 - \frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)^2 \frac{\overline{T}^2}{\overline{E}}.$$

Aus der letzten Formel geht hervor, daß man die in der zweiten Gleichung (11) vorkommende partielle Ableitung $\frac{\partial \varrho_2}{\partial \varrho_1}$ durch eine Ableitung von $\overline{G}_1$ ersetzen kann. Des Ausdrucks dieser Größe wegen ist dabei logarithmische Differentiation anzuwenden. Die Ausführung der Rechnung liefert

$$(14)\qquad \frac{\partial \log \overline{G}_1}{\partial \varrho_1} = \frac{2}{\varrho_1 - \varrho_2} + \frac{2\overline{F}^2 \varrho_2}{\overline{T}^2 \varrho_1 (\varrho_1 - \varrho_2)} + \frac{2\overline{F}}{\overline{E}} \overline{J}_2,$$

und wenn noch $\overline{J}_2$ durch seinen Wert aus der ersten Gleichung (11) ersetzt wird:

$$(15)\qquad \frac{\partial \log \overline{G}_1}{\partial \varrho_1} = \frac{2}{\varrho_1 - \varrho_2}.$$

Man hätte diese partielle Differentialgleichung zu einer der Fundamentalgleichungen der Evolute in Beziehung setzen können, doch ist dazu die Kenntnis auch der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung für die Parameter ϱ_1 und q erforderlich. Übrigens würden sich diese Größen aus den Formeln auf S. 395 leicht berechnen lassen.

Ist die Evolvente eine Weingartensche Fläche, so folgt aus (15) für das Linienelement der Evolute wieder die Formel S. 381 (19).

§ 121.

Die Evolvente bei gegebener Evolute.

Führt man die eben benutzten Parameter q und ϱ_1 auch in die Formeln S. 392 (3) ein, so erhält man

$$(1)\qquad \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1} = X, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \varrho_1} = Y, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial \varrho_1} = Z,$$

und daraus in Verbindung mit den Gleichungen der Evolute (S. 378 (1)):

$$(2)\qquad \begin{aligned} x &= x_1 - \varrho_1 \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1} \\ y &= y_1 - \varrho_1 \frac{\partial y_1}{\partial \varrho_1} \\ z &= z_1 - \varrho_1 \frac{\partial z_1}{\partial \varrho_1}. \end{aligned}$$

Dies wäre also eine Darstellung der Evolvente mittels der kartesischen Koordinaten der Evolute, aber unter der Annahme, daß die krummlinigen Koordinaten eine spezielle Bedeutung für die Evolvente haben. Will man allein von der Evolute ausgehen, so muß man sich von dieser Voraussetzung befreien.

Nun wird die Evolute von den Normalen der Evolvente berührt (S. 379). Außerdem ist bekannt, daß wenn man diese Normalen als Tangenten einer Schar von Kurven auf der Evolute auffaßt, die Kurven geodätisch sein müssen; und umgekehrt (S. 364). Es sei demnach die Fläche, die als Krümmungsmittelpunktsfläche betrachtet werden soll, auf ein orthogonal-geodätisches Koordinatennetz bezogen, d. h.

(3) $$ds_1^2 = d\varrho_1^2 + \overline{G}_1 dq^2$$

gesetzt, wo q und ϱ_1 die aus der Theorie der geodätischen Linien (§ 86) bekannte Bedeutung haben und über die Bestimmung dieser Größen mittels der partiellen Differentialgleichung

(4) $$\frac{G_1\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\right)^2 - 2F_1\frac{\partial \varrho_1}{\partial u}\frac{\partial \varrho_1}{\partial v} + E_1\left(\frac{\partial \varrho_1}{\partial v}\right)^2}{E_1 G_1 - F_1^2} = 1$$

die Bemerkungen des § 89 gelten. Alsdann werde eine neue Fläche durch die Gleichungen (2) definiert.

Setzt man

$$\frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1} = X, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial \varrho_1} = Y, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial \varrho_1} = Z,$$

so kann man sich erstens leicht davon überzeugen, daß diese Größen die Richtungskosinus der Normale der Fläche (2) bedeuten. Denn zunächst ist

(5) $$\sum X^2 \equiv \sum\left(\frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1}\right)^2 \equiv \overline{E}_1 = 1,$$

woraus

(6) $$\sum X\frac{\partial X}{\partial \varrho_1} = 0$$

(7) $$\sum X\frac{\partial X}{\partial q} = 0.$$

Ferner ergibt sich durch Differentiation der Gleichungen (2)

(8) $$\frac{\partial x}{\partial \varrho_1} = -\varrho_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial \varrho_1^2} = -\varrho_1\frac{\partial X}{\partial \varrho_1}, \cdots$$

(9) $$\frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial x_1}{\partial q} - \varrho_1\frac{\partial^2 x_1}{\partial \varrho_1 \partial q} = \frac{\partial x_1}{\partial q} - \varrho_1\frac{\partial X}{\partial q}, \cdots.$$

Die Einführung der hieraus folgenden Werte von $\frac{\partial X}{\partial \varrho_1}$ und $\frac{\partial X}{\partial q}, \cdots$ in (6) und (7) liefert

(10) $$\sum X \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} = 0$$

und

$$\sum X \frac{\partial x}{\partial q} - \sum X \frac{\partial x_1}{\partial q} = 0,$$

d. h.

(11) $$\sum X \frac{\partial x}{\partial q} = \sum \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1} \frac{\partial x_1}{\partial q} \equiv \overline{F}_1 = 0,$$

und die Gleichungen (5), (10) und (11) kennzeichnen in der Tat X, Y, Z als Richtungskosinus der Normale der Fläche (x, y, z). In der Form

$$x_1 = x + \varrho_1 X, \qquad y_1 = y + \varrho_1 Y, \qquad z_1 = z + \varrho_1 Z$$

geschrieben, lehren dann weiter die Gleichungen (2), daß die Ausgangsfläche dieser Untersuchung die zum Hauptkrümmungsradius ϱ_1 gehörende Evolute der Fläche (2), oder daß diese eine Evolvente jener ist.

Über q und ϱ_1 läßt sich noch Weiteres aussagen. Vergleicht man nämlich (8),

$$\frac{\partial X}{\partial \varrho_1} = -\frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial x}{\partial \varrho_1}, \ldots,$$

mit den Weingartenschen Gleichungen

$$\frac{\partial X}{\partial \varrho_1} = \overline{\eta}_{11} \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} + \overline{\eta}_{12} \frac{\partial x}{\partial q}, \ldots,$$

so sieht man, daß

$$\overline{\eta}_{11} = -\frac{1}{\varrho_1}, \qquad \overline{\eta}_{12} = 0$$

ist. Die zweite Bedingung, nämlich

$$\overline{F}\,\overline{L} - \overline{E}\,\overline{M} = 0,$$

kennzeichnet die Kurven $q = \text{const.}$ als die eine Schar von Krümmungslinien auf der Evolvente, und die erste liefert mit der zweiten zusammen

$$\varrho_1 = \frac{E}{L},$$

d. h. ϱ_1 ist der zu diesen Krümmungslinien gehörige Hauptkrümmungshalbmesser.

Da demnach q und ϱ_1 genau dieselbe Bedeutung haben im vorigen Paragraphen, so führt auch dieselbe Rechnung wie dort wieder auf

(12) $$\frac{\partial \log \overline{G}_1}{\partial \varrho_1} = -\frac{2}{\varrho_1 - \varrho_2}.$$

Hierin ist aber $\overline{G}_1$ nach Integration der Gleichung (4) bekannt, nämlich durch die Formel

(13) $$\frac{G_1\left(\frac{\partial q}{\partial u}\right)^2 - 2F_1\frac{\partial q}{\partial u}\frac{\partial q}{\partial v} + E_1\left(\frac{\partial q}{\partial v}\right)^2}{E_1 G_1 - F_1^2} = \frac{1}{\overline{G}_1}$$

gegeben. Die Relation (12) liefert

(14) $$\varrho_2 = \varrho_1 - \frac{2\overline{G}_1}{\frac{\partial \overline{G}_1}{\partial \varrho_1}},$$

und man findet daher die zweite Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche durch die Gleichungen

(15) $$\begin{aligned} x_2 &= x_1 - \frac{2\overline{G}_1}{\frac{\partial \overline{G}_1}{\partial \varrho_1}}\frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1} \\ y_2 &= y_1 - \frac{2\overline{G}_1}{\frac{\partial \overline{G}_1}{\partial \varrho_1}}\frac{\partial y_1}{\partial \varrho_1} \\ z_2 &= z_1 - \frac{2\overline{G}_1}{\frac{\partial \overline{G}_1}{\partial \varrho_1}}\frac{\partial z_1}{\partial \varrho_1} \end{aligned}$$

dargestellt.

Bei der ganzen Untersuchung ist der Fall stillschweigend ausgeschlossen worden, daß der Ansatz (2) keine Fläche, sondern nur eine Kurve liefert. Dann sind x, y, z Funktionen einer Variablen t, die ihrerseits Funktion von ϱ_1 und q oder von einer dieser Veränderlichen ist, und man hat

(16) $$\frac{\partial x}{\partial \varrho_1} = \frac{dx}{dt}\frac{\partial t}{\partial \varrho_1}, \qquad \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{dx}{dt}\frac{\partial t}{\partial q}.$$

In diesem Fall muß die Ausgangsfläche besondere Eigenschaften haben.

Angenommen zuerst, es sei

$$\frac{\partial t}{\partial \varrho_1} = 0,$$

also t Funktion von q allein, sodaß

$$\frac{\partial x}{\partial \varrho_1} = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial \varrho_1} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial \varrho_1} = 0$$

und demnach infolge von (8) auch

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \varrho_1^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 y_1}{\partial \varrho_1^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z_1}{\partial \varrho_1^2} = 0$$

ist. Es wird

(17) $$x_1 = \varrho_1 U + U_1, \qquad y_1 = \varrho_1 V + V_1, \qquad z_1 = \varrho_1 W + W_1,$$

wo $U, \dots W_1$ Funktionen von q bezeichnen. Um $\overline{E}_1 = 1$ zu machen, hat man zwischen U, V und W die Relation

$$U^2 + V^2 + W^2 = 1$$

hinzuzunehmen. Die Gleichungen (17) stellen eine geradlinige Fläche dar (§ 107); die dritte Fundamentalgröße erster Ordnung hat für sie die Form

$$\overline{G}_1 = \alpha \varrho_1^2 + 2\beta \varrho_1 + \gamma, \tag{18}$$

wo auch α, β, γ Funktionen von q bedeuten.

Ist $\frac{\partial t}{\partial \varrho_1}$ nicht gleich Null, so ist

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \varrho_1^2} = -\frac{1}{\varrho_1}\frac{dx}{dt}\frac{\partial t}{\partial \varrho_1}, \dots$$

beizubehalten. Außerdem wird zufolge (9):

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial \varrho_1 \partial q} = \frac{1}{\varrho_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial q} - \frac{dx}{dt}\frac{\partial t}{\partial q}\right), \dots .$$

Diese partiellen Ableitungen zweiter Ordnung kommen in den aus

$$\overline{E}_1 = 1, \qquad \overline{F}_1 = 0$$

abgeleiteten Gleichungen

$$\sum \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial \varrho_1^2} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x_1}{\partial \varrho_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial \varrho_1 \partial q} = 0, \qquad \sum \frac{\partial x_1}{\partial q}\frac{\partial^2 x_1}{\partial \varrho_1^2} = 0,$$

sowie in

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{G}_1}{\partial \varrho_1} = \sum \frac{\partial x_1}{\partial q}\frac{\partial^2 x_1}{\partial \varrho_1 \partial q}$$

vor. Die Einführung ihrer Werte in die beiden letzten Formeln liefert

$$\frac{\partial t}{\partial \varrho_1}\sum \frac{\partial x_1}{\partial q}\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{G}_1}{\partial \varrho_1} = \frac{1}{\varrho_1}\sum\left(\frac{\partial x_1}{\partial q}\right)^2 - \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial t}{\partial q}\sum \frac{\partial x_1}{\partial q}\frac{dx}{dt}.$$

Es muß also

$$\frac{1}{2}\varrho_1 \frac{\partial \overline{G}_1}{\partial \varrho_1} - \overline{G}_1 = 0$$

sein, d. h. bei passender Wahl des Parameters q

$$\overline{G}_1 = \varrho_1^2. \tag{19}$$

Dieser Wert ist in (18) enthalten. Die Formel

$$ds_1^2 = d\varrho_1^2 + \varrho_1^2 dq^2 \tag{20}$$

stellt das Linienelement einer abwickelbaren Fläche dar. Die Flächen, deren Evolute abwickelbar ist (Gesimsflächen, surfaces moulures), sind von Monge genauer untersucht worden.

§ 122.

Umkehrung des Weingartenschen Satzes.

Die Ergebnisse der beiden letzten Paragraphen ermöglichen es, die Umkehrbarkeit des Weingartenschen Satzes zu prüfen. Es sei eine Umdrehungsfläche gegeben, deren Linienelement durch die Gleichung

$$ds^2 = d\varrho_1^2 + \psi(\varrho_1)^2 dq^2 \tag{1}$$

bestimmt wird. Verbiegt man diese Fläche, so gehen die Meridiankurven $q =$ const. in geodätische Linien, die Parallelkreise $\varrho_1 =$ const. in deren orthogonale Trajektorien über. Für die Biegungsfläche, deren kartesische Koordinaten x_1, y_1, z_1 sein mögen, bleibt

$$\overline{E}_1 = 1, \qquad \overline{F}_1 = 0, \qquad \overline{G}_1 = \psi(\varrho_1)^2. \tag{2}$$

Im allgemeinen liefern dann die Gleichungen S. 398 (2) eine neue Fläche, für welche diese Biegungsfläche die eine Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche ist. Außerdem sind die Hauptkrümmungsradien der Evolvente durch eine Relation verbunden. Denn die Gleichung S. 398 (15) gibt jetzt

$$\varrho_2 - \varrho_1 + \frac{\psi(\varrho_1)}{\psi'(\varrho_1)} = 0. \tag{3}$$

Nur dann, wenn $\overline{G}_1$ die Form $\alpha\varrho_1^2 + 2\beta\varrho_1 + \gamma$ hat, können Biegungsflächen entstehen, denen vermöge jener Gleichungen keine Evolvente zugehört. Die Größen α, β, γ müssen hier, wo $\overline{G}_1$ von ϱ_1 allein abhängt, Konstanten sein, und zwar ist, damit $\overline{G}_1$ beständig positiv sei,

$$\alpha > 0, \qquad \alpha\gamma - \beta^2 \geqq 0$$

anzunehmen. Läßt man die abwickelbaren Flächen und damit in der letzten Bedingung das Gleichheitszeichen beiseite, setzt dann

$$\sqrt{\alpha}\, dq = dq', \qquad \varrho_1 + \frac{\beta}{\alpha} = \varrho_1', \qquad \frac{\alpha\gamma - \beta^2}{\alpha^2} = \gamma'$$

und schreibt für q', ϱ_1', γ' wieder q, ϱ_1, γ, so erhält man

$$\psi(\varrho_1)^2 = \varrho_1^2 + \gamma, \qquad (\gamma > 0)$$

und aus (3) ergibt sich

$$\varrho_1\varrho_2 = -\gamma. \tag{4}$$

Hiernach können die Flächen, deren Linienelement durch

$$ds_1^2 = d\varrho_1^2 + (\varrho_1^2 + \gamma)\,dq^2 \tag{5}$$

gegeben ist, zwar im allgemeinen als Evoluten der Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes $-\frac{1}{\gamma}$ betrachtet werden. Um aber eine vollständige Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen zu erhalten, muß man zu diesen Evoluten noch bestimmte geradlinige Flächen hinzunehmen. Zu ihnen gehört nach S. 122 die Schraubenfläche, und ferner kommt das Linienelement (5) auch einem Katenoid zu. Der Weingartensche Satz, soweit er im § 114 bewiesen war, also jetzt der erste Teil dieses Satzes — denn auch die Umkehrung rührt von Weingarten selbst her — lautet für die durch (4) definierte Flächenklasse: Die Krümmungsmittelpunktsflächen der Flächen von konstantem negativen Krümmungsmaß sind sowohl auf die Rotationsfläche der Kettenlinie wie auf die Schraubenfläche abwickelbar.

Für jede andere Klasse Weingartenscher Flächen, für jede also, deren Hauptkrümmungsradien durch eine von $\varrho_1 \varrho_2 = -\gamma$ verschiedene Relation verknüpft sind, bilden die Krümmungsmittelpunktsflächen eine vollständige Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen.

X. Abschnitt.

Aufgaben der Biegungstheorie.

§ 123.

Die zu einem gegebenen Linienelement gehörenden Umdrehungsflächen.

Zu den Fragen aus der Biegungstheorie, die durch den Weingartenschen Satz angeregt werden, gehört vor allem die nach der Bestimmung einer Rotationsfläche aus dem Ausdruck ihres Linienelements. Ist also

(1) $$ds^2 = du^2 + \psi(u)^2 dv^2,$$

so soll die Funktion f in den Gleichungen des § 31 mittels der gegebenen Funktion ψ dargestellt werden.

Es werde

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

gesetzt, d. h. es sei

$$z = f(r)$$

die Gleichung der Meridiankurve in einer beliebigen ihrer Lagen, und

(2) $$x = r\cos v, \qquad y = r\sin v, \qquad z = f(r)$$

das System der Flächengleichungen.

Das Linienelement wird zuerst durch die Gleichung

(3) $$ds^2 = (1 + f'(r)^2)\,dr^2 + r^2 dv^2$$

(S. 102 (11)) wiedergegeben, und ein Übergang von (3) zu (1) wird vermittelt durch

$$(1 + f'(r)^2)\,dr^2 = du^2, \qquad r = \psi(u)$$

oder

$$\left(\frac{dr}{du}\right)^2 = \frac{1}{1 + f'(r)^2} = \psi'(u)^2.$$

Daraus folgt

(4) $$f(r) = \int \sqrt{1 - \psi'(u)^2}\,du.$$

Mit $r = \psi(u)$ zusammen bestimmt diese Gleichung f als Funktion von r. Betrachtet man die Meridiankurve in der (xz)-Ebene, setzt

also x für r und z gleich $f(x)$, so erhält man die gesuchte Darstellung für diese Kurve in der Form

(5) $$x = \psi(u), \qquad z = \int \sqrt{1 - \psi'(u)^2}\, du.$$

Die Darstellung der Fläche selbst lautet

(6) $$\begin{aligned} x &= \psi(u) \cos v \\ y &= \psi(u) \sin v \\ z &= \int \sqrt{1 - \psi'(u)^2}\, du. \end{aligned}$$

Aus bekanntem Grunde (S. 101) ist die in dem Integral enthaltene additive Konstante für die Natur der Fläche ohne Bedeutung. Und ebenso bleibt das Vorzeichen der Quadratwurzel gleichgültig.

Damit ist eine Umdrehungsfläche vom gegebenen Linienelement gefunden, und zwar vermittelst einer Quadratur. Aber die Untersuchung entscheidet nicht darüber, ob es noch andere Rotationsflächen mit demselben Linienelement gibt. Es sei für eine zweite

$$x_1 = u_1 \cos v_1, \qquad y_1 = u_1 \sin v_1, \qquad z_1 = f_1(r_1),$$

und nach Ausführung einer Quadratur

(7) $$ds_1^2 = du_1^2 + \psi_1(u_1)^2 dv_1^2.$$

Läßt sich die Gleichung

$$ds_1^2 = ds^2,$$

also

$$du_1^2 + \psi_1(u_1)^2 dv_1^2 = du^2 + \psi(u)^2 dv^2,$$

noch auf andere Weise herbeiführen als durch die identische Substitution

$$u_1 = u, \qquad v_1 = v, \qquad \psi_1 = \psi\,?$$

Oder: Welche Beziehungen

(8) $$\begin{aligned} u_1 &= u_1(u, v) \\ v_1 &= v_1(u, v) \end{aligned}$$

sind für die Gleichheit der beiden Linienelemente ds und ds_1 notwendig und hinreichend?

Nach dem Gaußschen Satze ändert sich das Krümmungsmaß bei der Biegung nicht; demnach muß jedenfalls

(9) $$K = K_1$$

werden, wo

(10) $$K = -\frac{\psi''(u)}{\psi(u)}$$

und ebenso

$$K_1 = -\frac{\psi_1''(u_1)}{\psi_1(u_1)}.$$

Die eine der beiden Beziehungen (8) hat mithin die spezielle Form

$$u_1 = u_1(u).$$

Sie könnte allerdings in eine Identität übergehen, nämlich dann, wenn längs jeder der beiden Flächen das Krümmungsmaß einen konstanten, und zwar für beide Flächen denselben Wert hätte. Hiervon abgesehen, gibt es Kurven konstanten Krümmungsmaßes, nämlich nach (10) die Linien $u = \text{const.}$, d. h. die Parallelkreise. Diese müssen sich mithin bei der Abwicklung der einen Fläche auf die andere ineinander transformieren, und es gehen dann auch die Meridiankurven, als orthogonale Trajektorien der Parallelkreise, ineinander über; die zweite Beziehung (8) ist sonach von der Form

$$v_1 = v_1(v).$$

Die Gleichheit der Bogenelemente entsprechender Kurven liefert nun

$$du_1^2 = du^2, \qquad \psi_1(u_1)^2 dv_1^2 = \psi(u)^2 dv^2.$$

Nach der ersten Gleichung ist

$$u_1'(u) = \pm 1,$$

also bei passender Zählung

$$u_1 = u,$$

und aus der zweiten folgt dann

$$\frac{dv_1}{dv} = \pm \frac{\psi(u)}{\psi_1(u)}.$$

Da aber v_1 nur Funktion von v sein konnte, so muß hier die rechte Seite konstant sein,

$$v_1 = \frac{v}{m} + c.$$

Rechnet man die Winkel v und v_1 in demselben Sinne und von der (xz)-Ebene aus, so kann man $m > 0$, $c = 0$ annehmen. Endlich wird, wenn die nur im Quadrat vorkommenden Funktionen $\psi(u)$ und $\psi_1(u)$ ihrer Bedeutung wegen als positiv vorausgesetzt werden,

$$\psi_1(u) = m\psi(u).$$

Wird nun, den Gleichungen (5) und (6) entsprechend,

(11) $$x = m\psi(u), \qquad z = \int \sqrt{1 - m^2\psi'(u)^2}\, du$$

$$x = m\psi(u)\cos\frac{v}{m}$$

(12) $$y = m\psi(u)\sin\frac{v}{m}$$

$$z = \int\sqrt{1 - m^2\psi'(u)^2}\,du$$

gesetzt, so geben diese Darstellungen der Meridiankurve und der Fläche selbst im allgemeinen eine ganze Schar von Umdrehungsflächen, denen das gegebene Linienelement zukommt. Denn man sieht unmittelbar, daß die Konstante m willkürlich bleibt.

Offenbar gelten diese Formeln auch für Rotationsflächen von konstantem Krümmungsmaß. Nur kann man dann nicht mehr behaupten, daß sämtliche Umdrehungsflächen konstanten und gleichen Krümmungsmaßes sich aus einer von ihnen, (6), nach dem Schema (12) müssen herleiten lassen.

Es sei hier ein für allemal bemerkt, daß wie bisher, so auch im Folgenden in der Theorie aufeinander abwickelbarer Flächen die Möglichkeit und die Ausführung einer stetigen Deformation der einen Fläche in die andere unerörtert bleiben soll, daß also zwischen Abwickelung und Biegung nicht unterschieden wird.

§ 124.

Helikoidflächen. Ihre Abwickelbarkeit auf Rotationsflächen.

Eine zweite Frage knüpft an die Tatsache an, die schon im § 37 (S. 122) bewiesen und dann beim Weingartenschen Satze benutzt worden ist: Es gibt eine spezielle Umdrehungsfläche, die sich auf eine durch Schraubenbewegung entstandene Fläche abwickeln läßt. Und zwar wird jene Fläche durch Drehung einer Kettenlinie, diese durch Schraubenbewegung einer Geraden erzeugt. Kann dieser Satz verallgemeinert werden, und in welcher Weise?

Wir betrachten eine beliebige Fläche, die durch Schraubenbewegung einer ebenen Kurve entsteht. Genauer: Wird die Kurve einer bestimmten Geraden parallel verschoben und gleichzeitig um diese Gerade gedreht, so sollen die Verschiebungsstrecken den Drehungswinkeln proportional sein. Jeder Kurvenpunkt beschreibt hierbei eine (gewöhnliche) Schraubenlinie. Die so definierte Fläche wird als Helikoidfläche, die erzeugende Kurve als ihr Profil bezeichnet.

Die Achse der Schraubenbewegung sei die z-Achse, die Gleichung des Profils in der Anfangslage

(1) $$z = \varphi(x).$$

Hat sich die Kurve um einen Winkel t gedreht, so sei

$$z = z_0 + \varphi(\varrho)$$

ihre Gleichung in der neuen Ebene. Wie in der Theorie der Umdrehungsflächen wird

(2) $$x = \varrho \cos t, \qquad y = \varrho \sin t.$$

Aber z_0 ist jetzt nicht mehr gleich Null, sondern von der Form bt. Demnach stellen die Gleichungen (2) und

(3) $$z = \varphi(\varrho) + bt$$

die Helikoidfläche dar.

Für das Quadrat des Linienelements ergibt sich die Formel

(4) $$ds'^2 = (1 + \varphi'(\varrho)^2)\,d\varrho^2 + 2b\varphi'(\varrho)\,d\varrho\,dt + (\varrho^2 + b^2)\,dt^2.$$

Von der entsprechenden in der Theorie der Umdrehungsflächen,

(5) $$ds^2 = (1 + f'(r)^2)\,dr^2 + r^2 dv^2,$$

unterscheidet sie sich wesentlich dadurch, daß das Produkt der Differentiale, $d\varrho\,dt$, in ihr vorkommt. Durch Einführung einer neuen Veränderlichen v' soll das Glied $2b\varphi'(\varrho)\,d\varrho\,dt$ entfernt werden. v' ist Funktion von ϱ und t, also umgekehrt t Funktion von ϱ und v'. Setzt man demnach

$$dt = \frac{\partial t}{\partial \varrho}\,d\varrho + \frac{\partial t}{\partial v'}\,dv'$$

in (4) ein und bringt die zweite Fundamentalgröße erster Ordnung für die Variablen ϱ und v' zum Verschwinden, so erhält man als Bedingungsgleichung

(6) $$\frac{\partial t}{\partial v'}\left(b\varphi'(\varrho) + (\varrho^2 + b^2)\,\frac{\partial t}{\partial \varrho}\right) = 0.$$

Hierin kann $\frac{\partial t}{\partial v'}$ nicht gleich Null sein, weil t und ϱ unabhängige Variable sind. Die Bestimmung von t durch Nullsetzung des zweiten Faktors liefert

(7) $$t = -b\int \frac{\varphi'(\varrho)}{\varrho^2 + b^2}\,d\varrho + V',$$

wo V' eine willkürliche Funktion von v' bedeutet. Nun kommt V' in der Formel für das Linienelement nur in der Verbindung $\frac{dV'}{dv'}\,dv'$ vor, und da V' nicht konstant sein kann, so ist es am einfachsten, diese Funktion gleich v' selbst zu setzen. Die Gleichung (4) geht dann in

(8) $$ds'^2 = \left(1 + \frac{\varrho^2\varphi'(\varrho)^2}{\varrho^2 + b^2}\right) d\varrho^2 + (\varrho^2 + b^2)\,dv'^2$$

über, und man erhält $ds' = ds$, wenn man

(9) $$v' = v$$

(10) $$\varrho^2 + b^2 = r^2$$

(11) $$\left(1 + \frac{\varrho^2 \varphi'(\varrho)^2}{\varrho^2 + b^2}\right) d\varrho^2 = (1 + f'(r)^2)\, dr^2$$

annimmt. Von diesen drei Gleichungen vermitteln (9) und (10) die Abbildung der beiden Flächen aufeinander, und (11), unter Hinzuziehung von (10), einen Zusammenhang zwischen den beiden Funktionen f und φ,

(12) $$\varphi'(\varrho)^2 = f'(r)^2 - \frac{b^2}{r^2 - b^2}$$

oder

(13) $$f'(r)^2 = \varphi'(\varrho)^2 + \frac{b^2}{\varrho^2}.$$

Man kann also eine Helikoidfläche finden, die sich auf eine gegebene Umdrehungsfläche, und eine Umdrehungsfläche, die sich auf ein gegebenes Helikoid abwickeln läßt. Jedesmal ergibt sich die Darstellung der einen Fläche aus der der anderen mittels einer Quadratur.

Vermöge der Gleichung (10) entsprechen einander bei der Abwicklung die Parallelkreise $r =$ const. und die Schraubenlinien $\varrho =$ const. Da nun jene Kurven geschlossen sind, diese aber ins Unendliche verlaufen, so würde es für die Abwickelung der ganzen Helikoidfläche nötig sein, die Rotationsfläche unendlichoft zu überdecken.

Der Satz, daß jede Helikoidfläche auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist, rührt von Bour her. Die zu ihm führende Erörterung würde nicht vollständig sein, wenn man nicht, ebenso wie bei den Umdrehungsflächen, feststellte, wieviele Helikoidflächen eines vorgeschriebenen Linienelements es gibt. Dieses soll dabei wieder durch die Formel

(14) $$ds^2 = du^2 + \psi(u)^2 dv^2$$

definiert sein. Die Gleichungen (2, 3) der Helikoidfläche enthalten bereits eine willkürliche Konstante b. Aber die Überlegungen des vorigen Paragraphen lassen das Auftreten einer zweiten Konstanten erwarten.

Beginnt man, wie dort, mit der Bildung des Krümmungsmaßes (S. 120) aus den in (4) enthaltenen Werten der Fundamentalgrößen, so findet man

(15) $$K = \frac{\varrho^3 \varphi'(\varrho)\,\varphi''(\varrho) - b^2}{(\varrho^2 + b^2 + \varrho^2 \varphi'(\varrho)^2)^2},$$

d. h. K ist Funktion von ϱ allein. Von den Flächen konstanten Krümmungsmaßes abgesehen, ist es demnach notwendig, die Schraubenlinien des Helikoids den Parallelkreisen der Rotationsfläche entsprechen zu lassen, also ϱ als Funktion von u anzunehmen. Nachdem man die Helikoidfläche mittels der Substitution (7) auf die Schraubenlinien und ihre orthogonalen Trajektorien transformiert, also

$$ds'^2 = \left(1 + \frac{\varrho^2 \varphi'(\varrho)^2}{\varrho^2 + b^2}\right) d\varrho^2 + (\varrho^2 + b^2) dV'^2$$

gemacht hat, führen dieselben Schlüsse wie auf S. 406—407 zu den beiden Gleichungen

$$\left(1 + \frac{\varrho^2 \varphi'(\varrho)^2}{\varrho^2 + b^2}\right) d\varrho^2 = du^2 \tag{16}$$

$$(\varrho^2 + b^2) dV'^2 = \psi(u)^2 dv^2 \tag{17}$$

und weiter zu

$$V' = \frac{v}{m} \tag{18}$$

$$\varrho^2 + b^2 = m^2 \psi(u)^2. \tag{19}$$

Behufs expliziter Darstellung der Fläche mittels (2) und (3) bedarf es der Berechnung von ϱ, t und $\varphi(\varrho)$. Nun folgt aus (19)

$$\varrho = \sqrt{m^2 \psi(u)^2 - b^2}, \tag{20}$$

sodann aus (16)

$$\varphi(\varrho) = m \int \frac{\psi(u) \sqrt{m^2 \psi(u)^2 (1 - m^2 \psi'(u)^2) - b^2}}{m^2 \psi(u)^2 - b^2} du, \tag{21}$$

endlich aus (7) und (18)

$$t = \frac{v}{m} - \frac{b}{m} \int \frac{\sqrt{m^2 \psi(u)^2 (1 - m^2 \psi'(u)^2) - b^2}}{\psi(u)(m^2 \psi(u)^2 - b^2)} du. \tag{22}$$

Die vollständige Bestimmung aller Helikoidflächen des vorgeschriebenen Linienelements läßt sich demnach mit Hilfe zweier Quadraturen ausführen. Die Gesamtheit aller Flächen hängt von zwei willkürlichen Konstanten ab.

Setzt man insbesondere, dem Katenoid entsprechend,

$$\psi(u)^2 = u^2 + a^2$$

und nimmt $m = 1$ an, so erhält man

$$\varrho = \sqrt{u^2 + a^2 - b^2} \tag{23}$$

$$\varphi(\varrho) = \sqrt{a^2 - b^2} \int \frac{\sqrt{u^2 + a^2}}{u^2 + a^2 - b^2} du \tag{24}$$

$$(25)\qquad t = v - b\sqrt{a^2 - b^2}\int\frac{du}{(u^2 + a^2 - b^2)\sqrt{u^2 + a^2}}.$$

Offenbar muß $b \leq a$ vorausgesetzt werden. Die beiden äußersten Werte $b = 0$ und $b = a$ geben das Katenoid und die gewöhnliche Schraubenfläche wieder.

§ 125.

Umdrehungsflächen von konstantem Krümmungsmaß.

In den Untersuchungen über die Abwickelung von Flächen aufeinander hat die Annahme eines konstanten Krümmungsmaßes längs der ganzen Fläche wiederholt als Ausnahmefall betrachtet werden müssen. Es sei jetzt

$$(1)\qquad K = \pm\frac{1}{a^2},$$

wo a eine gegebene (positive) Konstante. Ist das konstante Krümmungsmaß positiv, so heißt die Fläche sphärisch, ist es negativ, pseudosphärisch.

Um über das Linienelement etwas festzustellen, beziehe man die Fläche auf ein Netz orthogonal-geodätischer Koordinaten, setze also

$$(2)\qquad ds^2 = du^2 + G dv^2$$

(S. 298 (6)). Da für $E = 1$, $F = 0$ das Krümmungsmaß den Ausdruck

$$-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}$$

hatte, so genügt $\sqrt{G}$ bei einer sphärischen Fläche der Differentialgleichung

$$(3)\qquad a^2\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2} + \sqrt{G} = 0,$$

mit dem allgemeinen Integral

$$(4)\qquad \sqrt{G} = A\cos\frac{u}{a} + B\sin\frac{u}{a}.$$

A und B sind Funktionen von v, die sich sehr spezialisieren lassen, wenn man geodätische Polarkoordinaten voraussetzt. Dann ist nämlich für $u = 0$

$$(5)\qquad \sqrt{G} = 0, \qquad \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = 1$$

(S. 299 (10)), d. h. hier

$$A = 0, \qquad B = a,$$

$$(6)\qquad ds^2 = du^2 + a^2\sin^2\frac{u}{a}dv^2.$$

Für eine pseudosphärische Fläche geht die Differentialgleichung (3) in

$$a^2 \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} - \sqrt{G} = 0 \tag{7}$$

über, das Integral in

$$\sqrt{G} = Ae^{\frac{u}{a}} + Be^{-\frac{u}{a}}, \tag{8}$$

und die Bedingungen (5) geben

$$A = \frac{a}{2}, \qquad B = -\frac{a}{2},$$

$$ds^2 = du^2 + \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}\right)^2 \equiv du^2 + a^2 \sinh^2 \frac{u}{a}\, dv^2. \tag{9}$$

Die Ausdrücke (6) und (9) haben die gemeinsame Eigenschaft, von der speziellen Fläche, die man gerade betrachtet, nicht abzuhängen. Sie enthalten also den Satz: Alle Flächen konstanten und gleichen Krümmungsmaßes sind aufeinander abwickelbar. Wegen der Form von ds^2 läßt sich dieser Ausspruch dahin vervollständigen, daß die Abwickelung auf eine Rotationsfläche möglich sein muß.

Nun kann nicht behauptet werden, daß der eben eingeschlagene Weg der einzige ist, auf dem man von der Annahme eines konstanten Krümmungsmaßes aus zu dem Linienelement einer Umdrehungsfläche kommt. Daher ist die Frage berechtigt, was für verschiedene Arten von Rotationsflächen konstanten positiven und negativen Krümmungsmaßes es gibt. Das orthogonal-geodätische Kurvennetz, auf welches die Punkte der Fläche bezogen sind, sei hier das der Meridiane und Parallelkreise,

$$ds^2 = du^2 + \psi(u)^2 dv^2.$$

Für $\sqrt{G} \equiv \psi(u)$ gelten wieder die Bedingungen (3) und (7), nur sind es jetzt nicht mehr partielle, sondern gewöhnliche Differentialgleichungen, und demnach bedeuten in den Integralen

$$\psi(u) = A \cos \frac{u}{a} + B \sin \frac{u}{a} \tag{10}$$

und

$$\psi(u) = Ae^{\frac{u}{a}} + Be^{-\frac{u}{a}} \tag{11}$$

A und B konstante Größen. Man hat zu unterscheiden, ob beide von Null verschieden sind oder eine von ihnen verschwindet. Es sei, zunächst in der Formel (10), $A = 0$, so wird

$$ds^2 = du^2 + B^2 \sin^2 \frac{u}{a}\, dv^2$$

oder auch, bei unerheblicher Parameter-Änderung, auf die im Folgenden nicht jedesmal hingewiesen werden soll,

$$(12)\qquad ds^2 = du^2 + a^2 \sin^2 \frac{u}{a} dv^2.$$

Für $B = 0$ wird

$$ds^2 = du^2 + a^2 \cos^2 \frac{u}{a} dv^2,$$

ein Ausdruck, der durch die Substitution $\frac{u}{a} + \frac{\pi}{2}$ für $\frac{u}{a}$ in (12) übergeführt werden kann. Ist keine der beiden Konstanten Null, so kann man zwei neue, C und u_0, so bestimmen, daß

$$A \cos \frac{u}{a} + B \sin \frac{u}{a} = C \sin \frac{u - u_0}{a}$$

wird. Das durch

$$ds^2 = du^2 + C^2 \sin^2 \frac{u - u_0}{a} dv^2$$

dargestellte Linienelement gestattet aber, wie unmittelbar ersichtlich, ebenfalls die Transformation in den Ausdruck (12). Er gehört der Kugel

$$x = a \sin \frac{u}{a} \cos v$$

$$y = a \sin \frac{u}{a} \sin v$$

$$z = a \cos \frac{u}{a}$$

an. Die Flächen konstanten Krümmungsmaßes $\frac{1}{a^2}$ sind also auf die Kugel vom Halbmesser a abwickelbar.

Für Flächen negativen Krümmungsmaßes ergibt sich aus $A = 0$ oder $B = 0$

$$(13)\qquad ds^2 = du^2 + a^2 e^{\frac{2u}{a}} dv^2.$$

Verschwindet keine der beiden Konstanten, so sind zwei Unterfälle zu unterscheiden: A und B von gleichem oder von verschiedenem Vorzeichen. Im ersten Fall kann man den Ansatz

$$A = A' e^{-\frac{u_0}{a}}, \quad B = B' e^{\frac{u_0}{a}}$$

machen und über u_0 so verfügen, daß

$$A' = B'$$

wird. Denn die Bestimmungsgleichung

$$e^{\frac{2u_0}{a}} = \frac{B}{A}$$

liefert für u_0 einen reellen Wert. Aus

$$\psi(u) = A'\left(e^{\frac{u-u_0}{a}} + e^{-\frac{u-u_0}{a}}\right)$$

ergibt sich dann

$$(14)\qquad ds^2 = du^2 + \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}\right)^2 dv^2 \equiv du^2 + a^2 \cosh^2\frac{u}{a}\, dv^2.$$

Im zweiten Fall sei, der Allgemeinheit unbeschadet, $A > 0$, $B < 0$. Setzt man jetzt

$$A = A'e^{-\frac{u_0}{a}}, \qquad B = -B'e^{\frac{u_0}{a}},$$

so kann man mittels der Bestimmung

$$e^{\frac{2u_0}{a}} = -\frac{B}{A}$$

wieder

$$A' = B'$$

machen,

$$\psi(u) = A'\left(e^{\frac{u-u_0}{a}} - e^{-\frac{u-u_0}{a}}\right).$$

Der Formel (14) entspricht

$$(15)\qquad ds^2 = du^2 + \frac{a^2}{4}\left(e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}\right)^2 dv^2 \equiv du^2 + a^2 \sinh^2\frac{u}{a}\, dv^2.$$

Die Formeln (13), (14) und (15) können nicht dadurch, daß u durch eine Funktion von u und v durch eine Funktion von v ersetzt wird, ineinander transformiert werden. Einer Bemerkung im § 123 (S. 408) entsprechend bedeutet das, daß die zu diesen Linienelementen gehörenden Umdrehungsflächen, obwohl nach dem oben bewiesenen Satze aufeinander abwickelbar, doch nicht so gebogen werden können, daß die Meridiane und die Parallelkreise dabei in dieselben Kurven übergehen. Im Gegensatz zu den sphärischen gibt es also drei verschiedene Typen von pseudosphärischen Rotationsflächen.

§ 126.

Die Pseudosphäre.

Um die Meridiankurven dieser Flächen zu untersuchen, setzen wir in den Formeln S. 407 (11) zuerst

$$\psi(u) = a e^{\frac{u}{a}},$$

also

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= m a e^{\frac{u}{a}} \\ z &= \int \sqrt{1 - m^2 e^{\frac{2u}{a}}}\, du. \end{aligned}$$

Die Veränderlichkeit von u ist so zu beschränken, daß die Quadratwurzel unter dem Integralzeichen reell bleibt. Man darf also

$$m e^{\frac{u}{a}} = \sin t$$

annehmen, was

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= a \sin t \\ z &= a\left(\log \operatorname{tg} \frac{t}{2} + \cos t\right) \end{aligned}$$

liefert. Die geometrische Bedeutung von t ist leicht zu erkennen. Aus

$$dx = a \cos t\, dt$$

$$dz = a \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt$$

folgt nämlich

$$\frac{dx}{dz} = \operatorname{tg} t,$$

d. h. t ist der Winkel, den die nach der positiven Seite der z-Achse gerichtete Kurventangente mit der positiven Richtung dieser Achse bildet. Läßt man t das Intervall $(0 \ldots \pi)$ durchlaufen, so sieht man, daß die z-Achse eine Asymptote der Kurve ist, und daß für $t = \frac{\pi}{2}$, wo $\frac{dz}{dx} = 0$ wird, x den größten Wert a annimmt. Ferner ist in Figur 19

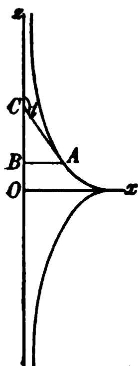


Fig. 19.

$$\frac{AB}{AC} = \sin t, \qquad AB = x,$$

also

$$(3) \qquad AC = a;$$

die Tangente der Kurve, vom Berührungspunkte bis zum Schnitt mit der z-Achse gerechnet, hat eine konstante Länge. Diese Kurve heißt die Traktrix; sie kann auch als Evolvente einer Kettenlinie betrachtet werden. Nach S. 413 gilt der Satz: Alle Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes sind auf die Umdrehungsfläche der Traktrix abwickelbar. Man pflegt diese Fläche kurz als **Pseudosphäre** zu bezeichnen.

Die in der Gleichung (3) enthaltene Eigenschaft kann vom flächentheoretischen Standpunkt noch anders gedeutet werden. Bildet man nämlich für eine beliebige Rotationsfläche nach der zweiten Formel (11) auf S. 140,

$$g_u = -\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u},$$

die geodätische Krümmung eines Parallelkreises, so findet man dafür den Wert

$$g_u = -\frac{\psi'(u)}{\psi(u)}.$$

Mittels der Koordinaten x und z dargestellt und abgesehen vom Vorzeichen ist der reziproke Wert dieses Ausdruckes gleich

$$x\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

Dieselbe Formel ergibt sich aber auch für die Tangentenlänge AC. Hiernach ist der Radius der Tangentialkrümmung eines Parallelkreises dem absoluten Betrage nach gleich dem Stück der Tangente der Meridiankurve zwischen dem Kreise und der Drehungsachse.

Bei der Pseudosphäre hat diese Strecke, und damit auch die geodätische Krümmung selbst, für alle Parallelkreise denselben Wert.

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß die willkürliche Konstante m in den Gleichungen (2) nicht mehr vorkommt. Alle Rotationsflächen, die aus der Pseudosphäre unter Beibehaltung der Meridiane und der Parallelkreise hervorgehen, sind also mit dieser Fläche selbst identisch.

§ 127.

Die übrigen pseudosphärischen und sphärischen Umdrehungsflächen.

Der Formel S. 415 (14) entsprechend werde zweitens

$$(1) \qquad x = ma \cosh\frac{u}{a}, \qquad z = \int \sqrt{1 - m^2 \sinh^2\frac{u}{a}}\, du$$

gesetzt. Eliminiert man u mittels der Identität

$$\cosh^2\frac{u}{a} - \sinh^2\frac{u}{a} = 1,$$

so erscheint z als elliptisches Integral in x. Doch soll die Darstellung der Koordinaten mittels elliptischer Funktionen nicht ausgeführt werden.

Der Bereich von u ist hier dadurch beschränkt, daß

$$\frac{dx}{du} \equiv m \sinh\frac{u}{a}$$

dem absoluten Betrage nach höchstens gleich Eins werden kann. Da du das Bogenelement der Meridiankurve, so ist $\frac{dx}{du}$ der erste Rich-

tungskosinus der Tangente dieser Linie. Nun wird $\frac{dx}{du} = 0$, d. h. die Kurventangente der z-Achse parallel, für

$$e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}} = 0,$$

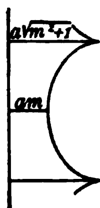


Fig. 20.

also für

$$u = 0, \qquad x = am.$$

Ferner $\frac{dx}{du} = \pm 1$ für

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{u}{a}} - e^{-\frac{u}{a}}\right) = \pm \frac{1}{m},$$

was

$$x = a\sqrt{m^2 + 1}$$

liefert. Der erste Wert ist ein Minimum, der zweite ein Maximum für die Radien der Parallelkreise.

Eine genaue Diskussion der Kurve mittels der vom Integralzeichen befreiten Ausdrücke ihrer Koordinaten würde lehren, daß der in Fig. 20 veranschaulichte Bogen sich periodisch wiederholt.

Drittens gehört zu dem Linienelement S. 415 (15) die Meridiankurve

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= ma \sinh \frac{u}{a} \\ z &= \int \sqrt{1 - m^2 \cosh^2 \frac{u}{a}}\, du. \end{aligned}$$

Hier muß $m < 1$ sein. Der Richtungskosinus

$$\frac{dx}{du} \equiv m \cosh \frac{u}{a}$$

kann nicht gleich Null, wohl aber gleich Eins werden, für

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{u}{a}} + e^{-\frac{u}{a}}\right) = \frac{1}{m},$$

$$x = a\sqrt{1 - m^2}.$$

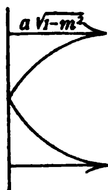


Fig. 21.

Dies ist der größte Wert von x. Der kleinste ist gleich Null, dem Werte $u = 0$ entsprechend. Die Kurve trifft die Achse unter dem Winkel arc sin m und, bei symmetrischer Fortsetzung, dem Winkel π — arc sin m (Fig. 21).

Auch hier müßte eine vollständige Diskussion der Kurve von der Darstellung durch elliptische Funktionen ausgehen.

Auf diese Funktionen kommt man für beliebiges m auch bei den sphärischen Rotationsflächen. Nach S. 414 (12) ist zu setzen

(3)
$$x = ma \sin \frac{u}{a}$$
$$s = \int \sqrt{1 - m^2 \cos^2 \frac{u}{a}}\, du.$$

Für $m = 1$ ergibt sich die Kugel wieder. Allgemein wird

$$\frac{dx}{du} \equiv m \cos \frac{u}{a}$$

gleich Null für

$$u = \frac{a\pi}{2}, \qquad x = am;$$

gleich ± 1 nur unter der Annahme $m > 1$, denn es muß

$$\cos \frac{u}{a} = \pm \frac{1}{m}$$

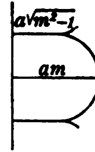


Fig. 22.



Fig. 23.

sein. Der zugehörige Wert von x ist $a\sqrt{m^2 - 1}$. In dem Intervall $(a\sqrt{m^2 - 1} \ldots am)$ liegen alle Radien der Parallelkreise (Fig. 22).

Für $m < 1$ ist $u = 0$, also $x = 0$ ein zulässiger Wert. $\cos \frac{u}{a}$, also auch $\frac{dx}{du}$, erreicht dafür sein Maximum, $\frac{dx}{du} = m$. Die Kurve schneidet die z-Achse unter den Winkeln $\arcsin m$ und $\pi - \arcsin m$ (Fig. 23).

§ 128.

Verschiedene Formen des Linienelements einer Umdrehungsfläche. Abwickelung des 2. Typus pseudosphärischer Umdrehungsflächen auf die Pseudosphäre.

Die Flächen, von denen in diesem Abschnitt bisher die Rede gewesen ist, haben die gemeinsame Eigenschaft, auf Rotationsflächen abwickelbar zu sein. Auf solche Flächen führt nach Dini auch eine allgemeine Aufgabe der Theorie der geodätischen Linien. Von einer beliebigen Flächenkurve c möge, wie im § 86, eine Schar geodätischer Linien unter demselben, aber jetzt von $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Winkel ausgehen. Denkt man sich auf ihnen von c aus gleiche Bogenlängen abgetragen, so bilden deren Endpunkte eine Kurve, bei Variierung der Bogenlänge eine Kurvenschar. Man kann fragen, ob jede Kurve der Schar sämtliche geodätischen Linien unter gleichem Winkel treffen kann, der aber nicht für alle Trajektorien denselben Wert zu haben braucht.

Die Kurven des Netzes seien die Koordinatenlinien, und zwar $v =$ const. die geodätischen Linien, $u =$ const. die Trajektorien. Im

besonderen sei u die von c aus gezählte Bogenlänge der ersteren. Dann gelten die Gleichungen S. 296 (2, 3)

$$(1) \qquad E\left(\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v}\right) - \frac{1}{2} F \frac{\partial E}{\partial u} = 0$$

$$(2) \qquad E = 1,$$

also $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$, $F = \varphi(v)$. Da F nicht Null sein sollte, so kann man, ohne das Koordinatennetz zu ändern,

$$(3) \qquad F = 1$$

machen,

$$(4) \qquad ds^2 = du^2 + 2du\,dv + G\,dv^2.$$

Soll nun der Koordinatenwinkel ϑ längs jeder Kurve $u = $ const. denselben Wert haben, wie es nach Voraussetzung für $u = 0$ bereits der Fall ist, soll also

$$\cos\vartheta \equiv \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{1}{U}$$

sein, so muß wegen (2) und (3)

$$G = U^2$$

$$(5) \qquad ds^2 = du^2 + 2du\,dv + U^2 dv^2$$

werden.

Um dieses Linienelement auf orthogonale Koordinaten zu beziehen, betrachte man v als Funktion von u und einem neuen Parameter v'. Es wird

$$ds^2 = du^2 + 2\,du\left(\frac{\partial v}{\partial u} du + \frac{\partial v}{\partial v'} dv'\right) + U^2\left(\left(\frac{\partial v}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2\,\frac{\partial v}{\partial u}\frac{\partial v}{\partial v'} du\,dv' + \left(\frac{\partial v}{\partial v'}\right)^2 dv'^2\right),$$

und das Produkt der Differentiale fällt unter der Bedingung

$$1 + U^2 \frac{\partial v}{\partial u} = 0$$

$$(6) \qquad v = -\int \frac{du}{U^2} + \psi(v')$$

heraus. $\psi(v')$ kann nicht konstant sein, aber man darf die Funktion z. B. gleich v' selbst setzen, worauf sich für ds die Formel

$$(7) \qquad ds^2 = \left(1 - \frac{1}{U^2}\right) du^2 + U^2 dv^2$$

ergibt. Wäre U konstant, so würde die Fläche, der ein solches Linienelement zugehört, auf die Ebene abwickelbar sein. Im allge-

meinen Falle ist sie offenbar eine Umdrehungsfläche oder läßt sich wenigstens auf eine solche abwickeln.

Da die Fundamentalgrößen Funktionen von u sind, so wird auch das Krümmungsmaß eine solche. Das heißt, die Trajektorien $u = \text{const.}$ stimmen mit den Kurven konstanten Krümmungsmaßes überein; den Fall der sphärischen oder pseudosphärischen Flächen natürlich auch hier ausgeschlossen.

Es sei jetzt umgekehrt das Linienelement einer Rotationsfläche wieder durch

(8) $$ds^2 = (1 + f'(r)^2)\,dr^2 + r^2 dv^2$$

gegeben. Setzt man

(9) $$r = \psi(\varrho),$$

so entsteht eine Gleichung der Form

(10) $$ds^2 = \varphi(\varrho)^2 d\varrho^2 + \psi(\varrho)^2 dv^2.$$

Sie ist trotz des Auftretens zweier Funktionen nicht allgemeiner als (8), weil man eine von diesen durch Wiedereinsetzen von r oder überhaupt durch Einführung einer passenden Funktion des Parameters ϱ entfernen kann. Aber sie bietet den Vorteil, durch Spezialisierung von φ oder ψ das Linienelement auf verschiedene, einzelnen Aufgaben angepaßte Formen bringen zu können. So führt sie nicht nur für $\psi(\varrho) = \varrho$, dann $\varrho = r$, auf (8) zurück, sondern auch vermittelst der Annahme $\varphi(\varrho) = 1$ und wenn dann u für ϱ geschrieben wird, auf den neben (8) so häufig benutzten Ausdruck

$$ds^2 = du^2 + \psi(u)^2 dv^2.$$

Die Kurven konstanten Krümmungsmaßes sind mit den Koordinatenlinien $\varrho = \text{const.}$ identisch. Um die Transformation von (10) in (5), d. h. in

(11) $$ds^2 = du^2 + 2\,du\,dv_1 + U^2 dv_1^2$$

durchzuführen, hat man demnach ϱ als Funktion von u allein anzusetzen,

(12) $$ds^2 = A^2 d\varrho^2 + 2A\,d\varrho\,dv_1 + B^2 dv_1^2$$

für A und B als Funktionen von ϱ. Alsdann ist noch v als Funktion von ϱ und v_1 so zu bestimmen, daß nach der Substitution

$$dv = \frac{\partial v}{\partial \varrho}\,d\varrho + \frac{\partial v}{\partial v_1}\,dv_1$$

die rechten Seiten von (10) und (12) identisch werden. Dies liefert die Bedingungen

(13) $$\varphi^2 + \psi^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right)^2 = A^2$$

(14) $$\psi^2 \frac{\partial v}{\partial \varrho} \frac{\partial v}{\partial v_1} = A$$

(15) $$\psi^2 \left(\frac{\partial v}{\partial v_1}\right)^2 = B^2.$$

Vermöge der letzten wird

(16) $$v = \frac{B}{\psi} v_1 + \chi(\varrho),$$

sodann nach der vorletzten

$$B\psi\left(v_1 \frac{d\frac{B}{\psi}}{d\varrho} + \chi'(\varrho)\right) = A.$$

Da zwischen ϱ und v_1 keine Relation bestehen kann, so muß

$$\frac{d\frac{B}{\psi}}{d\varrho} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \frac{B}{\psi} = \frac{1}{m}$$

$$\chi'(\varrho) = \frac{A}{B\psi} = \frac{mA}{\psi^2}$$

werden. Setzt man hieraus A in (13) ein, so findet man für χ die Bestimmung

$$\chi'(\varrho) = \frac{m\varphi(\varrho)}{\psi(\varrho)\sqrt{\psi(\varrho)^2 - m^2}}.$$

Die Transformationsgleichung (16) lautet also

(17) $$v = \frac{v_1}{m} + m\int \frac{\varphi(\varrho)\,d\varrho}{\psi(\varrho)\sqrt{\psi(\varrho)^2 - m^2}},$$

und es wird ferner

(18) $$A = \frac{\varphi(\varrho)\,\psi(\varrho)}{\sqrt{\psi(\varrho)^2 - m^2}}, \qquad B = \frac{\psi(\varrho)}{m}.$$

Nachdem man nun

(19) $$A\,d\varrho = d\varrho_1$$

gesetzt hat, kann man das Produkt $d\varrho_1 dv_1$ durch die einfache Substitution

$$\varrho_1 + v_1 = \omega_1$$

wieder wegschaffen und erhält

(20) $$ds^2 = d\omega_1^2 + (B^2 - 1)\,dv_1^2.$$

B war Funktion von ϱ, also auch von ϱ_1 allein, enthält mithin die neuen Variablen nur in der Verbindung $\omega_1 - v_1$:

$$ds^2 = d\omega_1^2 + g(\omega_1 - v_1)\,dv_1^2.$$

Will man statt der Differenz die Summe der beiden Parameter als Argument der Funktion g haben, so hat man v_1 durch $-v_1$ zu ersetzen, also ω_1 durch

(21) $$\varrho_1 - v_1 = \omega_1$$

zu definieren. Die Schlußformel lautet dann

(22) $$ds^2 = d\omega_1^2 + g(\omega_1 + v_1)\, dv_1^2.$$

Die Formeln (17) (für $-v_1$ statt v_1), (18), (19) und (21) geben zusammengezogen die Transformation:

(23) $$\begin{aligned} v_1 &= -mv + m^2 \int \frac{\varphi(\varrho)\, d\varrho}{\psi(\varrho)\sqrt{\psi(\varrho)^2 - m^2}} \\ \omega_1 &= mv + \int \frac{\varphi(\varrho)\sqrt{\psi(\varrho)^2 - m^2}}{\psi(\varrho)}\, d\varrho. \end{aligned}$$

Die Fläche des durch die Gleichung (10) bestimmten Linienelements sei eine Umdrehungsfläche, nicht bloß auf eine solche abwickelbar. Dann sind die Kurven $\varrho =$ const. oder $\varrho_1 =$ const. die Parallelkreise, und $v_1 =$ const. eine Schar geodätischer Linien, die von den einzelnen Kreisen jedesmal unter demselben Winkel geschnitten werden. Da das Linienelement schließlich wieder auf orthogonale Parameter gebracht ist, so bedeutet $\omega_1 =$ const. die orthogonalen Trajektorien dieser Linien.

Für Flächen konstanten Krümmungsmaßes gelten die Formeln mit der Maßgabe, daß sie für die Überführung des einen Linienelements in das andere hinreichend, aber nicht notwendig sind. Sie mögen auf den zweiten Typus von Rotationsflächen konstanten negativen Krümmungsmaßes $-\frac{1}{a^2}$ (S. 417 (1)) angewendet werden. Die Ausgangsgleichung lautet (S. 415 (14))

$$ds^2 = du^2 + a^2 \cosh^2 \frac{u}{a}\, dv^2$$

oder etwas allgemeiner

(24) $$ds^2 = du^2 + m^2 \cosh^2 \frac{u}{a}\, dv^2.$$

Hier gilt die zweite der oben genannten speziellen Annahmen: $\varphi(\varrho) = 1$, $\varrho = u$; außerdem ist

$$\psi(u) = m \cosh \frac{u}{a} \cdot$$

Die willkürliche Konstante m sei dieselbe wie in den Formeln (23). Dann ergibt sich

$$\psi(u)^2 - m^2 = m^2 \sinh^2 \frac{u}{a}$$

(25)
$$v_1 = -mv + a \log \frac{\sinh \frac{u}{a}}{\cosh \frac{u}{a}}$$
$$\omega_1 = mv + a \log \cosh \frac{u}{a}$$

(26) $$\omega_1 + v_1 = a \log \sinh \frac{u}{a}$$

oder

(27) $$\sinh \frac{u}{a} = e^{\frac{\omega_1 + v_1}{a}}.$$

Und da nach der zweiten Formel (18)

(28) $$B^2 - 1 = \sinh^2 \frac{u}{a}$$

ist, so wird schließlich

$$ds^2 = d\omega_1^2 + e^{\frac{2(\omega_1 + v_1)}{a}} dv_1^2.$$

Die Substitution

(29) $$e^{\frac{v_1}{a}} = v_1'$$

führt die letzte Gleichung in

(30) $$ds^2 = d\omega_1^2 + a^2 e^{\frac{2\omega_1}{a}} dv_1'^2$$

über, die Formel für das Linienelement der Pseudosphäre (S. 414 (13)).

Hiernach vermittelt die Transformation

(31)
$$v_1' = e^{-\frac{mv}{a}} \frac{\sinh \frac{u}{a}}{\cosh \frac{u}{a}}$$
$$\omega_1 = mv + a \log \cosh \frac{u}{a}$$

eine Abwickelung der Pseudosphäre auf die pseudosphärischen Umdrehungsflächen des zweiten Typus. Aus der Bedeutung von v_1 (oder v_1') und ω_1 ist ersichtlich, was für Kurven auf diesen Flächen dabei den Meridianen und den Parallelkreisen der speziellen Fläche entsprechen.

Für den dritten Typus pseudosphärischer Rotationsflächen,

$$\psi(u) = m \sinh \frac{u}{a},$$

können die Formeln (23) offenbar nicht zu ebenso einfachen Resultaten führen.

§ 129.

Verallgemeinerung der Formeln des vorigen Paragraphen.

Den Ausdruck (22) für das Quadrat des Linienelements einer Umdrehungsfläche kann man verallgemeinern, indem man die Bedingung fallen läßt, daß die Kurvenschar $v_1 = \text{const.}$ geodätisch sei. Bei dem ersten Schritt, der von der Gleichung (10) ausgeht, ist dann nur zu fordern, daß jede einzelne Linie $\varrho = \text{const.}$ mit sämtlichen Linien $v_1 = \text{const.}$ denselben Winkel einschließt, daß also

$$(1) \qquad \cos\vartheta_1 \equiv \frac{F_1}{\sqrt{E_1 G_1}} = \lambda(\varrho)$$

wird. Nach Einführung von $dv = \frac{\partial v}{\partial \varrho} d\varrho + \frac{\partial v}{\partial v_1} dv_1$ ergibt sich hieraus die Bedingung

$$\frac{\psi(\varrho)}{\sqrt{\varphi(\varrho)^2 + \psi(\varrho)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial \varrho}\right)^2}} \frac{\partial v}{\partial \varrho} = \lambda(\varrho),$$

d. h.

$$\frac{\partial v}{\partial \varrho} = \frac{\varphi(\varrho)\lambda(\varrho)}{\psi(\varrho)\sqrt{1 - \lambda(\varrho)^2}}$$

$$(2) \qquad v = \int \frac{\varphi(\varrho)\lambda(\varrho)}{\psi(\varrho)\sqrt{1 - \lambda(\varrho)^2}} d\varrho + \mu(v_1),$$

und die Formel für das Linienelement selbst wird

$$(3) \quad ds^2 = \frac{\varphi(\varrho)^2}{1 - \lambda(\varrho)^2} d\varrho^2 + \frac{2\lambda(\varrho)\varphi(\varrho)\psi(\varrho)}{\sqrt{1 - \lambda(\varrho)^2}} \mu'(v_1) d\varrho\, dv_1 + \psi(\varrho)^2 \mu'(v_1)^2 dv_1^2.$$

Da die unbestimmte Funktion $\mu(v_1)$ nur in der Verbindung $\mu'(v_1)dv_1$ vorkommt, so darf man $\mu'(v_1)$, das nicht Null sein kann, gleich Eins oder, dem Vorhergehenden entsprechend, gleich $\frac{1}{m}$ setzen. Die Gleichungen (2) und (3) werden dann

$$(4) \qquad v = \frac{v_1}{m} + \int \frac{\varphi(\varrho)\lambda(\varrho)}{\psi(\varrho)\sqrt{1 - \lambda(\varrho)^2}} d\varrho$$

$$(5) \qquad ds^2 = \frac{\varphi(\varrho)^2}{1 - \lambda(\varrho)^2} d\varrho^2 + \frac{2\lambda(\varrho)\varphi(\varrho)\psi(\varrho)}{m\sqrt{1 - \lambda(\varrho)^2}} d\varrho\, dv_1 + \frac{\psi(\varrho)^2}{m^2} dv_1^2.$$

Die Resultate des vorigen Paragraphen entsprechen der Annahme

$$\lambda(\varrho) = \frac{m}{\psi(\varrho)}.$$

Wieder sei $\omega_1 = \text{const.}$ die Schar der orthogonalen Trajektorien der Kurven $v_1 = \text{const.}$ Setzt man $d\varrho$ aus

$$(6) \qquad d\omega_1 = \frac{\partial \omega_1}{\partial \varrho} d\varrho + \frac{\partial \omega_1}{\partial v_1} dv_1$$

in (5) ein, so erhält man als Bedingung des Wegfallens von $d\omega_1 dv_1$ die partielle Differentialgleichung

(7) $$\frac{\varphi(\varrho)^2}{1-\lambda(\varrho)^2}\frac{\partial\omega_1}{\partial v_1} - \frac{\lambda(\varrho)\varphi(\varrho)\psi(\varrho)}{m\sqrt{1-\lambda(\varrho)^2}}\frac{\partial\omega_1}{\partial\varrho} = 0$$

mit dem Integral

(8) $$v_1 + m\int\frac{\varphi(\varrho)\,d\varrho}{\psi(\varrho)\lambda(\varrho)\sqrt{1-\lambda(\varrho)^2}} = \chi(\omega_1).$$

Aus demselben Grunde wie vorher kann

$$\chi(\omega_1) = \omega_1$$

angenommen werden. Schreibt man noch, wie auf S. 423, $-v_1$ statt v_1, so wird

(9) $$m\int\frac{\varphi(\varrho)\,d\varrho}{\psi(\varrho)\lambda(\varrho)\sqrt{1-\lambda(\varrho)^2}} = \omega_1 + v_1,$$

d. h. mit (4) zusammen

(10) $$\begin{aligned} v_1 &= -mv + m\int\frac{\varphi(\varrho)\lambda(\varrho)}{\psi(\varrho)\sqrt{1-\lambda(\varrho)^2}}\,d\varrho \\ \omega_1 &= mv + m\int\frac{\varphi(\varrho)\sqrt{1-\lambda(\varrho)^2}}{\psi(\varrho)\lambda(\varrho)}\,d\varrho, \end{aligned}$$

und die Koeffizienten in

(11) $$ds^2 = \frac{\psi(\varrho)^2\lambda(\varrho)^2}{m^2}\,d\omega_1^2 + \frac{\psi(\varrho)^2(1-\lambda(\varrho)^2)}{m^2}\,dv_1^2$$

werden Funktionen von $\omega_1 + v_1$, sodaß sich schließlich

(12) $$ds^2 = f_1(\omega_1+v_1)\,d\omega_1^2 + g_1(\omega_1+v_1)\,dv_1^2$$

herausstellt.

Die in den Formeln enthaltene Funktion $\lambda(\varrho)$ ist willkürlich. Es sei speziell

$$\lambda(\varrho) = c,$$

d. h. der konstante Winkel, unter dem sämtliche Kurven $v_1 = \text{const.}$ von einem beliebigen Parallelkreise geschnitten werden, habe für alle diese Kreise denselben Wert. Wegen der Orthogonalität der Meridiane und der Parallelkreise treffen dann die Kurven $v_1 = \text{const.}$ auch alle Meridiane unter gleichen Winkeln, sie sind Loxodromen der Umdrehungsfläche. Die Transformationsgleichung (9) erhält die Form

(13) $$\frac{m}{c\sqrt{1-c^2}}\int\frac{\varphi(\varrho)}{\psi(\varrho)}\,d\varrho = \omega_1 + v_1,$$

und das Quadrat des Linienelements wird

(14) $$ds^2 = f(\omega_1+v_1)\left(c^2 d\omega_1^2 + (1-c^2)\,dv_1^2\right).$$

Das Kurvennetz ist also isometrisch.

§ 130.

Abwickelung des 3. Typus pseudosphärischer Umdrehungsflächen auf die Pseudosphäre.

Im § 128 ist die Abwickelung des zweiten Typus pseudosphärischer Umdrehungsflächen auf die Pseudosphäre nach einem speziellen Verfahren ausgeführt worden. Allgemein kann die Aufgabe, die verschiedenen im § 125 aufgestellten Linienelemente ineinander zu transformieren, als eine Anwendung der Theorie der isometrischen Kurven betrachtet werden. Um auch den dritten Typus von Umdrehungsflächen, für dessen Linienelement die Formel

(1) $$ds^2 = du^2 + m^2 \sinh^2 \frac{u}{a}\, dv^2$$

gilt, auf die Pseudosphäre abzuwickeln, hat man hiernach zuerst diesen Ausdruck, ebenso wie

(2) $$ds'^2 = du'^2 + a^2 e^{-\frac{2u'}{a}}\, dv'^2,$$

auf Abbildungsparameter (S. 270) zu beziehen. Ist dadurch

(3) $$ds^2 = E(d\varrho^2 + dv^2)$$

(4) $$ds'^2 = E'(d\varrho'^2 + dv'^2)$$

geworden, so bewirkt die Substitution

(5) $$\varrho' + v'i = \varphi(\varrho + vi)$$

die Überführung des einen Ausdruckes in den anderen (S. 268). Da E und E' hier beide gegeben sind, so hat man die Funktion φ passend zu bestimmen.

Zur Herleitung der Formen (3) und (4) sind zwei Quadraturen erforderlich. Erstens wird

$$\varrho = \int \frac{du}{m \sinh \frac{u}{a}} = \frac{a}{m} \log \frac{e^{\frac{u}{a}} - 1}{e^{\frac{u}{a}} + 1},$$

woraus

$$\sinh \frac{u}{a} = \frac{2 e^{-\frac{m\varrho}{a}}}{1 - e^{-\frac{2m\varrho}{a}}}$$

(6) $$ds^2 = \frac{4 m^2 e^{-\frac{2m\varrho}{a}}}{\left(1 - e^{-\frac{2m\varrho}{a}}\right)^2} (d\varrho^2 + dv^2).$$

Noch einfacher ergibt sich

(7) $$ds'^2 = \frac{a^2}{\varrho'^2}(d\varrho'^2 + dv'^2).$$

Setzt man nun

(8) $$\varrho + vi = \alpha, \qquad \varrho - vi = \beta$$

(9) $$\varrho' + v'i = \alpha', \qquad \varrho' - v'i = \beta',$$

so gehen die Gleichungen (6) und (7) in

(10) $$ds^2 = \frac{4m^2 e^{\frac{m(\alpha+\beta)}{a}}}{\left(1 - e^{\frac{m(\alpha+\beta)}{a}}\right)^2} d\alpha d\beta$$

(11) $$ds'^2 = \frac{4a^2}{(\alpha' + \beta')^2} d\alpha' d\beta'$$

über.

Da die komplexen Variablen α und β in der Theorie der isometrischen Kurven ganz naturgemäß auftreten, so wird es vielfach zweckmäßig sein, diese Parameter zu benutzen, falls die hier immer festgehaltenen Voraussetzungen über die vorkommenden Funktionen sinngemäß auch für komplexe Argumente Geltung haben. Von einer geometrischen Darstellung der Parameter kann dann selbstverständlich nicht mehr die Rede sein. Es verdient aber hervorgehoben zu werden, daß auch die geometrischen Bezeichnungen: (imaginäre) Scharen von Koordinatenlinien und (imaginäres) Koordinatennetz nicht angewendet werden können, weil man bei dem Versuche, die wesentlichen Merkmale dieser Begriffe auf die komplexen Parameter zu übertragen, auf Widersprüche stößt.

Bezeichnet $\psi(\varrho - vi)$, wie auf S. 268, die zu $\varphi(\varrho + vi)$ konjugierte Funktion, so ist nun, der Gleichung (5) gemäß,

$$\alpha' = \varphi(\alpha), \qquad \beta' = \psi(\beta)$$

zu setzen. Vermöge dieser Substitution muß

$$\frac{4a^2 \varphi'(\alpha)\psi'(\beta)}{(\varphi(\alpha) + \psi(\beta))^2} = \frac{4m^2 e^{\frac{m(\alpha+\beta)}{a}}}{\left(1 - e^{\frac{m(\alpha+\beta)}{a}}\right)^2}$$

werden. Die Funktion ψ ist bekannt, wenn φ gefunden ist. Sie soll deshalb zunächst eliminiert werden. Für die rechte Seite der vorstehenden Gleichung werde die Bezeichnung E beibehalten. Durch Differentiation nach α erhält man

$$\frac{\varphi''(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} - 2\frac{\varphi'(\alpha)}{\varphi(\alpha)+\psi(\beta)} = \frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial \alpha}$$

$$\frac{\varphi'''(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} - \frac{\varphi''(\alpha)^2}{\varphi'(\alpha)^2} - 2\frac{\varphi''(\alpha)}{\varphi(\alpha)+\psi(\beta)} + 2\frac{\varphi'(\alpha)^2}{(\varphi(\alpha)+\psi(\beta))^2} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial \alpha}\right).$$

Die Substitution des Wertes von $\frac{1}{\varphi(\alpha)+\psi(\beta)}$ aus der vorletzten in die letzte Gleichung liefert

(12) $$\frac{\varphi'''(\alpha)}{\varphi'(\alpha)} - \frac{3}{2}\left(\frac{\varphi''(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}\right)^2 = \frac{1}{E}\frac{\partial^2 E}{\partial \alpha^2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{E}\frac{\partial E}{\partial \alpha}\right)^2.$$

Hierin ist die linke Seite in derselben Weise aus $\varphi'(\alpha)$ hervorgegangen wie die rechte aus E. Nun soll es sich hier nicht um die allgemeinste Transformation der pseudosphärischen Linienelemente ineinander handeln, sondern nur, wie im § 128, überhaupt um einen Übergang von ds' zu ds. Danach wird man mit einer Partikularlösung der Differentialgleichung (12) zum Ziel zu kommen suchen. Eine solche ergibt sich, wenn $\varphi'(\alpha)$ gleich der Funktion von α gesetzt wird, welcher E unter der Annahme eines konstanten β gleich wird. Es sei für $\beta = \beta_0$

$$E = E_0,$$

so wird

(13) $$\varphi(\alpha) = \int E_0 \, d\alpha,$$

und hierin ist

(14) $$E_0 = \frac{4m^2 e^{\frac{m(\alpha+\beta_0)}{a}}}{\left(1 - e^{\frac{m(\alpha+\beta_0)}{a}}\right)^2}.$$

Allein man braucht diesen Ausdruck nicht einzusetzen, wenn man beachtet, daß der Ausdruck von K durch Abbildungsparameter (S. 274 (9)), hier

$$K = -\frac{1}{2E}\left(\frac{\partial^2 \log E}{\partial \varrho^2} + \frac{\partial^2 \log E}{\partial v^2}\right),$$

bei Einführung von α und β in

(15) $$K = -\frac{2}{E}\frac{\partial^2 \log E}{\partial \alpha \partial \beta}$$

übergeht, daß also für $K = -\frac{1}{a^2}$ die Größe E der Differentialgleichung

(16) $$\frac{\partial^2 \log E}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{E}{2a^2}$$

genügt. Die für $\varphi(\alpha)$ gefundene Formel (13) wird hiernach

(17) $$\varphi(\alpha) = 2a^2 \int \frac{\partial^2 \log E_0}{\partial \alpha \partial \beta_0} d\alpha = 2a^2 \frac{\partial \log E_0}{\partial \beta_0}$$

(18)
$$\varphi(\alpha) = 2am\frac{1+e^{\frac{m}{a}(\alpha+\beta_0)}}{1-e^{\frac{m}{a}(\alpha+\beta_0)}}.$$

Man überzeugt sich leicht durch Ausführung der Differentiationen, daß man zur Transformation des einen Linienelements in das andere tatsächlich diese Funktion benutzen kann, und zwar geht (6) unmittelbar aus (7) hervor, wenn β_0 rein imaginär angenommen, also

(19)
$$\varrho' + v'i = 2am\frac{1+e^{\frac{m}{a}(\varrho+vi+b_0 i)}}{1-e^{\frac{m}{a}(\varrho+vi+b_0 i)}}$$

gesetzt wird. Ebenso hat es keine Schwierigkeit, von ϱ und ϱ' zu u und u' zurückzugehen und durch Trennung des Reellen vom Imaginären Beziehungen zwischen u, v und u', v' abzuleiten, die den Übergang zwischen (1) und (2) vermitteln.

§ 131.

Die Evoluten der Minimalflächen.

Durch den Weingartenschen Satz (§ 114) werden aus der Gesamtheit aller Flächen besondere Klassen herausgehoben: Flächen nämlich, in deren sämtlichen Punkten der eine der beiden Hauptkrümmungsradien in bestimmter Weise allein von dem anderen abhängt. Die Gleichung, die eine solche Flächenklasse kennzeichnet,

(1)
$$\varrho_2 = \lambda(\varrho_1),$$

oder wie man im allgemeinen statt dessen schreiben kann,

(2)
$$H = f(K),$$

erscheint bei Einführung der Werte

(3)
$$H = \varepsilon\frac{\left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}}{\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right)^{\frac{3}{2}}},$$
$$K = \frac{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)^2}{\left(\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1\right)^2}$$

(S. 80 (12, 13)) für jede gegebene Funktion f als partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Die Gesamtheit aller Weingartenschen Flächen genügt der Gleichung

$$\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial K}{\partial y} - \frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y} = 0,$$

einer partiellen Differentialgleichung dritter Ordnung, deren metrische Bedeutung im § 116 (S. 385 (4)) angegeben worden ist.

Wäre nun aus der Differentialgleichung (2) auf die allgemeinste Weise z als Funktion von x und y oder x, y, z als Funktionen zweier Parameter ausgedrückt, so würden die Koordinaten einer vollständigen Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen durch Differentiation hergestellt werden können. Das heißt, die Ermittelung einer bestimmten solchen Flächenklasse hängt von der allgemeinen Integration einer gegebenen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung ab. Die Integration ist vom analytischen Standpunkt aus von Interesse, aber nur in wenigen Fällen möglich.

Zu diesen gehört namentlich die Annahme $H = 0$. Die partielle Differentialgleichung der Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist, der sogenannten Minimalflächen (S. 260), lautet

$$(4)\quad \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Bevor auf ihre Integration eingegangen wird, soll das Linienelement der Krümmungsmittelpunktsflächen dargestellt und die Rotationsfläche, auf die sie abwickelbar sein müssen, bestimmt werden.

Beides ist einfach. Erstens ergibt sich aus

$$ds_1^2 = d\varrho_1^2 + e^{2\int \frac{d\varrho_1}{\varrho_1 - \varrho_2}} dq^2$$

(S. 381 (19)) für $\varrho_2 = -\varrho_1$ und unter der Voraussetzung, daß ϱ_1 der positive Hauptkrümmungsradius ist,

$$(5)\qquad ds_1^2 = d\varrho_1^2 + \varrho_1 dq^2.$$

Zweitens kennt man nach § 31 eine Umdrehungsfläche, die zugleich Minimalfläche ist, nämlich das Katenoid. Ihre Krümmungsmittelpunktsfläche entsteht durch Drehung der Evolute ihrer Meridiankurve um die Achse der Fläche. Demnach sind die Krümmungsmittelpunktsflächen aller Minimalflächen auf die Rotationsfläche der Evolute einer Kettenlinie abwickelbar, und bilden nach dem zweiten Teil des Weingartenschen Satzes (§ 122) eine vollständige Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen.

Die Gleichung der Evolute kann man entweder aus der Theorie der ebenen Kurven entnehmen oder mittels der Formeln

$$(6)\qquad x = m\psi(u), \qquad z = \int \sqrt{1 - m^2 \psi'(u)^2}\, du$$

(S. 407 (11)) darstellen, die sich auf

$$ds^2 = du^2 + \psi(u)^2 dv^2$$

stützen. Nach (5) ist

$$\psi(u) = \sqrt{u} \tag{7}$$

zu setzen. Die Ausführung der Quadratur liefert

$$\begin{gathered} x = m\sqrt{u} \\ z = \frac{1}{4}\left(2\sqrt{u}\sqrt{4u-m^2} - m^2 \log \frac{2\sqrt{u}+\sqrt{4u-m^2}}{m}\right). \end{gathered} \tag{8}$$

oder

$$z = \frac{x}{2}\sqrt{\frac{4x^2}{m^4}-1} - \frac{m^2}{4}\log\left(\frac{2x}{m^2}+\sqrt{\frac{4x^2}{m^4}-1}\right). \tag{9}$$

Diese Gleichung stellt für jeden Wert von m eine Kettenlinienevolute dar, wie man schon daraus erkennt, daß die Substitution

$$x = m^2 x', \qquad z = m^2 z',$$

also eine bloße Veränderung des Maßstabes, darauf hinauskommt, diesen Parameterwert gleich Eins zu machen. Mit der Konstanten a in der Gleichung der Kettenlinie (S. 101)

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{z}{a}} + e^{-\frac{z}{a}}\right)$$

hängt m durch die Gleichung

$$m^2 = 4a$$

zusammen, wie eine leichte Rechnung zeigt.

Die Krümmungsmittelpunktsflächen der Minimalflächen sind also, wie es sein muß, auf die Rotationsfläche jeder Kettenlinienevolute abwickelbar.

§ 132.

Die partielle Differentialgleichung der Minimalflächen.

Am Schluß des § 93 (S. 323) ist angegeben worden, daß das Verschwinden von H das des Differentialparameters zweiter Ordnung für jede der kartesischen Koordinaten nach sich zieht. Es sind also x, y, z Lösungen der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta^2\chi = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{G\frac{\partial\chi}{\partial u} - F\frac{\partial\chi}{\partial v}}{T} + \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{E\frac{\partial\chi}{\partial v} - F\frac{\partial\chi}{\partial u}}{T}\right) = 0. \tag{1}$$

Weil es jetzt auf eine wirkliche Darstellung der Koordinaten ankommt, wird man die Parameter spezialisieren, um die Gleichung in eine möglichst einfache Form zu setzen.

Die Fläche sei auf ein isometrisches Koordinatennetz bezogen, und es werde für dieses von vornherein

$$E = G, \qquad F = 0 \tag{2}$$

angenommen. Dann wird

$$\Delta^2 \chi = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2}\right). \tag{3}$$

Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial v^2} = 0 \tag{4}$$

weist auf einen Zusammenhang der Minimalflächen mit den Funktionen einer komplexen Veränderlichen hin. Nachdem man einmal Abbildungsparameter eingeführt hat, kann dies nicht überraschen (vgl. § 74 und 130). Nun würde es allerdings wünschenswert sein, bei der Darstellung reeller Flächen ganz im Gebiete des Reellen zu bleiben. Es ist wichtig sich klar zu machen, daß dies hier nicht angeht, daß man vielmehr auch dann auf komplexe Variable geführt wird, wenn man das Integrationsproblem nach den klassischen Methoden von Euler, Lagrange, Monge und Ampère in Angriff nimmt.

Die Aufgabe ist, von dem Mangel an Symmetrie abgesehen, vollständig in der partiellen Differentialgleichung (4) des vorigen Paragraphen,

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0 \tag{5}$$

enthalten. Gefordert wird die Ermittelung ihres allgemeinen Integrals. Wären die Koeffizienten von r, s und t nicht Funktionen von p und q, sondern von x und y, so würde man durch eine von Euler gegebene Transformation die partielle Differentialgleichung mittels der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades dahin vereinfachen können, daß sie von den Ableitungen zweiter Ordnung nur die mittlere enthält.

Es sei nämlich

$$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + D = 0 \tag{6}$$

eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung, in der A, B, C nur von x und y abhängen, während D außerdem auch z, $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ enthalten kann. $B^2 - AC$ sei von Null verschieden. An Stelle von x und y führe man zwei vorläufig nicht näher bestimmte Funktionen ξ und η dieser Größen ein. Für die partiellen Ableitungen gelten die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} \\ q &= \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} \end{aligned} \tag{7}$$

$$(8)\quad \begin{aligned} r &= \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ s &= \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &\qquad + \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \\ t &= \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial \xi}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}. \end{aligned}$$

Die Differentialgleichung (6) nimmt die Form an

$$(9)\qquad A'\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2B'\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + C'\frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} + D' = 0,$$

wo A', B', C' folgende Werte haben:

$$(10)\quad \begin{aligned} A' &= A\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \\ B' &= A\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \xi}{\partial y}\right) + C\frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} \\ C' &= A\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2. \end{aligned}$$

Nun mögen die Größen ξ und η den Bedingungen

$$(11)\qquad A' = 0, \qquad C' = 0$$

unterworfen werden, sodaß in der transformierten Differentialgleichung bloß die eine Ableitung zweiter Ordnung $\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta}$ stehen bleibt. Die Ausdrücke von A' und C' lehren, daß ξ und η Lösungen einer und derselben partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(12)\qquad A\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + C\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = 0$$

sein müssen. Ihre Integration hängt von der der gewöhnlichen Differentialgleichung ab:

$$(13)\qquad A dy^2 - 2B dy dx + C dx^2 = 0.$$

Sind

$$f(x, y) = \text{const.}, \qquad g(x, y) = \text{const.}$$

die Integrale der beiden Differentialgleichungen ersten Grades, in die sie sich zerlegen läßt, so kann man

$$\xi = f(x, y), \qquad \eta = g(x, y)$$

annehmen. Um die Reduktion zu Ende zu bringen, hätte man noch den Quotienten $\frac{B'}{D'}$ in die neuen Variablen zu transformieren.

In eine Gleichung vom Typus (6) kann nun die Differentialgleichung der Minimalflächen mittels einer ebenfalls schon von Euler

herrührenden Transformation übergeführt werden, die darin besteht, p und q statt x und y als unabhängige und die Verbindung

(14) $$px + qy - z = w$$

als abhängige Variable zu betrachten. Offenbar kommt dies auf die Einführung von Tangentialkoordinaten statt der Punktkoordinaten hinaus. Eine einfache Rechnung liefert die Beziehungen

(15) $$\frac{\partial w}{\partial p} = x, \qquad \frac{\partial w}{\partial q} = y$$

(16) $$\frac{\partial^2 w}{\partial p^2} = \frac{t}{rt - s^2}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q} = -\frac{s}{rt - s^2}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial q^2} = \frac{r}{rt - s^2}.$$

Ist w als Funktion von p und q bekannt, so geben die Formeln (15) und (14) die Größen x, y und

$$z = p\frac{\partial w}{\partial p} + q\frac{\partial w}{\partial q} - w$$

ohne weiteres durch die Parameter p, q dargestellt.

Im vorliegenden Falle lautet die Bestimmungsgleichung für w

(17) $$(1 + p^2)\frac{\partial^2 w}{\partial p^2} + 2pq\frac{\partial^2 w}{\partial p \partial q} + (1 + q^2)\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} = 0,$$

und die zugehörige gewöhnliche Differentialgleichung

(18) $$(1 + p^2)dq^2 - 2pq\,dq\,dp + (1 + q^2)dp^2 = 0.$$

Da die Determinante der auf der linken Seite stehenden quadratischen Differentialform positiv ist, so läßt sich also tatsächlich die Benutzung komplexer Variablen nicht vermeiden.

Übrigens würde die weitere Behandlung der Aufgabe sich zweckmäßig nicht an die Gleichung (17) selbst, sondern an eine andere anschließen, in der eine kartesische Koordinate oder vielmehr jede von ihnen der Reihe nach die abhängige Variable ist und die mit Hilfe von (15) leicht aus (17) abgeleitet werden kann. Allerdings enthält sie auch die ersten Ableitungen $\frac{\partial \chi}{\partial p}$ und $\frac{\partial \chi}{\partial q}$. Aber gerade deshalb, weil diese in einer speziellen Verbindung vorkommen, führt die Eulersche Reduktion auf die besonders einfache Form

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial \xi \partial \eta} = 0,$$

in der jetzt ξ und η Funktionen von p und q sind. Es ist nicht erforderlich, diese Behandlungsweise weiter zu verfolgen, weil auch die Gleichung (4) mittels der Substitution

(19) $$u + vi = \xi, \qquad u - vi = \eta$$

dieselbe Differentialgleichung liefert. Ihr allgemeines Integral ist

$$\chi = \varphi(\xi) + \psi(\eta).$$

§ 133.

Analytische Darstellung der Minimalflächen.

In dieser Form muß sich also jede der drei Koordinaten x, y, z ausdrücken lassen. Aber die dabei auftretenden Funktionen können nicht alle sechs beliebig angenommen werden, weil die durch die Parameterdarstellung vermittelte funktionale Beziehung zwischen x, y und z auch durch die Differentialgleichung (5) wiedergegeben wird, deren allgemeines Integral nur zwei willkürliche Funktionen enthält. In der Tat darf man z. B.

$$x = \xi' + \eta'$$

schreiben, wo dann y und z in ξ' und η' dieselbe Form behalten wie in ξ und η. Außerdem gelten unter Annahme der isometrischen Parameter u, v die beiden Bedingungsgleichungen (2), die wegen

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial x}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = i\left(\frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \eta}\right)$$

in

$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 = 0, \qquad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 = 0$$

übergehen. Sie liefern zwei Bedingungen zwischen den vier noch stehengebliebenen Funktionen.

Eine dieser Gleichungen kann man übrigens weglassen, wenn man von vornherein der Realität wegen in einer Formel wie

$$x = \varphi(u + vi) + \psi(u - vi)$$

unter $\psi(u - vi)$ die zu $\varphi(u + vi)$ konjugierte Funktion versteht. Der reelle Teil einer komplexen Größe werde durch Vorsetzung des Buchstabens $\Re$ gekennzeichnet. Dann läßt sich schreiben

$$(1) \qquad x = \Re f(\xi), \qquad y = \Re g(\xi), \qquad z = \Re h(\xi),$$

wo die drei Funktionen f, g, h durch die Bedingung

$$(2) \qquad f'(\xi)^2 + g'(\xi)^2 + h'(\xi)^2 = 0$$

verbunden sind. Setzt man nach Weierstraß

$$(3) \qquad \frac{f' + ig'}{-h'} = s_0,$$

so liefert sie

$$(4) \qquad \frac{f' - ig'}{h'} = \frac{1}{s_0}.$$

Das betrachtete Flächenstück soll so begrenzt sein, daß nicht nur s_0 eine eindeutige Funktion von ξ, sondern auch ξ eine eindeutige Funktion von s_0 ist. Die beiden Beziehungen (3, 4) sind mit

(5) $$\frac{f'}{1-s_0^2} = \frac{g'}{i(1+s_0^2)} = \frac{h'}{2s_0}$$

gleichbedeutend. Bezeichnet man den gemeinsamen Wert der drei Quotienten mit

$$\mathfrak{F}_0(s_0)\frac{ds_0}{d\xi},$$

so erhält man

(6) $$\begin{aligned} dx &= \Re(1-s_0^2)\,\mathfrak{F}_0(s_0)\,ds_0 \\ dy &= \Re\, i(1+s_0^2)\,\mathfrak{F}_0(s_0)\,ds_0 \\ dz &= \Re\, 2s_0\,\mathfrak{F}_0(s_0)\,ds_0 \end{aligned}$$

oder, wenn s_1 zu s_0, $\mathfrak{F}_1(s_1)$ zu $\mathfrak{F}_0(s_0)$ konjugiert ist,

(7) $$\begin{aligned} dx &= \frac{1-s_0^2}{2}\mathfrak{F}_0(s_0)ds_0 + \frac{1-s_1^2}{2}\mathfrak{F}_1(s_1)ds_1 \\ dy &= i\frac{1+s_0^2}{2}\mathfrak{F}_0(s_0)ds_0 - i\frac{1+s_1^2}{2}\mathfrak{F}_1(s_1)ds_1 \\ dz &= s_0\mathfrak{F}_0(s_0)ds_0 + s_1\mathfrak{F}_1(s_1)ds_1, \end{aligned}$$

oder auch

(8) $$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\int(1-s_0^2)\mathfrak{F}_0(s_0)ds_0 + \frac{1}{2}\int(1-s_1^2)\mathfrak{F}_1(s_1)ds_1 \\ y &= \frac{i}{2}\int(1+s_0^2)\mathfrak{F}_0(s_0)ds_0 - \frac{i}{2}\int(1+s_1^2)\mathfrak{F}_1(s_1)ds_1 \\ z &= \int s_0\mathfrak{F}_0(s_0)ds_0 + \int s_1\mathfrak{F}_1(s_1)ds_1, \end{aligned}$$

wobei die Integrale in den beiden Bestandteilen jeder der drei Formeln über entsprechende Wege zu erstrecken sind.

Kommt das Linienelement der Fläche in der Untersuchung nicht vor, so ist der Index 0 bei s und $\mathfrak{F}$ wegzulassen.

Während die Realität der Darstellung (8) unter den über s_1 und $\mathfrak{F}_1(s_1)$ gemachten Voraussetzungen unmittelbar einleuchtet, ist noch zu untersuchen, ob diese Annahmen für eine beliebige reelle Minimalfläche auch notwendig sind. Es seien also s_0 und s_1 beliebige komplexe Variable. Nach (8) oder (7) ist

(9) $$\frac{\partial x}{\partial s_0} = \frac{1}{2}(1-s_0^2)\mathfrak{F}_0(s_0), \quad \frac{\partial y}{\partial s_0} = \frac{i}{2}(1+s_0^2)\mathfrak{F}_0(s_0), \quad \frac{\partial z}{\partial s_0} = s_0\mathfrak{F}_0(s_0)$$

(10) $$\frac{\partial x}{\partial s_0} - i\frac{\partial y}{\partial s_0} = \mathfrak{F}_0(s_0)$$

(11) $$\frac{\frac{\partial x}{\partial s_0} + i\frac{\partial y}{\partial s_0}}{\frac{\partial z}{\partial s_0}} = - s_0$$

(12) $$\left(\frac{\partial x}{\partial s_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s_0}\right)^2 = 0$$

und ebenso

(13) $$\frac{\partial x}{\partial s_1} = \frac{1}{2}(1 - s_1^2)\mathfrak{F}_1(s_1), \quad \frac{\partial y}{\partial s_1} = -\frac{i}{2}(1 + s_1^2)\mathfrak{F}_1(s_1), \quad \frac{\partial z}{\partial s_1} = s_1\mathfrak{F}_1(s_1)$$

(14) $$\frac{\partial x}{\partial s_1} + i\frac{\partial y}{\partial s_1} = \mathfrak{F}_1(s_1)$$

(15) $$\frac{\frac{\partial x}{\partial s_1} - i\frac{\partial y}{\partial s_1}}{\frac{\partial z}{\partial s_1}} = - s_1$$

(16) $$\left(\frac{\partial x}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s_1}\right)^2 = 0.$$

Ferner hat man, wenn längs der Fläche z als (reelle) Funktion von x und y betrachtet wird,

(17) $$\frac{\partial z}{\partial s_0} = p\frac{\partial x}{\partial s_0} + q\frac{\partial y}{\partial s_0}$$

(18) $$\frac{\partial z}{\partial s_1} = p\frac{\partial x}{\partial s_1} + q\frac{\partial y}{\partial s_1}.$$

Aus (17) und (12) ergeben sich nun für $\frac{\partial x}{\partial s_0} \Big/ \frac{\partial z}{\partial s_0}$ und $\frac{\partial y}{\partial s_0} \Big/ \frac{\partial z}{\partial s_0}$ Ausdrücke $a \pm bi$, $c \pm di$, und aus (18) und (16) dieselben Werte, zunächst abgesehen von der Zuordnung, auch für $\frac{\partial x}{\partial s_1} \Big/ \frac{\partial z}{\partial s_1}$ und $\frac{\partial y}{\partial s_1} \Big/ \frac{\partial z}{\partial s_1}$. Und da $\frac{\partial x}{\partial s_0} \Big/ \frac{\partial z}{\partial s_0}$ nicht gleich $\frac{\partial x}{\partial s_1} \Big/ \frac{\partial z}{\partial s_1}$ werden kann, so müssen die beiden Quotienten einander konjugiert sein, und ebenso $\frac{\partial y}{\partial s_0} \Big/ \frac{\partial z}{\partial s_0}$ und $\frac{\partial y}{\partial s_1} \Big/ \frac{\partial z}{\partial s_1}$. Vermöge (11) und (15) gilt dasselbe für s_0 und s_1. Alsdann werden wegen der Realität von x und y die Ableitungen $\frac{\partial x}{\partial s_0}$ und $\frac{\partial x}{\partial s_1}$, $\frac{\partial y}{\partial s_0}$ und $\frac{\partial y}{\partial s_1}$ konjugiert komplexe Größen, und demnach schließlich auch die durch (10) und (14) bestimmten Funktionen $\mathfrak{F}_0(s_0)$ und $\mathfrak{F}_1(s_1)$.

Man kann die gefundene Darstellung vom Integralzeichen befreien, indem man

(19) $$\mathfrak{F}_0(s_0) = \frac{d^3 F_0(s_0)}{d s_0^3}$$

setzt. Dadurch ergibt sich

$$(20)\qquad \begin{aligned} x &= \Re\left((1-s_0^2)\frac{d^2F_0(s_0)}{ds_0^2} + 2s_0\frac{dF_0(s_0)}{ds_0} - 2F_0(s_0) \right)\\ y &= \Re\left(i(1+s_0^2)\frac{d^2F_0(s_0)}{ds_0^2} - 2is_0\frac{dF_0(s_0)}{ds_0} + 2iF_0(s_0)\right)\\ z &= \Re\left(2s_0\frac{d^2F_0(s_0)}{ds_0^2} - 2\frac{dF_0(s_0)}{ds_0}\right). \end{aligned}$$

§ 134.

Sphärische Abbildung der Minimalflächen.

Um die Evoluten der Minimalflächen darzustellen, braucht man noch die Richtungskosinus der Normale und einen Hauptkrümmungsradius. Den auf S. 49 stehenden Ausdrücken entsprechend hat man

$$(1)\qquad X = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial y}{\partial s_0}\frac{\partial z}{\partial s_1} - \frac{\partial z}{\partial s_0}\frac{\partial y}{\partial s_1}\right), \cdots$$

zu setzen, dabei aber T neu zu definieren, weil T^2 jetzt nicht mehr positiv ist. Aus den Gleichungen (9) und (13) folgt

$$(2)\qquad \begin{aligned} TX &= \frac{i}{2}(s_0+s_1)(s_0s_1+1)\mathfrak{F}_0(s_0)\mathfrak{F}_1(s_1)\\ TY &= \frac{1}{2}(s_0-s_1)(s_0s_1+1)\mathfrak{F}_0(s_0)\mathfrak{F}_1(s_1)\\ TZ &= \frac{i}{2}(s_0s_1-1)(s_0s_1+1)\mathfrak{F}_0(s_0)\mathfrak{F}_1(s_1) \end{aligned}$$

$$(3)\qquad T^2 = -\frac{1}{4}(s_0s_1+1)^4\mathfrak{F}_0(s_0)^2\mathfrak{F}_1(s_1)^2.$$

T soll nun so gewählt werden, daß

$$(4)\qquad X = \frac{s_0+s_1}{s_0s_1+1},\qquad Y = i\,\frac{s_1-s_0}{s_0s_1+1},\qquad Z = \frac{s_0s_1-1}{s_0s_1+1}$$

wird. Hieraus kann man umgekehrt s_0 und s_1 berechnen und erhält

$$(5)\qquad s_0 = \frac{X+Yi}{1-Z}.$$

Reeller und imaginärer Teil von s_0 sind jetzt leicht geometrisch zu deuten. Man projiziere den Bildpunkt (XYZ) des Flächenpunktes (xyz) vom Schnittpunkt der Einheitskugel mit der positiven z-Achse aus auf die (xy)-Ebene. Für die Koordinaten u, v der Projektion ergibt sich aus der Anschauung sofort

$$(6)\qquad u = \frac{X}{1-Z},\qquad v = \frac{Y}{1-Z},$$

sodaß

(7) $$s_0 = u + vi$$

wird. Erteilt man u einen konstanten Wert C, so erhält man

$$X + CZ = C,$$

die Gleichung einer Ebene, die durch den Pol (0, 0, 1) der Projektion hindurchgeht und der y-Achse parallel ist. Entsprechendes gilt für $v = C'$. Die Punkte der Kugel sind also auf zwei Kreisscharen bezogen. In (4) eingeführt, liefern die Parameter dieser Scharen die Ausdrücke

(8) $$X = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \quad Y = \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \quad Z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}.$$

Endlich erhält man hieraus

(9) $$d\sigma^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(u^2 + v^2 + 1)^2}$$

oder, den ursprünglichen Formeln (4) gemäß,

(10) $$d\sigma^2 = \frac{4\, ds_0\, ds_1}{(s_0 s_1 + 1)^2}.$$

Das sphärische Kurvennetz $u =$ const., $v =$ const. ist demnach isometrisch.

Zu (10) gehört für die Fläche selbst die aus (7) des vorigen Paragraphen folgende Formel

(11) $$ds^2 = (s_0 s_1 + 1)^2 \mathfrak{F}_0(s_0) \mathfrak{F}_1(s_1)\, ds_0\, ds_1.$$

Aus beiden zusammen ergibt sich

(12) $$ds^2 = \frac{(s_0 s_1 + 1)^4}{4} \mathfrak{F}_0(s_0) \mathfrak{F}_1(s_1)\, d\sigma^2.$$

Eine Minimalfläche wird also durch parallele Normalen konform auf die Einheitskugel abgebildet.

Für diese Tatsache läßt sich ein einfacherer Beweis geben, bei dem die explizite Darstellung der Koordinaten nicht gebraucht wird. Die Minimalflächen gehören zu den Weingartenschen Flächen. Wird eine solche auf die Parameter der Krümmungslinien bezogen und

$$ds^2 = E^* dp^2 + G^* dq^2$$

gesetzt, so kann nach S. 380 (14)

(13) $$G^* = e^{2\int \frac{\varrho_1\, d\varrho_2}{\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_2)}}$$

angenommen werden. Dieser Ausdruck wird hier gleich ϱ_1, und E^* erhält denselben Wert. Demnach ist

(14) $$ds^2 = \varrho_1(dp^2 + dq^2).$$

Auf verschiedenen Wegen, z. B. durch Spezialisierung der Formeln für $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ auf S. 226, findet man weiter

$$d\sigma^2 = \frac{1}{\varrho_1}(dp^2 + dq^2), \tag{15}$$

also

$$ds^2 = \varrho_1^2 d\sigma^2. \tag{16}$$

Die Vergleichung mit (12) ergibt

$$\varrho_1 = \frac{(s_0 s_1 + 1)^2}{2} \sqrt{\mathfrak{F}_0(s_0)\,\mathfrak{F}_1(s_1)}. \tag{17}$$

Aus (4), (17) und der Darstellung der Minimalflächen lassen sich schließlich deren Evoluten, also eine vollständige Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen, unmittelbar bestimmen.

§ 135.

Schiebungsflächen. Die Scherksche Minimalfläche.

Wegen des in den Formeln auf S. 437 enthaltenen engen Zusammenhanges zwischen den Funktionen eines komplexen Arguments und den Minimalflächen nehmen diese nebst den aus ihnen abgeleiteten in der Gesamtheit aller Flächen eine Sonderstellung ein. Sehr interessante Untersuchungen haben sich an Aufgaben angeschlossen, die die Bestimmung von Minimalflächenstücken bei vorgeschriebener Begrenzung fordern. Allein diese Aufgaben müssen hier außer Betracht bleiben, weil für sie dieselbe Bemerkung gilt wie am Schluß des § 76. Es sind funktionentheoretische Probleme in geometrischer Einkleidung.

Auch abgesehen von solchen Problemstellungen soll die Theorie dieser besonderen Klasse von Flächen nicht weiter verfolgt werden. Nur werde noch gezeigt, wie man unter Umständen spezielle Minimalflächen durch Hinzunahme anderer Eigenschaften zu $H = 0$ finden kann, ohne die allgemeine Darstellung der Koordinaten als bekannt vorauszusetzen. Im § 31 ist eine Minimalfläche bestimmt worden, die zugleich Umdrehungsfläche ist. Nun tritt der Vorstellung der Drehung die der Parallelverschiebung zur Seite. Um nicht zu elementare Resultate zu erhalten, nehmen wir an, eine beliebige Raumkurve werde so verschoben, daß jeder ihrer Punkte eine einer anderen Raumkurve kongruente und gleichgestellte durchläuft. Ihr geometrischer Ort wird dann als Schiebungsfläche (Translationsfläche) bezeichnet. Die bewegliche Kurve sei fest mit einem Achsensystem verbunden, das dem im Raume festen parallel ist, und ihre Koordinaten im beweglichen System mögen als Funktionen eines Parameters u betrachtet werden,

$f_1(u)$, $g_1(u)$, $h_1(u)$. Sind x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Anfangspunktes des beweglichen Systems inbezug auf das feste, so ist die Darstellung der Kurve für dieses System:

$$x = x_0 + f_1(u), \qquad y = y_0 + g_1(u), \qquad z = z_0 + h_1(u).$$

Gibt man nun u irgend zwei verschiedene konstante Werte, so sollen der Annahme nach zwei Gleichungssysteme der Form

$$x = x_{10} + f_2(v), \qquad y = y_{10} + g_2(v), \qquad z = z_{10} + h_2(v)$$
$$x = x_{20} + f_2(v), \qquad y = y_{20} + g_2(v), \qquad z = z_{20} + h_2(v)$$

entstehen, wo $x_{10}, \ldots z_{20}$ Konstanten sind. Dies ist nur für

$$x_0 = f_2(v), \qquad y_0 = g_2(v), \qquad z_0 = h_2(v)$$

möglich; wenigstens wenn von drei additiven Konstanten abgesehen wird, die bei passender Wahl des Anfangspunktes gleich Null gesetzt oder, was auf dasselbe hinauskommt, in die Funktionen $f_2(v), \ldots$ aufgenommen werden können.

Hiernach ist die Darstellung der Schiebungsfläche:

$$(1) \qquad \begin{aligned} x &= f_1(u) + f_2(v) \\ y &= g_1(u) + g_2(v) \\ z &= h_1(u) + h_2(v). \end{aligned}$$

Der bloße Anblick der Gleichungen lehrt, daß die Fläche noch auf eine zweite Art durch Verschiebung einer Kurve erzeugt werden kann.

Die drei Koordinaten genügen der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial u \partial v} = 0$$

und damit der Bedingung $M = 0$, d. h. die beiden Scharen erzeugender Kurven sind einander konjugiert.

Es sei nun ganz speziell

$$(2) \qquad z = \varphi(x) + \psi(y).$$

Die Frage, ob durch eine solche Gleichung eine Minimalfläche dargestellt werden kann, ist leicht zu beantworten. Da

$$(3) \qquad s = 0$$

ist, so reduziert sich die partielle Differentialgleichung

$$(4) \qquad (1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0$$

auf

$$\frac{r}{1+p^2} = -\frac{t}{1+q^2},$$

d. h. auf

$$\frac{\varphi''(x)}{1+\varphi'(x)^2} = -\frac{\psi''(y)}{1+\psi'(y)^2}.$$

Hierin müssen die linke und die rechte Seite gleich einer und derselben konstanten Größe sein:

$$\frac{\varphi''(x)}{1+\varphi'(x)^2} = c, \qquad \frac{\psi''(y)}{1+\psi'(y)^2} = -c.$$

Nach Weglassung unwesentlicher Konstanten erhält man

(5) $$e^{cz} = \frac{\cos cy}{\cos cx}.$$

Dies ist die Gleichung der **Scherkschen Minimalfläche.**

Die zu ihrer Herleitung angewendete Methode besteht, allgemein gesprochen, darin, die Minimalfläche außer der für sie charakteristischen Gleichung (4) noch einer zweiten partiellen Differentialgleichung, im vorliegenden Falle (3), zu unterwerfen. Selbstverständlich braucht eine solche nicht ebenfalls von der zweiten Ordnung zu sein. So würde bei der Frage nach den Rotationsflächen die mit

$$z = f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

gleichbedeutende partielle Differentialgleichung erster Ordnung

$$py - qx = 0$$

hinzutreten. Zu bemerken ist aber, daß im § 31 ebenso wie hier der Erfolg der Methode in der Kenntnis des Integrals der hinzugenommenen Differentialgleichung begründet ist.

§ 136.

Eine zweite, durch die Minimalflächen bestimmte Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen.

Weingarten hat bewiesen, daß durch die Minimalflächen noch eine andere Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen bestimmt wird. Man kommt auf sie durch Benutzung eines speziellen Paares von Parametern. Es sei

(1) $$xX + yY + zZ = p$$

(2) $$\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = q.$$

p ist also der algebraische Wert des Abstandes der Tangentialebene vom Anfangspunkt der Koordinaten, q das halbe Quadrat des von

diesem Punkte ausgehenden Radiusvektors der Fläche. Welche Form nehmen die Weingartenschen Gleichungen

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial p} &= \eta_{11}\frac{\partial x}{\partial p} + \eta_{12}\frac{\partial x}{\partial q} \\ \frac{\partial X}{\partial q} &= \eta_{21}\frac{\partial x}{\partial p} + \eta_{22}\frac{\partial x}{\partial q} \end{aligned}$$

für diese Parameter an?

Aus (1) und (2) folgt durch Differentiation

$$(4)\qquad \sum x\frac{\partial X}{\partial p} = 1, \qquad \sum x\frac{\partial X}{\partial q} = 0$$

$$(5)\qquad \sum x\frac{\partial x}{\partial p} = 0, \qquad \sum x\frac{\partial x}{\partial q} = 1.$$

Setzt man für die Ableitungen der Richtungskosinus der Normale die Werte aus (3) in (4) ein und benutzt (5), so erhält man

$$(6)\qquad \eta_{12} = 1, \qquad \eta_{22} = 0.$$

Nun ist nach S. 225 (16, 13)

$$\begin{aligned} H &= -(\eta_{11} + \eta_{22}) \\ K &= \eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21}, \end{aligned}$$

folglich wird

$$(7)\qquad \eta_{11} = -H, \qquad \eta_{21} = -K,$$

und die Weingartenschen Gleichungen lauten

$$(8)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial p} &= -H\frac{\partial x}{\partial p} + \frac{\partial x}{\partial q} \\ \frac{\partial X}{\partial q} &= -K\frac{\partial x}{\partial p}. \end{aligned}$$

Es sei nun die Fläche (x, y, z) eine Minimalfläche. Die für $H = 0$ aus der ersten Gleichung (8) hervorgehende

$$(9)\qquad \frac{\partial X}{\partial p} = \frac{\partial x}{\partial q}$$

bildet mit den beiden entsprechenden zusammen das System der Integrabilitätsbedingungen für die drei Differentialausdrücke

$$(10)\qquad \begin{aligned} x\,dp + X\,dq &= dx' \\ y\,dp + Y\,dq &= dy' \\ z\,dp + Z\,dq &= dz'. \end{aligned}$$

Betrachtet man die hiernach durch Quadraturen bestimmbaren Größen

x', y', z' als Koordinaten einer neuen Fläche, so findet man für das Linienelement

$$\sum dx'^2 = dp^2 \sum x^2 + 2\,dp\,dq \sum xX + dq^2 \sum X^2,$$

d. h.

(11) $$ds'^2 = 2q\,dp^2 + 2p\,dp\,dq + dq^2.$$

Dieser Ausdruck ist von der speziellen Minimalfläche, deren Koordinaten x, y, z nebst den zugehörigen Größen X, Y, Z bei der Bildung von x', y', z' benutzt worden sind, völlig unabhängig. D. h. sämtliche Flächen mit den Koordinaten x', y', z' sind aufeinander abwickelbar.

Umgekehrt lassen sich alle Flächen, für die

(12) $$E' = 2q, \qquad F' = p, \qquad G' = 1$$

ist, in der angegebenen Weise durch die Minimalflächen darstellen. Denn sind x', y', z' die kartesischen Koordinaten irgendeiner solchen Fläche, so setze man

$$\frac{\partial x'}{\partial p} = x, \qquad \frac{\partial y'}{\partial p} = y, \qquad \frac{\partial z'}{\partial p} = z$$

$$\frac{\partial x'}{\partial q} = X, \qquad \frac{\partial y'}{\partial q} = Y, \qquad \frac{\partial z'}{\partial q} = Z$$

und betrachte x, y, z als Koordinaten einer neuen Fläche. Die Behauptung würde bewiesen sein, wenn gezeigt wäre, daß für diese die mittlere Krümmung verschwindet und daß X, Y, Z für sie die Bedeutung der Richtungskosinus der Normale haben. Nun ist

$$\sum X^2 = \sum \left(\frac{\partial x'}{\partial q}\right)^2 \equiv G' = 1$$

$$\sum X \frac{\partial x}{\partial p} = \sum \frac{\partial x'}{\partial q} \frac{\partial^2 x'}{\partial p^2} \equiv \frac{\partial F'}{\partial p} - \frac{1}{2} \frac{\partial E'}{\partial q} = 0$$

$$\sum X \frac{\partial x}{\partial q} = \sum \frac{\partial x'}{\partial q} \frac{\partial^2 x'}{\partial p\, \partial q} \equiv \frac{1}{2} \frac{\partial G'}{\partial p} = 0,$$

mithin gilt der zweite Teil der Behauptung. Ferner ist

$$\frac{\partial X}{\partial p} = \frac{\partial x}{\partial q},$$

und dies würde mit der ersten Gleichung (8) verglichen

$$H \frac{\partial x}{\partial p} = 0$$

liefern, wenn p und q wirklich dieselbe Bedeutung hätten wie in jener Gleichung. Es wird aber in der Tat

$$\sum x X = \sum \frac{\partial x'}{\partial p}\frac{\partial x'}{\partial q} \equiv F' = p$$
$$\sum x^2 = \sum \left(\frac{\partial x'}{\partial p}\right)^2 \equiv E' = 2q,$$

und es gelten also die drei Gleichungen

$$H\frac{\partial x}{\partial p} = 0, \quad H\frac{\partial y}{\partial p} = 0, \quad H\frac{\partial z}{\partial p} = 0.$$

Aus ihnen würde man $H = 0$ nicht schließen können, wenn gleichzeitig

(13) $$\frac{\partial x}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial p} = 0,$$

und demnach das durch die Gleichungen

$$x = \frac{\partial x'}{\partial p}, \quad y = \frac{\partial y'}{\partial p}, \quad z = \frac{\partial z'}{\partial p}$$

aus der Fläche (x', y', z') abgeleitete Gebilde nicht eine Fläche, sondern eine Kurve wäre. Die dann aus (13) folgenden Gleichungen

$$\frac{\partial^2 x'}{\partial p^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 y'}{\partial p^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z'}{\partial p^2} = 0$$

oder

$$x' = x_0 + ap$$
$$y' = y_0 + bp$$
$$z' = z_0 + cp$$

kennzeichnen die Fläche (x', y', z') als geradlinig. Vergleicht man ihre Fundamentalgrößen mit den durch (12) bestimmten, so erhält man

$$\sum a^2 = 2q, \quad \sum a\left(\frac{dx_0}{dq} + p\frac{da}{dq}\right) = p, \quad \sum\left(\frac{dx_0}{dq} + p\frac{da}{dq}\right)^2 = 1.$$

Sowohl aus der ersten wie aus der zweiten dieser Bedingungen folgt

$$\sum a\frac{da}{dq} = 1,$$

und aus der dritten u. a.

$$\sum\left(\frac{da}{dq}\right)^2 = 0.$$

Diese beiden Annahmen widersprechen sich, die Gleichungen (13) können nicht bestehen, und es bleibt

$$H = 0$$

übrig, womit auch der erste Teil der Behauptung bewiesen ist.

Setzt man

(14) $$q = \frac{1}{2}r^2,$$

so kann man durch die weitere Substitution

(15) $$r + p = u, \qquad r - p = v$$

die Fläche (x', y', z') auf orthogonale Koordinaten bringen. Es wird nämlich

(16) $$ds'^2 = \frac{u+v}{4}(u\,du^2 + v\,dv^2).$$

Das Koordinatennetz ist isometrisch. Um Abbildungsparameter einzuführen, kann man

$$u\,du^2 = m\,d\alpha^2, \qquad v\,dv^2 = m\,d\beta^2$$

setzen und über die Konstante m so verfügen, daß in

$$ds'^2 = m'\left(\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}}\right)(d\alpha^2 + d\beta^2)$$

$m' = 1$ wird. Die Substitution wird dann

(17) $$u = \sqrt{3}\,\alpha^{\frac{2}{3}}, \qquad v = \sqrt{3}\,\beta^{\frac{2}{3}},$$

und die Formel für das Linienelement

(18) $$ds'^2 = \left(\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}}\right)(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

ds'^2 hat also die Liouvillesche Form (§ 83).

§ 137.

Verallgemeinerung der Ergebnisse des vorigen Paragraphen.

Die Gleichungen (10), die zu der Formel (11) für das Linienelement ds' geführt haben, sind von Weingarten selbst verallgemeinert worden. Es werde gesetzt:

(1) $$\begin{aligned} x\,d\varphi_2 + X\,d\varphi_1 &= dx' \\ y\,d\varphi_2 + Y\,d\varphi_1 &= dy' \\ z\,d\varphi_2 + Z\,d\varphi_1 &= dz', \end{aligned}$$

wo φ_1 und φ_2 gegebene oder zu bestimmende Funktionen der Parameter p, q bezeichnen. Wenn die Integrabilitätsbedingungen für die drei Differentialausdrücke erfüllt sind, wie es beim Ansatz (1) bereits vorausgesetzt wird, so können x', y', z' als Koordinaten einer Fläche aufgefaßt werden, deren Linienelement durch

(2) $$ds'^2 = 2q\,d\varphi_2^2 + 2p\,d\varphi_2\,d\varphi_1 + d\varphi_1^2$$

bestimmt wird.

Nun ist

$$dx' = \left(x\frac{\partial\varphi_2}{\partial p} + X\frac{\partial\varphi_1}{\partial p}\right)dp + \left(x\frac{\partial\varphi_2}{\partial q} + X\frac{\partial\varphi_1}{\partial q}\right)dq,$$

mithin lautet die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(x\frac{\partial \varphi_2}{\partial p}+X\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}\right)=\frac{\partial}{\partial p}\left(x\frac{\partial \varphi_2}{\partial q}+X\frac{\partial \varphi_1}{\partial q}\right)$$

$$\frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial \varphi_2}{\partial p}+\frac{\partial X}{\partial q}\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}=\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial \varphi_2}{\partial q}+\frac{\partial X}{\partial p}\frac{\partial \varphi_1}{\partial q}.$$

Werden hierin für $\frac{\partial X}{\partial p}$ und $\frac{\partial X}{\partial q}$ die Werte (8) eingesetzt, so erhält die Gleichung die Form

$$\lambda\frac{\partial x}{\partial p}+\mu\frac{\partial x}{\partial q}=0,$$

und da ebenso

$$\lambda\frac{\partial y}{\partial p}+\mu\frac{\partial y}{\partial q}=0$$

$$\lambda\frac{\partial z}{\partial p}+\mu\frac{\partial z}{\partial q}=0$$

ist, so muß $\lambda=0$, $\mu=0$, d. h.

$$H\frac{\partial \varphi_1}{\partial q}-K\frac{\partial \varphi_1}{\partial p}-\frac{\partial \varphi_2}{\partial q}=0$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial p}-\frac{\partial \varphi_1}{\partial q}=0$$

sein. Die letzte Bedingung ist mit

$$\varphi_1=\frac{\partial \varphi}{\partial p},\qquad \varphi_2=\frac{\partial \varphi}{\partial q}$$

gleichbedeutend, und die vorletzte liefert dann

$$(3)\qquad H\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\partial q}-K\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2}-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2}=0.$$

Die Einführung von H, K, p und q transformiert diese Gleichung in eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Flächen (x, y, z). Und wenn für bestimmte Annahmen über die Funktion φ das allgemeine Integral dieser Gleichung angegeben werden kann, so läßt sich aus (1) mittels Quadraturen eine Klasse von Flächen (x', y', z') bestimmen, die zu dem durch (2), nämlich

$$(4)\qquad ds'^2=2q\left(d\frac{\partial \varphi}{\partial q}\right)^2+2p\,d\frac{\partial \varphi}{\partial q}\,d\frac{\partial \varphi}{\partial p}+\left(d\frac{\partial \varphi}{\partial p}\right)^2$$

definierten Linienelement gehören. Sie bilden eine vollständige Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen, wenn die Rechnung in demselben Sinne wie im vorigen Paragraphen umkehrbar ist, worauf jedoch nicht aufs neue eingegangen werden soll.

Weingarten hat nun gefunden, daß für

(5) $$\varphi = \frac{p^3}{3} + \beta \frac{p^2}{2} - pq$$

die Relation (3) auf eine integrable Gleichung führt. Es wird

(6) $$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = p^2 + \beta p - q, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial q} = -p$$

(7) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} = 2p + \beta, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \, \partial q} = -1, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0,$$

also

$$H + K(2p + \beta) = 0$$

oder

(8) $$\varrho_1 + \varrho_2 = -2p - \beta.$$

Die hierdurch dargestellte partielle Differentialgleichung erscheint in besonders übersichtlicher Form bei Benutzung komplexer Parameter, die mit den im § 133 eingeführten in unmittelbarem Zusammenhange stehen. Nach S. 347 (6) ist

(9) $$\varrho_1 + \varrho_2 = -2P - \frac{1}{\mathfrak{T}}\left(\frac{\partial}{\partial u} \frac{\mathfrak{G}\frac{\partial P}{\partial u} - \mathfrak{F}\frac{\partial P}{\partial v}}{\mathfrak{T}} + \frac{\partial}{\partial v} \frac{\mathfrak{E}\frac{\partial P}{\partial v} - \mathfrak{F}\frac{\partial P}{\partial u}}{\mathfrak{T}}\right).$$

Setzt man nun in der Formel S. 440 (10)

(10) $$s_0 = u, \qquad s_1 = -\frac{1}{v},$$

so wird

(11) $$d\sigma^2 = \frac{4\,du\,dv}{(u - v)^2},$$

also

(12) $$\mathfrak{E} = \mathfrak{G} = 0, \qquad \mathfrak{F} = \frac{2}{(u - v)^2}$$

und, im zweiten Gliede auf der rechten Seite von (9) vorkommend,

(13) $$\Delta_s^2 P = (u - v)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial u \, \partial v},$$

mithin

(14) $$\varrho_1 + \varrho_2 = -2P - (u - v)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial u \, \partial v}.$$

Da hier $p = P$ ist, so geht aus (8) die partielle Differentialgleichung

(15) $$\frac{\partial^2 P}{\partial u \, \partial v} = \frac{\beta}{(u - v)^2}$$

hervor. Ihr allgemeines Integral ist ohne weiteres angebbar,

(16) $$P = \beta \log (u - v) + \varphi(u) + \psi(v).$$

Für das Linienelement der abgeleiteten Flächen gilt nach (4) die Gleichung

$$(17)\qquad ds'^2 = 2q\,dp^2 - 2p\,dp\,d(p^2 + \beta p - q) + (d(p^2 + \beta p - q))^2$$

$$ds'^2 = 2q\,dp^2 - 2d\frac{p^2}{2}\left(d\left(\frac{p^2}{2} + \beta p - q\right) + d\frac{p^2}{2}\right)$$

$$+ \left(d\left(\frac{p^2}{2} + \beta p - q\right) + d\frac{p^2}{2}\right)^2$$

$$= 2q\,dp^2 - \left(d\frac{p^2}{2}\right)^2 + \left(d\left(\frac{p^2}{2} + \beta p - q\right)\right)^2$$

$$= (2q - p^2)\,dp^2 + \left(d\left(\frac{p^2}{2} + \beta p - q\right)\right)^2.$$

Setzt man also

$$\frac{p^2}{2} + \beta p - q = -u,$$

so erhält man

$$(18)\qquad ds'^2 = du^2 + 2(u + \beta p)dp^2.$$

Für $\beta = 0$ liefert diese Formel, wenn $p\sqrt{2} = v$ gesetzt wird, das Linienelement der Evolute einer Minimalfläche (§ 131).

§ 138.

Die Laplacesche und die Eulersche Differentialgleichung.

Der Ausdruck (5) der Funktion φ kann dadurch weiter verallgemeinert werden, daß auch der dritten Potenz von p noch ein beliebiger konstanter Faktor hinzugefügt wird. Das Linienelement ds' der aufeinander abwickelbaren Flächen enthält dann, nach Reduktion auf eine der Formel (18) entsprechende, im Koeffizienten von dp^2 noch ein Glied mit p^2. In der Gleichung (8) ist der Koeffizient der Größe p von -2 verschieden, und dies bewirkt, daß bei Benutzung von (14) P auch außerhalb des Differentiationszeichens stehen bleibt. Die Konstante β ist hier ohne wesentliche Bedeutung und kann weggelassen werden; wichtig ist, daß die partielle Differentialgleichung (15) durch eine der Form

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial u\,\partial v} = \frac{\alpha P}{(u - v)^2}$$

vertreten wird. Sie ist schon von Euler auf ihre Integrabilität untersucht worden.

Ein natürlicher Weg, die Integration einer Differentialgleichung höherer Ordnung zu versuchen, geht davon aus, zunächst eine Ableitung der gesuchten Funktion als abhängige Variable zu betrachten. Setzt man demgemäß z. B.

$$\frac{\partial P}{\partial v} = P_1$$

und leitet aus (1) eine Differentialgleichung für P_1 her, so bemerkt man sogleich, daß darin auch die Ableitung $\frac{\partial P_1}{\partial u}$ linear auftritt. Die Erörterung soll infolgedessen an die allgemeinere, nach Laplace benannte Differentialgleichung

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} + a\frac{\partial P}{\partial u} + b\frac{\partial P}{\partial v} + cP = 0$$

geknüpft werden, in welcher a, b, c gegebene Funktionen von u und v bedeuten.

Es werde

$$(3) \qquad \frac{\partial P}{\partial v} + aP = P_1$$

gesetzt, so ergibt sich zunächst

$$\frac{\partial P_1}{\partial u} - P\frac{\partial a}{\partial u} + b(P_1 - aP) + cP = 0$$

oder für

$$(4) \qquad \frac{\partial a}{\partial u} + ab - c = h:$$

$$(5) \qquad \frac{\partial P_1}{\partial u} + bP_1 - hP = 0.$$

Wäre nun

$$h = 0,$$

so würde das allgemeine Integral bekannt sein,

$$P_1 = \psi(v)e^{-\int b\,du},$$

und die Substitutionsgleichung (3) würde als gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit der unabhängigen Variablen v behandelt werden können. Ihre allgemeine Lösung ist also durch Quadraturen darstellbar; dabei tritt eine zweite willkürliche Funktion auf, und zwar von u.

Ist h nicht gleich Null, so kann man P aus (5) in (3) einsetzen und erhält für P_1 eine Differentialgleichung derselben Art wie (2)

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 P_1}{\partial u \partial v} + a_1\frac{\partial P_1}{\partial u} + b\frac{\partial P_1}{\partial v} + c_1 P_1 = 0,$$

wo die neuen Koeffizienten folgende Werte haben:

$$(7) \qquad \begin{aligned} a_1 &= a - \frac{1}{h}\frac{\partial h}{\partial v} \\ c_1 &= \frac{\partial b}{\partial v} - h + ab - \frac{b}{h}\frac{\partial h}{\partial v}\cdot \end{aligned}$$

Wäre jetzt P_1 bekannt, so würde man P aus (5) durch Differentiation finden. Nun entspricht der Größe h für die partielle Differentialgleichung (6) die Verbindung

$$h_1 \equiv \frac{\partial a_1}{\partial u} + a_1 b - c_1,$$

d. h.

(8) $$h_1 \equiv h + \frac{\partial a}{\partial u} - \frac{\partial b}{\partial v} - \frac{\partial^2 \log h}{\partial u \partial v}.$$

Dieser Ausdruck wird noch übersichtlicher, wenn gleichzeitig mit h die Größe k eingeführt wird, auf die man kommt, wenn man statt (3) die Substitution

(9) $$\frac{\partial P}{\partial u} + bP = P'$$

anwendet. Da

(10) $$k = \frac{\partial b}{\partial v} + ab - c$$

zu setzen ist, so wird

(11) $$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial u \partial v}.$$

Das allgemeine Integral von (6) und damit auch von (2) kann als bekannt gelten, wenn

$$h_1 = 0$$

ist. Trifft dies nicht zu, so ist noch

$$k_1 \equiv \frac{\partial b}{\partial v} + a_1 b - c_1$$

zu untersuchen, weil für $k_1 = 0$ dasselbe gelten würde. Allein nach (7) wird k_1 gleich h, kann also der Annahme nach nicht Null sein.

Setzt man demgemäß die Transformation in derselben Weise weiter fort, so kommt man auf eine Reihe von Größen $h, h_1, h_2, \ldots$, wo

$$h_2 = 2h_1 - k_1 - \frac{\partial^2 \log h_1}{\partial u \partial v}$$

(12) $$h_2 = 2h_1 - h - \frac{\partial^2 \log h_1}{\partial u \partial v}$$

und allgemein

(13) $$h_n = 2h_{n-1} - h_{n-2} - \frac{\partial^2 \log h_{n-1}}{\partial u \partial v}$$

ist. Für die Gleichung (1), also unter den Annahmen

(14) $$a = 0, \qquad b = 0, \qquad c = -\frac{\alpha}{(u-v)^2},$$

wobei

$$k = h$$

wird, ist es unnötig, noch eine weitere Reihe von Größen hinzuzunehmen, deren Anfangsglied k ist und die bei einer zweiten, mit (9) beginnenden Kette von Transformationen auftreten.

Im besonderen ist für die Werte (14)

$$h = -c = \frac{\alpha}{(u-v)^2}$$

$$h_1 = h + \frac{2}{(u-v)^2} = \frac{\alpha + 2}{(u-v)^2}$$

$$h_2 = h_1 + (h_1 - h) + \frac{2}{(u-v)^2} = h_1 + \frac{4}{(u-v)^2} = \frac{\alpha + 6}{(u-v)^2}$$

. . . .

$$h_n = h_{n-1} + \frac{2n}{(u-v)^2}$$

(15) $$h_n = \frac{\alpha + n(n+1)}{(u-v)^2}.$$

Hiernach sind die Flächen des oben beschriebenen Linienelements immer dann bestimmbar, wenn α der Bedingung

(16) $$\alpha = -n(n+1)$$

genügt, in der n eine positive ganze Zahl bedeutet.

§ 139.

Die Liouvillesche Differentialgleichung.

Eine andere, bei verschiedenen Untersuchungen vorkommende Differentialgleichung zweiter Ordnung, deren Integral ebenfalls allgemein bestimmt werden kann und die die Form

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = f(z)$$

hat, ist die Liouvillesche

(1) $$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = e^z$$

oder

(2) $$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u \partial v} = \lambda.$$

Wir setzen nach Liouville

(3) $$\lambda = \frac{\partial \vartheta}{\partial u}$$

und integrieren, ohne links die Transformation durchzuführen, nach u, so wird

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial v} = \vartheta + f(v),$$

d. h.

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \partial v} = \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + f(v) \frac{\partial \vartheta}{\partial u},$$

und bei nochmaliger Integration nach derselben Variablen:

(4) $$\frac{\partial \vartheta}{\partial v} = \frac{1}{2} \vartheta^2 + f(v) \vartheta + g(v).$$

Diese Gleichung, in der nur die eine unabhängige Variable v explizite vorkommt, ist vom Riccatischen Typus. Ihr allgemeines Integral kann durch Quadraturen ermittelt werden, wenn eine spezielle Lösung $\chi(v)$ bekannt ist. Es sei dann

(5) $$\vartheta = \chi(v) - \frac{1}{\zeta}.$$

Unter Berücksichtigung der Identität

$$\chi'(v) = \frac{1}{2} \chi(v)^2 + f(v) \chi(v) + g(v)$$

geht (4) in

(6) $$\frac{\partial \zeta}{\partial v} + (\chi(v) + f(v)) \zeta - \frac{1}{2} = 0$$

über, eine lineare Differentialgleichung, deren allgemeines Integral ohne weiteres angebbar ist. Die auftretende willkürliche Konstante ist durch eine Funktion von u zu ersetzen. Schreibt man

(7) $$\frac{1}{2} \int e^{\int (\chi(v) + f(v)) dv} dv = \psi(v),$$

so wird

$$\zeta = \frac{\varphi(u) + \psi(v)}{2 \psi'(v)},$$

also

(8) $$\vartheta = \chi(v) - \frac{2 \psi'(v)}{\varphi(u) + \psi(v)}.$$

Die Funktion ψ vertritt die vorher eingeführte unbestimmte Funktion f.

Nun handelt es sich aber nicht um ϑ, sondern um $\lambda \equiv \frac{\partial \vartheta}{\partial u}$: Man braucht also die spezielle Lösung $\chi(v)$ garnicht zu kennen, sondern erhält sofort

(9) $$\lambda = \frac{2 \varphi'(u) \psi'(v)}{(\varphi(u) + \psi(v))^2}.$$

Daß die beiden Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(v)$ ganz willkürlich angenommen werden dürfen, wie der Begriff des allgemeinen Integrals der

Gleichung (1) es fordert, folgt unmittelbar durch Verifikation der Lösung (9).

Ist allgemeiner die Differentialgleichung

(10) $$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = a e^{bz}$$

oder, für $e^{bz} = \lambda$,

(11) $$\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u \partial v} = a b \lambda$$

gegeben, so heißt das Integral

(12) $$\lambda = \frac{2 \varphi'(u) \psi'(v)}{a b (\varphi(u) + \psi(v))^2}.$$

Ein Zusammenhang zwischen der Liouvilleschen Differentialgleichung und dem hier vorliegenden Problem ergibt sich vermittelst der Annahme

(13) $$\varrho_1 + \varrho_2 = \frac{2}{b}(e^{bP} - 1) - 2P.$$

Die aus ihr hervorgehende partielle Differentialgleichung

(14) $$(u - v)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} = \frac{2}{b}(1 - e^{bP})$$

wird nämlich durch die Substitution

(15) $$P = \frac{2}{b} \log (u - v) + z$$

in

(16) $$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = -\frac{2}{b} e^{bz}$$

übergeführt. Und andererseits ist (13) für $P = p$ ein Spezialfall der Gleichung (3) auf S. 448, nämlich unter den Voraussetzungen

(17) $$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} = 2p - \frac{2}{b}(e^{bp} - 1), \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q} = -1, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0,$$

vermöge deren

(18) $$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = p^2 + \frac{2}{b} p - \frac{2}{b^2} e^{bp} - q, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial q} = -p$$

gesetzt werden kann.

Das Linienelement der zu (13) gehörenden Flächen (x', y', z') bestimmt sich nach einer einfachen Transformation, die der auf S. 450 ausgeführten genau entspricht, durch die Formel

(19) $$ds'^2 = du^2 + 2\left(u + \frac{2}{b} p - \frac{2}{b^2} e^{bp}\right) dp^2.$$

§ 140.

Zusammenhang der sphärischen Abbildung mit der Theorie der Weingartenschen Flächen.

Die Ermittelung einer vollständigen Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen knüpfte nach dem Weingartenschen Satze der Theorie der Evoluten an die Integration einer partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\varrho_2 = \lambda(\varrho_1)$$

an. Zur Lösung derselben Aufgabe kann man nach Weingarten auch ein indirektes Verfahren anwenden, das dem zuletzt auseinandergesetzten insofern ähnelt, als es ebenfalls von der sphärischen Abbildung einer Fläche ausgeht.

Der Weingartensche Satz stützte sich auf die Differentialgleichung S. 380 (12)

$$(1) \qquad \frac{\partial \log \sqrt{G^*}}{\partial p} = \frac{\varrho_1}{\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_2)} \frac{\partial \varrho_2}{\partial p}.$$

Diese und die ihr entsprechende

$$(2) \qquad \frac{\partial \log \sqrt{E^*}}{\partial q} = \frac{\varrho_2}{\varrho_1(\varrho_2 - \varrho_1)} \frac{\partial \varrho_1}{\partial q}$$

sind mit der zweiten und dritten Fundamentalgleichung identisch. p und q bedeuten die Hauptparameter, und diese Annahme soll, abweichend von den Bezeichnungen in den Paragraphen 136—139, von nun an wieder festgehalten werden.

Gleichungen von der Form (1, 2) müssen auch für die Fundamentalgrößen der Einheitskugel gelten. Sie können entweder aus S. 341 (6) oder einfacher, nachdem die obigen Formeln einmal bewiesen sind, mit Hilfe der Beziehungen S. 226 (25)

$$\mathfrak{E} = (n_1 + n_2)L - n_1 n_2 E, \ldots$$

abgeleitet werden.

Da für die Hauptparameter

$$F^* = 0, \qquad M^* = 0$$

ist, so wird

$$(3) \qquad \mathfrak{F}^* = 0.$$

Die sphärischen Bilder der Krümmungslinien sind aufeinander senkrecht (vgl. S. 254).

Die Formeln für die beiden von Null verschiedenen Fundamentalgrößen werden bei Benutzung von

$$L^* = E^* n_1, \qquad N^* = G^* n_2:$$

(4) $$\mathfrak{E}^* = n_1^2 E^*, \qquad \mathfrak{G}^* = n_2^2 G^*$$
oder
(5) $$E^* = \varrho_1^2 \mathfrak{E}^*, \qquad G^* = \varrho_2^2 \mathfrak{G}^*.$$
Mittels dieser Ausdrücke gehen aus (1) und (2) die Gleichungen
(6) $$\frac{\partial \log \sqrt{\mathfrak{G}^*}}{\partial p} = \frac{1}{\varrho_1 - \varrho_2} \frac{\partial \varrho_2}{\partial p}$$
(7) $$\frac{\partial \log \sqrt{\mathfrak{E}^*}}{\partial q} = \frac{1}{\varrho_2 - \varrho_1} \frac{\partial \varrho_1}{\partial q}$$
hervor.

Ist der eine der beiden Hauptkrümmungsradien eine Funktion des anderen, also die Fläche eine Weingartensche, so kann man nach (1, 2)
(8) $$ds^2 = e^{2\int \frac{\varrho_2 d\varrho_1}{\varrho_1(\varrho_2 - \varrho_1)}} dp^2 + e^{2\int \frac{\varrho_1 d\varrho_2}{\varrho_2(\varrho_1 - \varrho_2)}} dq^2$$
setzen, und nach (6, 7):
(9) $$d\sigma^2 = e^{2\int \frac{d\varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_1}} dp^2 + e^{2\int \frac{d\varrho_2}{\varrho_1 - \varrho_2}} dq^2.$$

Von den vier Funktionen einer Variablen, als welche die Fundamentalgrößen E^*, G^*, $\mathfrak{E}^*$, $\mathfrak{G}^*$ erscheinen, soll nun $\mathfrak{E}^*$ bevorzugt werden. Es sei
(10) $$\sqrt{\mathfrak{E}^*} \equiv e^{\int \frac{d\varrho_1}{\varrho_2 - \varrho_1}} = \frac{1}{k}.$$
ϱ_1 und ϱ_2 werden dann Funktionen von k. Setzt man
(11) $$\varrho_1 = \vartheta(k),$$
so ist infolge von (10)
(12) $$\varrho_2 = \vartheta(k) - k\,\vartheta'(k).$$
Die Relation zwischen ϱ_1 und ϱ_2, die eine bestimmte Klasse Weingartenscher Flächen charakterisiert, würde aus (11) und (12) durch Elimination von k folgen. Es ist noch
(13) $$\mathfrak{G}^* = \frac{1}{\vartheta'(k)^2},$$
also
(14) $$d\sigma^2 = \frac{dp^2}{k^2} + \frac{dq^2}{\vartheta'(k)^2}.$$

Angenommen, es sei umgekehrt das Quadrat des Linienelements der Einheitskugel in dieser Form gegeben, d. h. X, Y, Z als Funktionen zweier Variablen p, q so bestimmt, daß die Gleichung (14) gilt. Die Gaußschen Gleichungen für X, Y, Z (S. 336 (11))
$$\frac{\partial^2 X}{\partial p \partial q} - \mathfrak{J}_1' \frac{\partial X}{\partial p} - \mathfrak{J}_2' \frac{\partial X}{\partial q} = 0, \ldots$$
lassen sich dann als Integrabilitätsbedingungen schreiben:

$$(15)\qquad \frac{\partial}{\partial q}\left(\vartheta(k)\frac{\partial X}{\partial p}\right)=\frac{\partial}{\partial p}\left((\vartheta(k)-k\vartheta'(k))\frac{\partial X}{\partial q}\right),\ \ldots$$

Setzt man also

$$\vartheta(k)=\varrho_1,\qquad \vartheta(k)-k\vartheta'(k)=\varrho_2$$

$$(16)\qquad -\varrho_1\frac{\partial X}{\partial p}=\frac{\partial x}{\partial p},\qquad -\varrho_2\frac{\partial X}{\partial q}=\frac{\partial x}{\partial q}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

so können die Größen x, y, z durch Quadraturen gefunden werden. Betrachtet man sie als Koordinaten einer Fläche, so bedeuten für diese die Größen X, Y, Z die Richtungskosinus der Normale. Denn es ist der Annahme nach $\Sigma X^2=1$, also auch

$$\sum X\frac{\partial X}{\partial p}=0,\qquad \sum X\frac{\partial X}{\partial q}=0,$$

und demnach aus (16)

$$\sum X\frac{\partial x}{\partial p}=0,\qquad \sum X\frac{\partial x}{\partial q}=0.$$

Dieselben Gleichungen (16) lehren, daß infolge von $\mathfrak{F}=0$ auch $F=0$, $M=0$ wird, d. h. daß p und q die Hauptparameter der Fläche (x, y, z) bedeuten. Die Gleichungen (16) sind die Formeln von Rodrigues, in denen ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungsradien waren. Und zwar sind diese Größen hier Funktionen einer Variablen. Demnach hängt die Bestimmung einer Weingartenschen Fläche mit der Transformation des Linienelements der Einheitskugel in die durch (14) definierte Form eng zusammen.

Ist man imstande, diese Transformation für eine bestimmte Funktion ϑ so auszuführen, daß sie zwei willkürliche Funktionen enthält, so kennt man damit die allgemeine Darstellung einer bestimmten Klasse Weingartenscher Flächen. Mit dieser stand wieder die Ermittelung einer vollständigen Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen in genauem Zusammenhange. Und da für die Koordinaten der Evolute nach S. 379 (2) und S. 380 (8) die Gleichungen

$$(17)\qquad \frac{\partial x_1}{\partial p}=X\frac{\partial\varrho_1}{\partial p}\equiv X\vartheta'(k)\frac{\partial k}{\partial p}$$

$$(18)\qquad \frac{\partial x_1}{\partial q}=\left(1-\frac{\varrho_1}{\varrho_2}\right)\frac{\partial x}{\partial q}+X\frac{\partial\varrho_1}{\partial q}\equiv k\vartheta'(k)\frac{\partial X}{\partial q}+X\vartheta'(k)\frac{\partial k}{\partial q}$$

gelten, die der Bedingung der Integrabilität genügen, so bedarf es zur direkten Darstellung von x_1, y_1, z_1 aus X, Y, Z ebenfalls nur der Quadraturen. Das Quadrat des Linienelements wird

$$(19)\qquad ds_1^2=\vartheta'(k)^2dk^2+k^2dq^2.$$

§ 141.

Geodätische Ellipsen und Hyperbeln auf der Einheitskugel.

Die Transformation von $d\sigma^2$ in die Form (14) ist für ein bestimmtes ϑ in dem eben gekennzeichneten Sinne durchführbar, wenn die Punkte der Einheitskugel in der allgemeinsten Weise auf geodätische Ellipsen und Hyperbeln (§ 90) bezogen werden. Von einer bekannten Darstellung, etwa

$$(1)\qquad \begin{aligned} X &= \sin u \cos v \\ Y &= \sin u \sin v \\ Z &= \cos u \end{aligned}$$

ausgehend, hat man zu dem Ende die partiellen Differentialgleichungen

$$\Delta_e^1 u' = 1, \qquad \Delta_e^1 v' = 1$$

allgemein zu integrieren und von u und v zu $\frac{u'+v'}{2}$ und $\frac{u'-v'}{2}$ überzugehen.

Aus (1) folgt

$$(2)\qquad d\sigma^2 = du^2 + \sin^2 u\, dv^2,$$

d. h.

$$\mathfrak{E} = 1, \qquad \mathfrak{F} = 0, \qquad \mathfrak{G} = \sin^2 u, \qquad \mathfrak{T}^2 = \sin^2 u,$$

mithin ist das allgemeine Integral der Gleichung

$$(3)\qquad \left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{\sin^2 u}\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 = 1$$

zu ermitteln. Man braucht dazu nur eine Partikularlösung mit einer willkürlichen Konstanten α zu kennen. Denn da u' nicht außerhalb des Differentiationszeichens vorkommt, so kann eine zweite Konstante α' additiv hinzugefügt werden; und aus dem so entstehenden vollständigen Integral ergibt sich das allgemeine dadurch, daß α' gleich einer willkürlichen Funktion von α gesetzt und der entstehenden Gleichung ihre partielle Ableitung nach α an die Seite gestellt wird. Nimmt man $\frac{\partial u'}{\partial v} = \alpha$ an, so findet man sofort

$$u' = \int \frac{\sqrt{\sin^2 u - \alpha^2}}{\sin u}\, du + \alpha v + \alpha'$$

als vollständiges, also

$$(4)\qquad \begin{aligned} u' &= \int \frac{\sqrt{\sin^2 u - \alpha^2}}{\sin u}\, du + \alpha v + \varphi(\alpha) \\ 0 &= \int \frac{-\alpha}{\sin u \sqrt{\sin^2 u - \alpha^2}}\, du + v + \varphi'(\alpha) \end{aligned}$$

als allgemeines Integral. Dazu tritt in gleicher Weise

$$(5)\qquad \begin{aligned} v' &= \int \frac{\sqrt{\sin^2 u - \beta^2}}{\sin u}\, du + \beta v + \psi(\beta) \\ 0 &= \int \frac{-\beta}{\sin u \sqrt{\sin^2 u - \beta^2}}\, du + v + \psi'(\beta). \end{aligned}$$

Nun wären aus den neun Gleichungen (1), (4), (5) und

$$(6)\qquad \frac{u' + v'}{2} = p, \qquad \frac{u' - v'}{2} = q$$

die Parameter u, v, u', v' und die beiden Hilfsvariablen α und β zu entfernen, um X, Y, Z durch p und q auszudrücken. Diese Elimination ist zwar nicht allgemein möglich, doch läßt sich das Gesamtsystem von Gleichungen noch vereinfachen. Multipliziert man nämlich die zweite Gleichung (4) mit $-\alpha$ und addiert zur ersten, so kann man diese durch

$$u' = \int \left(\sqrt{\sin^2 u - \alpha^2} + \frac{\alpha^2}{\sqrt{\sin^2 u - \alpha^2}}\right) \frac{du}{\sin u} + \varphi(\alpha) - \alpha\varphi'(\alpha)$$

ersetzen, findet also

$$(7)\qquad p + q = \arcsin \frac{\sqrt{\sin^2 u - \alpha^2}}{\sqrt{1 - \alpha^2}} + \varphi(\alpha) - \alpha\varphi'(\alpha)$$

und entsprechend

$$(8)\qquad p - q = \arcsin \frac{\sqrt{\sin^2 u - \beta^2}}{\sqrt{1 - \beta^2}} + \psi(\beta) - \beta\psi'(\beta).$$

Hier kommt v nicht mehr vor, und diese Größe fällt auch heraus, wenn man die zweiten Gleichungen (4) und (5) durch Subtraktion verbindet:

$$(9)\qquad \varphi'(\alpha) - \psi'(\beta) = \arcsin \frac{\sqrt{\sin^2 u - \alpha^2}}{\sin u \sqrt{1 - \alpha^2}} - \arcsin \frac{\sqrt{\sin^2 u - \beta^2}}{\sin u \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Zur Darstellung von x, y, z oder wenigstens von x_1, y_1, z_1 bedarf es noch der Kenntnis von k und $\vartheta(k)$. Für geodätische Ellipsen und Hyperbeln als Koordinatenlinien ist (§ 90)

$$(10)\qquad d\sigma^2 = \frac{dp^2}{\sin^2 \frac{\omega}{2}} + \frac{dq^2}{\cos^2 \frac{\omega}{2}},$$

mithin wird

$$(11)\qquad k = \sin \frac{\omega}{2}$$

$$(12)\qquad \vartheta'(k) = \sqrt{1 - k^2}$$

$$(13)\qquad \vartheta(k) = \frac{1}{2}\left(\arcsin k + k\sqrt{1 - k^2}\right).$$

Der Ausdruck (10) ist a. a. O. aus der Form

$$\frac{du'^2 + 2\cos\omega\, du'\, dv' + dv'^2}{\sin^2\omega}$$

für das Quadrat des Linienelements abgeleitet worden. Nun folgt aus der ersten Gleichung (4) unter Berücksichtigung der zweiten

$$du' = \frac{\sqrt{\sin^2 u - \alpha^2}}{\sin u}\, du + \alpha\, dv,$$

und entsprechend aus (5)

$$dv' = \frac{\sqrt{\sin^2 u - \beta^2}}{\sin u}\, du + \beta\, dv,$$

woraus weiter nach (2)

$$d\sigma^2 = \frac{\sin^4 u(du'^2 + dv'^2) - 2\sin^2 u\left(\alpha\beta + \sqrt{\sin^2 u - \alpha^2}\sqrt{\sin^2 u - \beta^2}\right)du'\, dv'}{\left(\beta\sqrt{\sin^2 u - \alpha^2} - \alpha\sqrt{\sin^2 u - \beta^2}\right)^2},$$

also

$$\text{(14)} \qquad \cos\omega = -\frac{\alpha\beta + \sqrt{\sin^2 u - \alpha^2}\sqrt{\sin^2 u - \beta^2}}{\sin^2 u}.$$

Mittels (7), (8), (9) wären u, α und β zu eliminieren.

Die Gleichungen (11, 12) des vorigen Paragraphen werden hier

$$\text{(15)} \qquad \begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{1}{2}\left(\arcsin k + k\sqrt{1 - k^2}\right) \\ \varrho_2 &= \frac{1}{2}\left(\arcsin k - k\sqrt{1 - k^2}\right) \end{aligned}$$

oder auch, wegen $k = \sin\frac{\omega}{2}$,

$$\text{(16)} \qquad \begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{\omega + \sin\omega}{4} \\ \varrho_2 &= \frac{\omega - \sin\omega}{4}. \end{aligned}$$

Die Klasse Weingartenscher Flächen, die mit dem Ausdruck

$$\text{(17)} \qquad d\sigma^2 = \frac{dp^2}{k^2} + \frac{dq^2}{1 - k^2}$$

zusammenhängt, ist also durch die Gleichung

$$\text{(18)} \qquad 2(\varrho_1 - \varrho_2) = \sin 2(\varrho_1 + \varrho_2)$$

charakterisiert.

Das Linienelement der zugehörigen Evoluten läßt sich durch die Formel

$$\text{(19)} \qquad ds_1^2 = (1 - k^2)\, dk^2 + k^2 dq^2$$

darstellen.

§ 142.

Die erste Grundaufgabe der Biegungstheorie im Zusammenhange mit einer partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung.

Die komplizierte Form (18) der Gleichung $\varrho_2 = \lambda(\varrho_1)$ hat auf den ersten Anblick etwas Überraschendes; man würde auf direktem Wege nicht darauf gekommen sein, gerade diese partielle Differentialgleichung auf ihre Integrabilität zu prüfen. Allein eine genauere Untersuchung ergibt einen Zusammenhang der durch sie bestimmten Flächen mit solchen, die auf eine spezielle Fläche 2. Grades, nämlich ein Rotationsparaboloid, abwickelbar sind. Die Darlegung dieses interessanten Ergebnisses würde freilich die Grenzen, die diese Grundlagen der Differentialgeometrie sich stecken müssen, ebenso überschreiten wie eine ins einzelne gehende Diskussion und Vergleichung der vorher betrachteten Flächenklassen oder auch nur ihrer Linienelemente. Im Anschluß an die Resultate der Paragraphen 132—141 soll hier nur noch die Frage behandelt werden: Welchen analytischen Charakter hat die Aufgabe, sämtliche auf eine gegebene Fläche abwickelbaren Flächen zu finden?

Die speziellen Klassen dieser Art, wie sie im Vorhergehenden nach Weingarten bestimmt worden sind, hingen jedesmal von einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung ab. Es zeigt sich, daß dasselbe allgemein zutrifft. Auf eine Erörterung der Versuche, die Differentialgleichung nach bekannten Methoden zu integrieren, sowie der verschiedenen Formen, in die man die Gleichung setzen kann, muß jedoch hier ebenfalls verzichtet werden.

Für die Formulierung — nicht für die Durchführung — der Aufgabe ist die Kenntnis einer speziellen Fläche unwesentlich; worauf es ankommt, ist allein der Ausdruck des Linienelementes. Das Problem lautet also: Es sollen auf die allgemeinste Weise x, y, z bestimmt werden, wenn E, F, G gegeben sind. In dieser Form ist die Aufgabe schon auf S. 123 ausgesprochen worden. Doch sind die dort stehenden drei simultanen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und zweiten Grades für die weitere Behandlung ungeeignet. Es handelt sich vielmehr darum, zunächst eine einzige Differentialgleichung mit einer einzigen Unbekannten aufzustellen.

Nun folgten nach § 61 aus den Ausdrücken der Fundamentalgrößen die drei Gaußschen Gleichungen

$$x_{11} = LX, \qquad x_{12} = MX, \qquad x_{22} = NX,$$

und ferner ist nach dem Gaußschen Satze

$$\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = K,$$

wo K nur von E, F, G abhängt. Eliminiert man die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung, so erhält man

$$\frac{1}{T^2}(x_{11}x_{22} - x_{12}^2) = KX^2.$$

Hierin ist der erste Faktor der rechten Seite eine Biegungsinvariante, die linke Seite eine Biegungskovariante der Funktion x. Aber auch der zweite Faktor der rechten Seite läßt sich als solche darstellen, denn nach S. 338 (7) ist

$$X^2 = 1 - \Delta^1 x.$$

Infolgedessen ergibt sich für x die partielle Differentialgleichung

(1) $$\frac{1}{T^2}(x_{11}x_{22} - x_{12}^2) = K(1 - \Delta^1 x)$$

oder ausgeschrieben

(2) $$\frac{1}{T^2}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - J_1\frac{\partial x}{\partial u} - J_2\frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} - J_1'\frac{\partial x}{\partial u} - J_2'\frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} - J_1'\frac{\partial x}{\partial u} - J_2'\frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - J_1''\frac{\partial x}{\partial u} - J_2''\frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix} =$$
$$K\left(1 - \frac{1}{T^2}\left(G\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + E\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right)\right).$$

Sie muß auch für y und z gelten. Der Herleitung nach erscheint sie aber nur als notwendige Bedingung für die kartesischen Koordinaten bei gegebenem Wertsystem E, F, G.

Um eine deutlichere Einsicht in ihre Bedeutung zu gewinnen, betrachten wir mit Weingarten das Abwickelungsproblem als durch die Gleichung

(3) $$dx^2 + dy^2 + dz^2 = E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2$$

charakterisiert, die mit den drei Gleichungen S. 123 (1) inhaltlich übereinstimmt. Die Koeffizienten der quadratischen Differentialform rechts sind gegeben; x, y, z sollen auf die allgemeinste Weise so bestimmt werden, daß die Gleichung identisch besteht. Schreibt man sie in der Form

(4) $$dy^2 + dz^2 = E_x du^2 + 2F_x du\,dv + G_x dv^2,$$

wo

(5) $$E_x = E - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, \qquad F_x = F - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \qquad G_x = G - \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2,$$

und betrachtet die linke und damit auch die rechte Seite als Quadrat des Linienelements einer Ebene, so sieht man, daß das aus den Größen E_x, F_x, G_x gebildete Krümmungsmaß K_x gleich Null sein muß. Hier scheint es, als ob in dem Ausdruck dritte Ableitungen von x auf-

treten müßten, denn die Gaußsche Invariante einer quadratischen Differentialform enthält Ableitungen zweiter Ordnung der Koeffizienten. Aber aus der allein vorkommenden Verbindung dieser Ableitungen

$$2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}$$

heben sich die dritten Differentialquotienten weg, und die Gleichung $K_x = 0$ erweist sich als identisch mit der partiellen Differentialgleichung (2).

Genügt nun x dieser Bedingung, so handelt es sich weiter um die Bestimmung von y und z. Der Gleichung (4) gemäß, aber abgesehen von den hier benutzten Bezeichnungen kann die Hilfsaufgabe so ausgesprochen werden: Gegeben ist das Quadrat des Linienelements einer Fläche vom Krümmungsmaß Null in der Form

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2;$$

die Variablen u', v' sollen als Funktionen von u und v so bestimmt werden, daß $ds^2 = du'^2 + dv'^2$ wird.

Im Anschluß an die allgemeine Theorie der isometrischen Kurvennetze (§ 74) werde die gegebene quadratische Differentialform A in die konjugiert-komplexen Faktoren zerlegt und die integrierenden Faktoren der beiden so entstehenden linearen Differentialformen mit $\mu \pm \nu i$ bezeichnet, sodaß man

$$(6) \quad \begin{aligned} (\mu + \nu i)\left(\sqrt{E} du + \frac{F + i\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} dv\right) &= d(u' + v' i) \\ (\mu - \nu i)\left(\sqrt{E} du + \frac{F - i\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} dv\right) &= d(u' - v' i), \end{aligned}$$

d. h. nach ausgeführter Multiplikation

$$E du^2 + 2F du dv + G dv^2 = \frac{du'^2 + dv'^2}{\mu^2 + \nu^2}$$

setzen kann. Solcher integrierenden Faktoren gibt es unendlichviele. Soll die geforderte Transformation möglich sein, so muß ein Faktor existieren, für den

$$\mu^2 + \nu^2 = 1$$

ist. Die linke Seite ist das Quadrat des absoluten Betrages von $\mu + \nu i$, mithin muß $\mu + \nu i$ die Form

$$\cos\varphi + i \sin\varphi \equiv e^{\varphi i}$$

haben, und $\mu - \nu i$ dann gleich $e^{-\varphi i}$ sein. Für

$$(7) \quad \varphi i = \psi,$$

$$(8) \qquad \sqrt{E} = a, \qquad \frac{F \pm i\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E}} = \begin{cases} b \\ b' \end{cases}$$

haben die Gleichungen (6) die Form

$$(9) \qquad \begin{aligned} e^{\psi}(a\,du + b\,dv) &= d(u' + v'i) \\ e^{-\psi}(a\,du + b'dv) &= d(u' - v'i). \end{aligned}$$

Die Bedingungen für ψ sind

$$\frac{\partial(ae^{\psi})}{\partial v} = \frac{\partial(be^{\psi})}{\partial u}$$

$$\frac{\partial(ae^{-\psi})}{\partial v} = \frac{\partial(b'e^{-\psi})}{\partial u}$$

oder entwickelt

$$a\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial a}{\partial v} = b\,\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial b}{\partial u}$$

$$a\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial a}{\partial v} = b'\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial b'}{\partial u}.$$

Werden sie nach $\frac{\partial \psi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \psi}{\partial v}$ aufgelöst, dann $\frac{\partial^2 \psi}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial v\,\partial u}$ gesetzt, so ergibt sich die Gleichung $K = 0$ wieder. Und wenn diese, wie bereits angenommen, erfüllt ist, so erhält man zuerst ψ aus

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial u}du + \frac{\partial \psi}{\partial v}dv,$$

hierauf u' und v' aus (9) durch Quadraturen.

Damit ist für unseren Fall die Aufgabe gelöst, wenn E, F, G durch E_x, F_x, G_x ersetzt und $u' = y$, $v' = z$ geschrieben wird. Allein die Realität erfordert noch das Hinzutreten von Ungleichheitsbedingungen. Es könnte nämlich bei der Lösung der Hilfsaufgabe vorkommen, daß $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ sich in die Form $du'^2 - dv'^2$ setzen läßt, wo u' und v' nach wie vor reelle Funktionen von u und v bedeuten. Dann wäre bei der Anwendung auf das hier betrachtete Problem z gleich $v'i$, also imaginär. In diesem Falle könnte man

$$\lambda\left(\sqrt{E}\,du + \frac{F + \sqrt{F^2 - EG}}{\sqrt{E}}dv\right) = d(u' + v')$$

$$\lambda'\left(\sqrt{E}\,du + \frac{F - \sqrt{F^2 - EG}}{\sqrt{E}}dv\right) = d(u' - v'),$$

d. h.

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = \frac{du'^2 - dv'^2}{\lambda\lambda'}$$

setzen, für λ und λ' als reelle Funktionen von u und v. Unter den integrierenden Faktoren muß es dann solche geben, für die

$$\lambda\lambda' = 1$$

wird, also

$$\lambda = e^{\psi}, \qquad \lambda' = e^{-\psi}$$

gesetzt werden kann; die Funktion ψ ist ebenfalls reell. Des Weiteren verläuft die Untersuchung genau wie vorher, und namentlich kommt man wieder auf die Differentialgleichung (2).

Soll nun bei der Anwendung diese Möglichkeit ausgeschlossen werden, so ist die Festsetzung nötig, daß die Form

$$E_x du^2 + 2F_x du dv + G_x dv^2$$

beständig positiv sei, daß also die Bedingungen

$$E - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 > 0$$

$$\left(E - \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\right)\left(G - \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2\right) - \left(F - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 > 0$$

oder

(10) $$\Delta^1 x < 1$$

gelten. Die erste von ihnen kann nach der Bedeutung, die E in der Flächentheorie durchgängig hat, als selbstverständlich betrachtet werden, die zweite aber enthält eine wirkliche Einschränkung der brauchbaren Lösungen.

Die Differentialgleichung (2), von der die erste Grundaufgabe der Biegungstheorie wesentlich abhängt, ist linear in den Ableitungen zweiter Ordnung und der Verbindung $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)^2$; sie gehört also zu der Monge-Ampèreschen Klasse partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

XI. Abschnitt.

Allgemeine Theorie der Kurven und Kurvennetze auf einer Fläche.

§ 143.

Doppelverhältnis zweier Tangentenpaare.

Die früher gewonnenen Ergebnisse über Flächenkurven sollen in diesem Abschnitt nach verschiedenen Seiten hin ergänzt und erweitert werden.

Wir beginnen mit einigen elementaren Fragen, die auch schon im II. Abschnitt hätten besprochen werden können. Allein die Theorie der Kurven auf Flächen ist dort nur so weit behandelt worden, wie es für den Aufbau der Theorie der Flächen selbst erfordert wird, und für diesen Zweck sind die neuen Aufgaben von geringerer Wichtigkeit. Auch wird ihre Lösung erst mittels der Theorie der Invarianten binärer Formen hinreichend deutlich.

Es sei (S. 44)

$$(1) \qquad \Lambda \equiv l_{11}\,du^2 + 2l_{12}\,du\,dv + l_{22}\,dv^2 = 0$$
$$(l \equiv l_{11}l_{22} - l_{12}^2 < 0)$$

je nach der Auffassung die Bestimmungsgleichung eines Tangentenpaares oder die Differentialgleichung eines Kurvennetzes. Nimmt man noch eine solche Gleichung

$$(2) \qquad \mathrm{M} \equiv m_{11}\,du^2 + 2m_{12}\,du\,dv + m_{22}\,dv^2 = 0$$
$$(m \equiv m_{11}m_{22} - m_{12}^2 < 0)$$

an, so kann man nach dem Doppelverhältnis der beiden durch (1) und (2) bestimmten Tangentenpaare (l_1, l_2), (m_1, m_2) fragen, die durch den Flächenpunkt (u, v) hindurchgehen. Es wird durch die Formel

$$(3) \qquad n = \frac{\sin(l_1, m_1)}{\sin(m_1, l_2)} : \frac{\sin(l_1, m_2)}{\sin(m_2, l_2)}$$

definiert. Dabei soll, behufs Anwendung der Ausdrücke im § 11, jeder der hier vorkommenden Winkel durch Drehung in positivem Sinne entstehen. Die positiven Richtungen der vier Strahlen sind insofern unwesentlich, als schon die einfachen Sinusquotienten, in denen einer und derselbe Strahl, z. B. m_1, enthalten ist, von der Richtung dieses Strahles nicht abhängen.

30*

Nach dem Verhältnis $\frac{dv}{du}$ aufgelöst, mögen die beiden gegebenen Gleichungen die Wurzelpaare

$$\frac{dv_1}{du_1} = \lambda_1, \qquad \frac{dv_2}{du_2} = \lambda_2$$
$$\frac{\delta v_1}{\delta u_1} = \mu_1, \qquad \frac{\delta v_2}{\delta u_2} = \mu_2$$

liefern.

Wendet man nun die Formel S. 35 (12) an, so hat man z. B.

$$\sin(l_1, m_1) = \frac{T(du_1\,\delta v_1 - dv_1\,\delta u_1)}{ds_1\,\delta s_1},$$

und ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die übrigen Sinus. Die Einführung der Werte in (3) liefert

(4) $$n = \frac{du_1\,\delta v_1 - dv_1\,\delta u_1}{\delta u_1\,dv_2 - \delta v_1\,du_2} : \frac{du_1\,\delta v_2 - dv_1\,\delta u_2}{\delta u_2\,dv_2 - \delta v_2\,du_2},$$

d. h.

(5) $$n = \frac{\mu_1 - \lambda_1}{\lambda_2 - \mu_1} : \frac{\mu_2 - \lambda_1}{\lambda_2 - \mu_2}$$

oder

$$n = \frac{(\lambda_1 - \mu_1)(\lambda_2 - \mu_2)}{(\lambda_2 - \mu_1)(\lambda_1 - \mu_2)}$$
$$= \frac{\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 - (\lambda_1\mu_2 + \lambda_2\mu_1)}{\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 - (\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2)}.$$

Hieraus erhält man weiter

(6) $$\frac{1+n}{1-n} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2) - 2(\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\mu_1 - \mu_2)}.$$

Nun ist vermöge (1) und (2)

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{2l_{12}}{l_{22}}, \qquad \lambda_1\lambda_2 = \frac{l_{11}}{l_{22}}, \qquad (\lambda_1 - \lambda_2)^2 = \frac{4(l_{12}^2 - l_{11}l_{22})}{l_{22}^2}$$
$$\mu_1 + \mu_2 = -\frac{2m_{12}}{m_{22}}, \qquad \mu_1\mu_2 = \frac{m_{11}}{m_{22}}, \qquad (\mu_1 - \mu_2)^2 = \frac{4(m_{12}^2 - m_{11}m_{22})}{m_{22}^2},$$

mithin

(7) $$\left(\frac{1+n}{1-n}\right)^2 = \frac{(l_{22}m_{11} - 2l_{12}m_{12} + l_{11}m_{22})^2}{4(l_{11}l_{22} - l_{12}^2)(m_{11}m_{22} - m_{12}^2)}.$$

Setzt man allgemein

(8) $$\frac{l_{22}m_{11} - 2l_{12}m_{12} + l_{11}m_{22}}{l_{11}l_{22} - l_{12}^2} = H_{lm}$$

(9) $$\frac{m_{11}m_{22} - m_{12}^2}{l_{11}l_{22} - l_{12}^2} = K_{lm}$$

(vgl. S. 160 und 213), so kann man schreiben:

$$(10)\qquad \left(\frac{1+n}{1-n}\right)^2 = \frac{H_{lm}^2}{4K_{lm}}.$$

Die geometrische Größe auf der linken Seite wird also durch die beiden absoluten simultanen Invarianten des Formenpaares (Λ, M) dargestellt.

Von besonderem Interesse ist die Annahme

$$n = -1;$$

dann bilden $l_1, \ldots m_2$ ein System von vier harmonischen Strahlen, der Art, daß l_1 und l_2, m_1 und m_2 einander zugeordnet sind. Die Bedingung hierfür ist

$$(11)\qquad l_{22}m_{11} - 2l_{12}m_{12} + l_{11}m_{22} = 0$$

oder

$$(12)\qquad H_{lm} = 0.$$

Die Forderung $n = 0$ würde

$$(13)\qquad H_{lm}^2 - 4K_{lm} = 0$$

geben. Daß diese Bedingung mit der Resultante der beiden Gleichungen (1) und (2) inbezug auf $\frac{dv}{du}$ übereinstimmt, drückt aus, daß für $n = 0$ ein Strahl des einen Paares mit einem Strahle des anderen zusammenfallen muß.

Soll ein drittes Tangentenpaar

$$\Gamma \equiv c_{11}du^2 + 2c_{12}du\,dv + c_{22}dv^2 = 0$$

zu den beiden gegebenen harmonisch sein, so müssen nach (11) die Beziehungen

$$l_{22}c_{11} - 2\,l_{12}\,c_{12} + l_{11}\,c_{22} = 0$$
$$m_{22}c_{11} - 2m_{12}c_{12} + m_{11}c_{22} = 0$$

gleichzeitig gelten. Sie bestimmen die Verhältnisse $c_{11} : c_{12} : c_{22}$. Die Gleichung des gesuchten Tangentenpaares wird

$$(14)\qquad \begin{vmatrix} l_{22} & l_{12} & l_{11} \\ m_{22} & m_{12} & m_{11} \\ du^2 & -du\,dv & dv^2 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} l_{11}\,du + l_{12}\,dv, & l_{12}\,du + l_{22}\,dv \\ m_{11}du + m_{12}dv, & m_{12}du + m_{22}dv \end{vmatrix} = 0.$$

Die linke Seite ist, abgesehen von einem Zahlenfaktor, die Funktionaldeterminante von Λ und M, also gleich

$$\frac{\partial(\Lambda, \mathsf{M})}{\partial(\xi_1, \xi_2)}$$

in den Bezeichnungen von S. 33—34.

In derselben Weise wird die Aufgabe gelöst, die Winkelhalbierungslinien eines Tangentenpaares (1) zu ermitteln. Sie kann auch so ausgesprochen werden: Zwei Tangenten zu finden, die zu den beiden gegebenen harmonisch und aufeinander senkrecht sind. Man erhält zunächst wieder

$$l_{22}c_{11} - 2l_{12}c_{12} + l_{11}c_{22} = 0,$$

und dazu als Bedingung der Orthogonalität nach S. 46 (25)

$$Gc_{11} - 2Fc_{12} + Ec_{22} = 0.$$

Daraus folgt

$$(16)\quad (El_{12} - Fl_{11})du^2 + (El_{22} - Gl_{11})du\,dv + (Fl_{22} - Gl_{12})dv^2 = 0,$$

$$(17)\qquad \frac{\partial(\Lambda, \Lambda)}{\partial(\xi_1, \xi_2)} = 0.$$

Setzt man

$$l_{11} = L, \qquad l_{12} = M, \qquad l_{22} = N,$$

den Wendetangenten (S. 86) entsprechend, so erhält man, wie es nach S. 260 sein muß, die Bestimmungsgleichung der Haupttangenten wieder.

§ 144.

Involution von Flächentangenten.

Sind drei Paare von Geraden durch einen Punkt gegeben, und existiert ein viertes Paar, das zu jedem der drei harmonisch liegt, so sagt man bekanntlich, daß die gegebenen Geraden eine Involution bilden. Die Bedingung für eine Involution von Flächentangenten ist nach dem Vorhergehenden leicht zu finden. Denn wird zu den Gleichungen

$$\Lambda = 0, \qquad \mathsf{M} = 0$$

noch

$$\mathsf{N} \equiv n_{11}du^2 + 2n_{12}du\,dv + n_{22}dv^2 = 0$$

als Bestimmung für ein drittes Tangentenpaar hinzugenommen, so gelten für das vierte, $\Gamma = 0$, nach (11) die Relationen

$$\begin{aligned} c_{22}l_{11} - 2c_{12}l_{12} + c_{11}l_{22} &= 0 \\ c_{22}m_{11} - 2c_{12}m_{12} + c_{11}m_{22} &= 0 \\ c_{22}n_{11} - 2c_{12}n_{12} + c_{11}n_{22} &= 0, \end{aligned}$$

die in c_{11}, c_{12}, c_{22} homogen und linear sind. Die Bedingung für ihr Zusammenbestehen ist

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{22} \\ m_{11} & m_{12} & m_{22} \\ n_{11} & n_{12} & n_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Denkt man sich die beiden ersten Paare als fest, das dritte als variabel, so liefert diese Formel eine Beziehung unter den Verhältnissen der Koeffizienten von N. Daher kann man noch eine Gerade des dritten Paares willkürlich annehmen; der sechste Strahl der Involution ist dann eindeutig bestimmt.

Die Gleichung (1) kann auch als Bedingung für die Existenz dreier Multiplikatoren λ, μ, ν aufgefaßt werden, für welche die Relation

$$\lambda \Lambda + \mu \mathsf{M} + \nu \mathsf{N} = 0$$

identisch, d. h. für beliebige Werte der Differentiale du, dv erfüllt ist. So lange nicht speziellere Bedingungen hinzutreten, kann daher die Gleichung $\mathsf{N} = 0$ durch

$$(2)\qquad \lambda \Lambda + \mu \mathsf{M} = 0$$

ersetzt werden.

Fallen die beiden Strahlen des veränderlichen Paares in einen zusammen, so wird dieser als Doppelstrahl der Involution bezeichnet. Für einen solchen müssen die beiden Wurzeln $\frac{dv}{du}$ der Gleichung $\mathsf{N} = 0$ einander gleich sein, d. h. die Determinante der quadratischen Form

$$(\lambda l_{11} + \mu m_{11}) du^2 + 2(\lambda l_{12} + \mu m_{12}) du\, dv + (\lambda l_{22} + \mu m_{22}) dv^2$$

verschwinden, was für das Verhältnis $\frac{\lambda}{\mu}$ die Bestimmung

$$(3)\qquad (\lambda l_{11} + \mu m_{11})(\lambda l_{22} + \mu m_{22}) - (\lambda l_{12} + \mu m_{12})^2 = 0$$

liefert. Die Elimination des Verhältnisses aus (2) und (3) ergibt für die Doppelstrahlen selbst die Darstellung

$$(4)\qquad (l_{11}\mathsf{M} - m_{11}\Lambda)(l_{22}\mathsf{M} - m_{22}\Lambda) - (l_{12}\mathsf{M} - m_{12}\Lambda)^2 = 0$$

oder

$$(5)\qquad (l_{11} l_{22} - l_{12}^2)\mathsf{M}^2 - (l_{22} m_{11} - 2 l_{12} m_{12} + l_{11} m_{22})\mathsf{M}\Lambda + (m_{11} m_{22} - m_{12}^2)\Lambda^2 = 0$$

oder auch

$$(6)\qquad \mathsf{M}^2 - H_{lm}\mathsf{M}\Lambda + K_{lm}\Lambda^2 = 0.$$

Nach S. 197 folgt hieraus die Gleichung

$$\frac{\partial(\Lambda, \mathsf{M})}{\partial(\xi_1, \xi_2)} = 0$$

wieder, die im vorigen Paragraphen von einem anderen Gesichtspunkt aus aufgetreten ist.

Der Bedingung (1) für das Strahlenpaar $N = 0$, das mit zwei gegebenen eine Involution bildet, kann die Forderung hinzugefügt werden, es solle zu einem dritten,

$$k_{11} du^2 + 2k_{12} du dv + k_{22} dv^2 = 0,$$

harmonisch sein. Die Verhältnisse $n_{11} : n_{12} : n_{22}$ genügen dann den beiden Gleichungen

$$(l_{12} m_{22} - l_{22} m_{12}) n_{11} - (l_{11} m_{22} - l_{22} m_{11}) n_{12} + (l_{11} m_{12} - l_{12} m_{11}) n_{22} = 0$$

$$k_{22} n_{11} - 2k_{12} n_{12} + k_{11} n_{22} = 0, \tag{7}$$

sodaß die Bestimmungsgleichung für das Paar selbst die Form hat

$$\begin{vmatrix} l_{12} m_{22} - l_{22} m_{12}, & l_{11} m_{22} - l_{22} m_{11}, & l_{11} m_{12} - l_{12} m_{11} \\ k_{22} \quad , & 2k_{12} \quad , & k_{11} \\ du^2 \quad , & -2du dv \quad , & dv^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Verlangt man statt der eben angenommenen Eigenschaft die Orthogonalität der beiden Tangenten $N = 0$, so wird die Bedingung (7) durch

$$G n_{11} - 2F n_{12} + E n_{22} = 0, \tag{9}$$

und die Darstellung (8) durch

$$\begin{vmatrix} l_{12} m_{22} - l_{22} m_{12}, & l_{11} m_{22} - l_{22} m_{11}, & l_{11} m_{12} - l_{12} m_{11} \\ G \quad , & 2F \quad , & E \\ du^2 \quad , & -2du dv \quad , & dv^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{10}$$

vertreten.

Endlich läßt sich ein Tangentenpaar finden, das gleichzeitig mit zweimal zwei gegebenen Paaren in Involution steht. Seine Bestimmungsgleichung lautet bei unmittelbar verständlicher Bezeichnung

$$\begin{vmatrix} l_{11} m_{22} - l_{22} m_{12}, & l_{11} m_{22} - l_{22} m_{11}, & l_{11} m_{12} - l_{12} m_{11} \\ l'_{11} m'_{22} - l'_{22} m'_{12}, & l'_{11} m'_{22} - l'_{22} m'_{11}, & l'_{11} m'_{12} - l'_{12} m'_{11} \\ du^2 \quad , & -2du dv \quad , & dv^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

§ 145.

Konjugierte Tangenten. Satz von Koenigs.

Zwei Tangenten einer Fläche, von denen eine als Verbindungslinie zweier benachbarten Punkte A und B, die andere als Schnittlinie der Berührungsebenen in A und B erscheint, waren einander

konjugiert (S. 113). Läßt man den Punkt A eine beliebige Kurve auf der Fläche durchlaufen, denkt sich für jede Lage die Tangentialebene konstruiert und zieht den Begriff der abwickelbaren Fläche hinzu, so kann man sagen: Die Tangenten einer Flächenkurve sind konjugiert zu den charakteristischen Geraden der abwickelbaren Fläche, die der gegebenen Fläche längs jener Kurve umschrieben ist.

Ein Satz von Koenigs, bei dem diese Aussage benutzt wird, liefert die Möglichkeit, auf jeder Fläche ein Netz konjugierter Kurven ohne Ausführung einer Integration anzugeben.

Durch eine beliebige Gerade g werde ein Ebenenbüschel gelegt und die Schar γ der Schnittkurven sämtlicher Ebenen mit der Fläche ins Auge gefaßt. Die Tangente einer beliebigen derartigen Kurve in einem willkürlich angenommenen Punkte A treffe die Achse des Büschels in P. Eine solche Flächentangente kann auch als Kante eines Kegels mit der Spitze P angesehen werden, der der gegebenen Fläche umschrieben ist. Die Tangenten der Linie, in der der Kegel und die Fläche sich berühren, also des scheinbaren Umrisses der Fläche, von P aus betrachtet, sind nach dem oben Gesagten den Kanten des Kegels konjugiert. Eine der Kante PA benachbarte PB berührt eine der ersten Kurve benachbarte aus der Schar γ, u. s. f. Geht man ferner auf der ersten Kurve zu einem unendlichnahen Punkte über, konstruiert in ihm die Tangente und nennt Q deren Schnittpunkt mit der Achse g, so kann man Q als Spitze eines Kegels betrachten, für den dasselbe gilt wie für den Kegel P. Das heißt: Schneidet man die Fläche durch eine Schar von Ebenen, die durch eine und dieselbe Gerade hindurchgehen, und legt andererseits von den Punkten dieser Geraden aus die Tangentialkegel an die Fläche, so bilden die ebenen Kurven zusammen mit den Berührungslinien der Kegel ein konjugiertes Kurvennetz. Dies ist der Satz von Koenigs.

Die hier an die Spitze gestellte Beziehung zwischen konjugierten Flächentangenten führte auf die Bedingung S. 112 (6)

$$(1) \qquad L\,du\,\delta u + M(du\,\delta v + dv\,\delta u) + N\,dv\,\delta v = 0.$$

Kennzeichnet man die zu einer bestimmten Geraden konjugierte durch einen oberen Index 0, so kann man schreiben

$$(2) \qquad L + M(\lambda + \lambda^0) + N\lambda\lambda^0 = 0.$$

Mittels dieser Gleichung lassen sich Relationen zwischen geometrischen Größen herleiten, die mit λ und λ^0 in irgendwelchen funktionalen Zusammenhängen stehen. Einige davon sind von grundlegender Bedeutung, andere für spezielle Untersuchungen nützlich. Aber im all-

gemeinen ist die Bildung solcher Beziehungen von geringem wissenschaftlichen Interesse, nachdem man sich einmal die Methode klar gemacht hat, nach der sie sämtlich herstellbar sein müssen.

Diese Methode besteht einfach in der Elimination von λ und λ^0 aus den Ausdrücken der geometrischen Größen in Verbindung mit (2) oder (1), wobei man, wie sich von selbst versteht, die spezielle Natur dieser Bedingung, daß nämlich eine bilineare Differentialform gleich Null gesetzt ist, beständig im Auge zu behalten hat.

Als Beispiel einer einfachen Gleichung der betrachteten Art kann die Formel

$$\varrho\varrho^0 \sin^2 w^0 = \varrho_1\varrho_2 \tag{3}$$

dienen, in der w^0 den Winkel w aus § 11 unter der Voraussetzung bedeutet, daß δs zu ds konjugiert ist. Sie kann ebenso wie die wichtige Relation S. 114 (16) aus einem Satze der Kegelschnittlehre, speziell der Theorie der konjugierten Durchmesser, gefolgert werden. Während zur Elimination von λ und λ^0 nur zwei geometrische Größen erforderlich sind, enthält die Gleichung (3), von der Punktinvariante $\varrho_1\varrho_2$ abgesehen, allerdings deren drei; aber gerade hierauf beruht ihre einfache Form. Will man nun durch direkte Rechnung, ohne Rücksicht auf die Übereinstimmung der beiden Dupinschen Definitionen konjugierter Tangenten, eine Beziehung zwischen ϱ, ϱ^0 und w^0 ableiten, so hat man aus

$$\varrho = \frac{E + 2F\lambda + G\lambda^2}{L + 2M\lambda + G\lambda^2} \equiv \frac{\mathsf{A}}{\mathsf{B}}$$

$$\varrho^0 = \frac{E + 2F\lambda^0 + G\lambda^{0^2}}{L + 2M\lambda^0 + N\lambda^{0^2}} \equiv \frac{\mathsf{A}^0}{\mathsf{B}^0}$$

$$\sin^2 w^0 = \frac{T^2(\lambda - \lambda^0)^2}{(E + 2F\lambda + G\lambda^2)(E + 2F\lambda^0 + G\lambda^{0^2})} \equiv \frac{T^2(du\,\delta v - dv\,\delta u)^2}{\mathsf{A}\mathsf{A}^0}$$

in Verbindung mit der obigen Bedingung die Differentialverhältnisse zu eliminieren. Man sieht dabei auf den ersten Blick, daß sich durch Multiplikation der drei Gleichungen eine einfache Formel herausstellt:

$$\varrho\varrho^0 \sin^2 w^0 = \frac{T^2(du\,\delta v - dv\,\delta u)^2}{\mathsf{B}\mathsf{B}^0}.$$

Zur Einführung der bilinearen Form $\mathfrak{B}$, die die linke Seite von (1) bildet, benutzt man die Identität

$$\mathsf{B}\mathsf{B}^0 - \mathfrak{B}^2 = (LN - M^2)(du\,\delta v - dv\,\delta u)^2$$

(S. 112 (5)) und erhält dann wegen $\mathfrak{B} = 0$

$$\varrho\varrho^0 \sin^2 w^0 = \frac{EG - F^2}{LN - M^2} \equiv \varrho_1\varrho_2.$$

§ 146.

Richtungskosinus bestimmter Flächentangenten.

In diesem Paragraphen mögen einige allgemeine Formeln für Flächentangenten zusammengestellt werden, die zu einer gegebenen eine ausgezeichnete Lage haben. Zu größerer Übersichtlichkeit betrachten wir dabei die gegebene Tangente als Berührungslinie einer Kurve $\varphi(u, v) = \text{const.}$

Auf S. 130 ist die positive Tangentialnormale t' dieser Kurve durch die Bedingung $\delta\varphi > 0$ erklärt und die positive Tangente durch die Äquivalenz $t, t', n \sim x, y, z$ bestimmt worden. Die ersten Richtungskosinus von t und t' sind (S. 131 (6, 4))

$$(1) \qquad A = \Theta x \equiv \frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}}$$

$$(2) \qquad A' = \Theta' x \equiv \frac{G\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - F\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + E\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{T\sqrt{G\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}}.$$

Man kann die Flächennormale aus dieser Theorie ganz ausschalten, wenn man die Folge zweier beliebigen Tangenten mit der Folge der positiven Koordinatenlinien vergleicht, was durch Zusammenstellung der Festsetzungen auf S. 130—132 mit den Formeln des § 11 geschehen kann. Es war (S. 35 (12))

$$(3) \qquad \sin w = \frac{\sqrt{EG - F^2}\,(du\,\delta v - dv\,\delta u)}{\sqrt{E du^2 + 2F du\,dv + G dv^2}\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\,\delta v + G\delta v^2}}.$$

Ist nun $w < \pi$, $\sin w > 0$, also

$$(4) \qquad du\,\delta v - dv\,\delta u > 0,$$

so sind, wenn man sich ds auf die positive Tangente t_v der Linie $v = \text{const.}$ verlegt denkt, δs und die positive Tangente t_u der zweiten Koordinatenlinie auf derselben Seite der ersten gelegen; dagegen auf entgegengesetzten Seiten für $w > \pi$, $\sin w < 0$,

$$(5) \qquad du\,\delta v - dv\,\delta u < 0.$$

Hiernach dürfen die Verbindungslinien des Punktes (u, v) mit den Punkten $(u + du, v + dv)$ und $(u + \delta u, v + \delta v)$ den Koordinatenlinien $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ äquivalent — im weiteren Sinne — genannt werden, wenn die Ungleichung (4) gilt; nicht-äquivalent unter der Bedingung (5).

Für die zu t konjugierte Tangente t^0 ist

$$A^0 = \frac{\delta x}{\delta s} \equiv \frac{\frac{\partial x}{\partial u}\delta u + \frac{\partial x}{\partial v}\delta v}{\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}},$$

wenn jetzt das Verhältnis $\frac{\delta v}{\delta u}$ durch die Bedingung

(6) $$\left(L\frac{\partial\varphi}{\partial v} - M\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\delta u + \left(M\frac{\partial\varphi}{\partial v} - N\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\delta v = 0$$

bestimmt wird. Um die Richtung t^0 genauer zu definieren, setze man

(7) $$\delta u = \nu^0\left(N\frac{\partial\varphi}{\partial u} - M\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right), \qquad \delta v = \nu^0\left(L\frac{\partial\varphi}{\partial v} - M\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)$$

und bilde

(8) $$\delta\varphi = \nu^0\left[\left(N\frac{\partial\varphi}{\partial u} - M\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \left(L\frac{\partial\varphi}{\partial v} - M\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right].$$

Da

$$\frac{N\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - 2M\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + L\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}{G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2} = n$$

ist, so kann man

(9) $$\delta\varphi = \nu^0 n T^2 \Delta^1\varphi$$

schreiben. Ferner wird bei Benutzung von S. 226 (25)

(10) $$E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2 = \nu^{0^2} T^2\left(\mathfrak{G}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - 2\mathfrak{F}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \mathfrak{E}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\right)$$

oder

(11) $$\delta s^2 = \nu^{0^2} T^2 \mathfrak{T}^2 \Delta^1_e\varphi.$$

Für die Ausziehung der positiven Quadratwurzel kommt nun das Zeichen von ν^0 in Betracht. Wird $\nu^0 > 0$ angenommen, so läuft das nach (9) darauf hinaus, $\delta\varphi$ und n von gleichem Vorzeichen vorauszusetzen. Dann wird der Zähler des Ausdruckes von A^0

$$\nu^0\left(N\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - M\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + L\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right),$$

und der Nenner

$$\nu^0 T\mathfrak{T}\sqrt{\Delta^1_e\varphi}.$$

Führt man ausdrücklich die geometrische Ableitung längs t^0 ein, so kann man der Formel (2) entsprechend setzen:

(12) $$A^0 = \Theta^0 x \equiv \frac{N\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - M\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + L\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{T\sqrt{\mathfrak{G}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - 2\mathfrak{F}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \mathfrak{E}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}}.$$

Die hierdurch definierte Richtung $t^0 \equiv (A^0 B^0 C^0)$ fällt nach der über das Vorzeichen von ν^0 gemachten Bemerkung auf dieselbe Seite von t wie die Tangentialnormale t', wenn die zu t gehörige Normalkrümmung n positiv ist; auf die entgegengesetzte Seite für $n < 0$.

Die Prüfung des Vorzeichens von $du\,\delta v - dv\,\delta u$ bestätigt dies. Denn man hat

$$du\,\delta v - dv\,\delta u = \mu\nu^0 \left[\frac{\partial\varphi}{\partial v}\left(L\frac{\partial\varphi}{\partial v} - M\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial u}\left(N\frac{\partial\varphi}{\partial u} - M\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\right]$$

$$= \mu\nu^0 n\left(G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\right),$$

und da $\mu > 0$ war, so wird

$$du\,\delta v - dv\,\delta u \gtrless 0,$$

je nachdem

$$\nu^0 n \gtrless 0$$

ist.

Da die drei Richtungskosinus A, A' und A^0 als homogene lineare Funktionen von $\frac{\partial x}{\partial u}$ und $\frac{\partial x}{\partial v}$ erscheinen, so muß sich einer von ihnen homogen und linear durch die beiden anderen darstellen lassen (vgl. S. 57 (3)). Die für die Elimination von $\frac{\partial x}{\partial u}$ und $\frac{\partial x}{\partial v}$ nötigen Formeln lauten nach S. 202 (4) und S. 178 (21, 22) für $m_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $m_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial v}$:

$$(13)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{1}{\sqrt{\Delta^1\varphi}}\left(\frac{1}{T}\left(E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)A + \frac{\partial\varphi}{\partial u}A'\right)\\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{1}{\sqrt{\Delta^1\varphi}}\left(\frac{1}{T}\left(F\frac{\partial\varphi}{\partial v} - G\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)A + \frac{\partial\varphi}{\partial v}A'\right). \end{aligned}$$

Die Ausführung der Elimination selbst ist einfach; man findet unter Anwendung der Formeln für die Normalkrümmung n und die geodätische Windung t, sowie der Relation S. 197 (23), die n, t, H und K verbindet,

$$(14)\qquad A^0 = \frac{1}{\sqrt{t^2 + n^2}}(-tA + nA').$$

Es braucht nicht wieder hervorgehoben zu werden, daß auch diese Formel aus der Theorie des Dupinschen Kegelschnittes hätte abgeleitet werden können. Von dem hier eingenommenen Standpunkt aus folgt aus (14)

$$(15)\qquad \cos w^0 = \frac{-t}{\sqrt{t^2 + n^2}}.$$

Diese Gleichung, deren wesentlicher Inhalt derselbe ist wie der von S. 474 (3), läßt aufs neue hervortreten, daß das Verschwinden der geodätischen Windung für die Krümmungslinien charakteristisch ist (vgl. S. 233). Denn $t = 0$ und $\cos w^0 = 0$ bedingen sich gegenseitig, und $\cos w^0 = 0$ bedeutet, daß die zu der betrachteten Kurve konjugierte zugleich auf ihr senkrecht ist.

§ 147.

Konjugation und sphärische Abbildung.

Nimmt man das sphärische Bild der Kurve $\varphi(u, v) = \text{const.}$ hinzu, so ist der erste Richtungskosinus von dessen Tangente

$$\frac{dX}{d\sigma} = \frac{\frac{\partial X}{\partial u} du + \frac{\partial X}{\partial v} dv}{\sqrt{\mathfrak{E} du^2 + 2\mathfrak{F} du\, dv + \mathfrak{G} dv^2}},$$

und die positive Richtung $\tau \equiv (X''Y''Z'')$ der Tangente bestimmt sich für

$$du = \mu \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \qquad dv = -\mu \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

aus der Bedingung $\mu > 0$. Es wird

$$(1) \qquad X'' = \frac{\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{\mathfrak{G}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - 2\mathfrak{F}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \mathfrak{E}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}}.$$

Die zu τ senkrechte Richtung $\tau' \equiv (X'Y'Z')$ möge durch die Äquivalenz

$$\tau, \tau' \sim t, t',$$

d. h.

$$\tau, \tau', n \sim x, y, z,$$

also durch den Ansatz

$$(2) \qquad X' = YZ'' - ZY'', \ldots$$

erklärt werden. Will man die Formel

$$(3) \qquad X' = \frac{\left(Y\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial Y}{\partial u}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \left(Y\frac{\partial Z}{\partial v} - Z\frac{\partial Y}{\partial v}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\sqrt{\mathfrak{G}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - 2\mathfrak{F}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \mathfrak{E}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}}$$

in eine der Gleichung (2) des vorigen Paragraphen entsprechende Gestalt setzen, so hat man dazu die Relationen S. 335 (7, 8)

$$(4) \qquad \begin{aligned} Y\frac{\partial Z}{\partial u} - Z\frac{\partial Y}{\partial u} &= \frac{1}{\varepsilon \mathfrak{T}}\left(\mathfrak{E}\frac{\partial X}{\partial v} - \mathfrak{F}\frac{\partial X}{\partial u}\right) \\ Y\frac{\partial Z}{\partial v} - Z\frac{\partial Y}{\partial v} &= \frac{1}{\varepsilon \mathfrak{T}}\left(\mathfrak{F}\frac{\partial X}{\partial v} - \mathfrak{G}\frac{\partial X}{\partial u}\right) \end{aligned}$$

zu benutzen, was

$$(5)\qquad X' = \frac{\mathfrak{G}\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \mathfrak{F}\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right) + \mathfrak{E}\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\varepsilon \mathfrak{T}\sqrt{\mathfrak{G}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - 2\mathfrak{F}\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \mathfrak{E}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2}}$$

liefert. Wollte man das Vorzeichen ε weglassen, also beim Übergange von A' zu X' nur $x, \ldots E, \ldots T$ durch $X, \ldots \mathfrak{E}, \ldots \mathfrak{T}$ ersetzen, so würde wegen

$$(6)\qquad \mathfrak{T} = \varepsilon K T \qquad (\varepsilon K > 0)$$

die Äquivalenz $\tau, \tau' \sim t, t'$ nur für Flächen positiven Krümmungsmaßes gelten.

Man kann X' eine andere Form geben, wenn man parallel zu τ' eine Flächentangente durch den Punkt (xyz) legt und sie als dessen Verbindungslinie mit einem benachbarten $(x + \mathfrak{d}'x,\ y + \mathfrak{d}'y,\ z + \mathfrak{d}'z)$ betrachtet. Die Bedingung $\tau' \perp \tau$, nämlich

$$\sum dX\,\delta X = 0,$$

wird dann

$$(7)\qquad \sum dX\,\mathfrak{d}'x = 0,$$

d. h.

$$(8)\qquad L\,du\,\mathfrak{d}'u + M(du\,\mathfrak{d}'v + dv\,\mathfrak{d}'u) + N\,dv\,\mathfrak{d}'v = 0.$$

Die zu dem sphärischen Bilde von t senkrechte Flächentangente ist also zu t konjugiert. Oder, da (7) auch in der Form

$$(9)\qquad \sum dx\,\mathfrak{d}'X = 0$$

geschrieben werden kann: Die sphärischen Bilder zweier konjugierten Tangenten stehen wechselseitig auf diesen senkrecht. Hiernach muß X', jedenfalls vom Vorzeichen abgesehen, gleich A^0 sein. Um die beiden Formeln direkt ineinander überzuführen, hat man die Faktoren von $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ in X' homogen und linear durch $\frac{\partial x}{\partial u}$ und $\frac{\partial x}{\partial v}$ darzustellen, mit Koeffizienten, die nur von den Fundamentalgrößen der gegebenen Fläche abhängen. Nach den Weingartenschen Gleichungen und den Ausdrücken von $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ ist dies sofort ausführbar. Ohne noch einmal durch die Formeln (4) hindurchzugehen, nämlich diese mit S. 337 (2, 3) zusammenzustellen, kann man den Ansatz machen:

$$\mathfrak{E}\frac{\partial X}{\partial v} - \mathfrak{F}\frac{\partial X}{\partial u} = (HL - KE)\left(\eta_{21}\frac{\partial x}{\partial u} + \eta_{22}\frac{\partial x}{\partial v}\right) - (HM - KF)\left(\eta_{11}\frac{\partial x}{\partial u} + \eta_{12}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$

$$\mathfrak{G}\frac{\partial X}{\partial u} - \mathfrak{F}\frac{\partial X}{\partial v} = (HN - KG)\left(\eta_{11}\frac{\partial x}{\partial u} + \eta_{12}\frac{\partial x}{\partial v}\right)$$
$$- (HM - KF)\left(\eta_{21}\frac{\partial x}{\partial u} + \eta_{22}\frac{\partial x}{\partial v}\right).$$

Für die einzelnen hierin auftretenden Verbindungen gelten folgende Gleichungen, die das Formelsystem S. 226 (23, 24) vervollständigen:

$$(10)\qquad \begin{aligned} F\eta_{12} - E\eta_{22} &= HE - L \\ G\eta_{12} - F\eta_{22} &= HF - M \\ E\eta_{21} - F\eta_{11} &= HF - M \\ F\eta_{21} - G\eta_{11} &= HG - N \end{aligned}$$

$$(11)\qquad \begin{aligned} M\eta_{12} - L\eta_{22} &= KE \\ N\eta_{12} - M\eta_{22} &= KF \\ L\eta_{21} - M\eta_{11} &= KF \\ M\eta_{21} - N\eta_{11} &= KG. \end{aligned}$$

Sie liefern

$$(12)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{E}\frac{\partial X}{\partial v} - \mathfrak{F}\frac{\partial X}{\partial u} &= K\left(M\frac{\partial x}{\partial u} - L\frac{\partial x}{\partial v}\right) \\ \mathfrak{G}\frac{\partial X}{\partial u} - \mathfrak{F}\frac{\partial X}{\partial v} &= K\left(M\frac{\partial x}{\partial v} - N\frac{\partial x}{\partial u}\right) \end{aligned}$$

und demnach

$$(13)\qquad X' = - A^0.$$

Zu demselben Resultat kommt man, wenn man schon der Richtung τ eine Flächentangente, als Verbindungslinie von A mit einem Punkte $(x + \mathfrak{d}x, y + \mathfrak{d}y, z + \mathfrak{d}z)$, zuordnet und die Bedingung $\tau' \perp \tau$ in der Tangentialebene des Punktes A in Rechnung zieht.

§ 148.

Beziehungen zur Formentheorie.

Es lohnt der Mühe, diese Anschauungsweise etwas weiter zu verfolgen, weil dabei neue Zusammenhänge von Differentialformen unter sich und mit bestimmten Winkelgrößen hervortreten.

Nach der Erklärung des Zeichens $\mathfrak{d}$ soll

$$\frac{dX}{d\sigma} = \frac{\mathfrak{d}x}{\mathfrak{d}s}$$

werden, d. h. für $\frac{d\sigma}{ds} = \alpha$:

$$\left(\eta_{11}\frac{\partial x}{\partial u} + \eta_{12}\frac{\partial x}{\partial v}\right)du + \left(\eta_{21}\frac{\partial x}{\partial u} + \eta_{22}\frac{\partial x}{\partial v}\right)dv = \alpha\left(\frac{\partial x}{\partial u}\mathfrak{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\mathfrak{d}v\right).$$

Die Multiplikation mit $\frac{\partial x}{\partial u}$, dann mit $\frac{\partial x}{\partial v}$, und die jedesmalige Summation über x, y, z liefert

$$(E\eta_{11} + F\eta_{12})du + (E\eta_{21} + F\eta_{22})dv = \alpha(E\mathfrak{d}u + F\mathfrak{d}v)$$
$$(F\eta_{11} + G\eta_{12})du + (F\eta_{21} + G\eta_{22})dv = \alpha(F\mathfrak{d}u + G\mathfrak{d}v),$$

und nach Anwendung der Gleichungen S. 226 (23):

$$Ldu + Mdv + \alpha(E\mathfrak{d}u + F\mathfrak{d}v) = 0$$
$$Mdu + Ndv + \alpha(F\mathfrak{d}u + G\mathfrak{d}v) = 0.$$

Wird α eliminiert, so erscheint als Bestimmungsgleichung für das Differentialverhältnis $\frac{\mathfrak{d}v}{\mathfrak{d}u}$ bei gegebenem $\frac{dv}{du}$

(1) $$\begin{vmatrix} E\mathfrak{d}u + F\mathfrak{d}v, & F\mathfrak{d}u + G\mathfrak{d}v \\ Ldu + Mdv, & Mdu + Ndv \end{vmatrix} = 0$$

oder

(2) $$-(\eta_{12}du + \eta_{22}dv)\mathfrak{d}u + (\eta_{11}du + \eta_{21}dv)\mathfrak{d}v = 0,$$

sodaß

(3) $$\mathfrak{d}u = \nu(\eta_{11}du + \eta_{21}dv)$$
$$\mathfrak{d}v = \nu(\eta_{12}du + \eta_{22}dv)$$

gesetzt werden darf, wie auch unmittelbar aus den Ausgangsgleichungen hätte geschlossen werden können.

Die Bedeutung der Gleichung (2) wird klarer, wenn ihre linke Seite, zunächst ohne Spezialisierung der durch $\mathfrak{d}$ gekennzeichneten Flächentangente $\mathfrak{t}$, zu dem Winkel in Beziehung gebracht wird, den $\mathfrak{t}$ mit τ bildet. Dieser Zusammenhang ergibt sich von selbst, wenn man mit der Determinante zweiten Grades, die die linke Seite darstellt, ebenso zu operieren sucht wie auf S. 197 mit der Funktionaldeterminante von A und B. Während dort

(4) $$\begin{vmatrix} Edu + Fdv, & Fdu + Gdv \\ Ldu + Mdv, & Mdu + Ndv \end{vmatrix} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} \frac{\partial \mathsf{A}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \mathsf{A}}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \mathsf{B}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \mathsf{B}}{\partial \xi_2} \end{vmatrix}$$

ist, hat man hier, für

(5) $$Edu\mathfrak{d}u + F(du\mathfrak{d}v + dv\mathfrak{d}u) + Gdv\mathfrak{d}v \equiv$$
$$E\xi_1\eta_1 + F(\xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1) + G\xi_2\eta_2 = \mathfrak{A},$$

(6) $$\begin{vmatrix} E\mathfrak{d}u + F\mathfrak{d}v, & F\mathfrak{d}u + G\mathfrak{d}v \\ Ldu + Mdv, & Mdu + Ndv \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \mathsf{B}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \mathsf{B}}{\partial \xi_2} \end{vmatrix}.$$

Durch Division mit T geht die Determinante in eine absolute Kovariante des Formenpaares $(\mathfrak{A}, \mathsf{B})$ oder des Paares (A, B) über. Es sei

$$(7)\qquad \frac{1}{T}\begin{vmatrix} E\mathfrak{d}u + F\mathfrak{d}v, & F\mathfrak{d}u + G\mathfrak{d}v \\ Ldu + Mdv, & Mdu + Ndv \end{vmatrix}$$

$$\equiv T(-\eta_{12}\,du\,\mathfrak{d}u + \eta_{11}\,du\,\mathfrak{d}v - \eta_{22}\,dv\,\mathfrak{d}u + \eta_{21}\,dv\,\mathfrak{d}v) = \mathfrak{E}.$$

Diese Gleichung,

$$(8)\qquad D_a(\mathfrak{A}, \mathsf{B}) = \mathfrak{E},$$

tritt der früheren

$$(9)\qquad D_a(\mathsf{A}, \mathsf{B}) = \Gamma$$

(S. 193) an die Seite.

Nun kann man zwar die bilineare Differentialform $\mathfrak{E}$ unmittelbar durch einfachere Kovarianten des Formenpaares (A, B) darstellen, wenn man sie mit $du\,\mathfrak{d}v - dv\,\mathfrak{d}u$ multipliziert. Denn für

$$(10)\qquad T(du\,\mathfrak{d}v - dv\,\mathfrak{d}u) = [uv]$$

wird

$$[uv]\,\mathfrak{E} \equiv \begin{vmatrix} du & dv \\ \mathfrak{d}u & \mathfrak{d}v \end{vmatrix}\begin{vmatrix} E\mathfrak{d}u + F\mathfrak{d}v, & F\mathfrak{d}u + G\mathfrak{d}v \\ Ldu + Mdv, & Mdu + Ndv \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} Edu\,\mathfrak{d}u + F(du\,\mathfrak{d}v + dv\,\mathfrak{d}u) + Gdv\,\mathfrak{d}v, & Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \\ E\mathfrak{d}u^2 + 2F\mathfrak{d}u\,\mathfrak{d}v + G\mathfrak{d}v^2, & Ldu\,\mathfrak{d}u + M(du\,\mathfrak{d}v + dv\,\mathfrak{d}u) + Ndv\,\mathfrak{d}v \end{vmatrix},$$

$$(11)\qquad [uv]\,\mathfrak{E} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathsf{A}'\mathsf{B}.$$

Aber für den hier vorliegenden Zweck ist eine Formel für das Quadrat von $\mathfrak{E}$ brauchbarer. Will man diese in möglichst genauem Anschluß an S. 197 herleiten, so hat man von

$$(12)\qquad \frac{1}{T}\begin{vmatrix} E\,, & F & , \;G \\ L\,, & M & , \;N \\ dv\,\mathfrak{d}v, & -\frac{1}{2}(du\,\mathfrak{d}v + dv\,\mathfrak{d}u), & du\,\mathfrak{d}u \end{vmatrix}$$

$$\equiv T(-\eta_{12}\,du\,\mathfrak{d}u + \tfrac{1}{2}(\eta_{11} - \eta_{22})(du\,\mathfrak{d}v + dv\,\mathfrak{d}u) + \eta_{21}\,dv\,\mathfrak{d}v) \equiv \bar{\mathfrak{E}}$$

auszugehen. Diese Größe, die zu Γ gehörende bilineare Differentialform, ist mit $\mathfrak{E}$ durch die Relation

$$\bar{\mathfrak{E}} - \mathfrak{E} = -\frac{1}{2}\,T(\eta_{11} + \eta_{22})(du\,\mathfrak{d}v - dv\,\mathfrak{d}u)$$

$$(13)\qquad \mathfrak{E} - \mathfrak{E} = \frac{1}{2}\,[uv]\,H$$

verbunden. Es wird

$$\mathfrak{C}^2 =$$

$$\frac{1}{2T^2}\begin{vmatrix} E\,, & F & , G \\ L\,, & M & , N \\ dv\mathfrak{d}v, & -\frac{1}{2}(du\mathfrak{d}v+dv\mathfrak{d}u), & du\mathfrak{d}u \end{vmatrix}\begin{vmatrix} du\mathfrak{d}u, & du\mathfrak{d}v+dv\mathfrak{d}u, & dv\mathfrak{d}v \\ G\,, & -2F & , E \\ N\,, & -2M & , L \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2T^4}\begin{vmatrix} \mathfrak{A} & , 2T^2, & HT^2 \\ \mathfrak{B} & , HT^2, & 2KT^2 \\ -\frac{1}{2T^2}[uv]^2, & \mathfrak{A}\,, & \mathfrak{B} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \mathfrak{A} & , 2, & H \\ \mathfrak{B} & , H, & 2K \\ -\frac{1}{2}[uv]^2, & \mathfrak{A}, & \mathfrak{B} \end{vmatrix},$$

(14) $$\mathfrak{C}^2 = -K\mathfrak{A}^2 + H\mathfrak{A}\mathfrak{B} - \mathfrak{B}^2 + \frac{1}{4}(H^2-4K)[uv]^2.$$

Ersetzt man hierin $\mathfrak{C}$ durch seinen Ausdruck aus (13), so tritt links und rechts $\frac{1}{4}H^2[uv]^2$ auf. Ferner fällt $H[uv]\mathfrak{C}$ weg, wenn für $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ der aus (11) folgende Wert eingeführt wird. Soweit die von B völlig unabhängige Größe $[uv]$ noch stehen geblieben ist, kann sie mittels

(15) $$[uv]^2 = \mathsf{A}\mathsf{A}' - \mathfrak{A}^2$$

entfernt werden. Die Schlußformel lautet

(16) $$\mathfrak{C}^2 = -K\mathsf{A}\mathsf{A}' + H\mathsf{A}'\mathsf{B} - \mathfrak{B}^2.$$

Es ist die Verallgemeinerung von S. 197 (22).

Wegen

$$H\mathsf{B} - K\mathsf{A} = \mathsf{E}$$

kann man auch

(17) $$\mathfrak{C}^2 = \mathsf{A}'\mathsf{E} - \mathfrak{B}^2$$

schreiben.

Um in dieser allgemeinen formentheoretischen Relation den einzelnen Bestandteilen ihre flächentheoretische Bedeutung wiederzugeben, hat man

$$\mathsf{A}' \equiv E\mathfrak{d}u^2 + 2F\mathfrak{d}u\,\mathfrak{d}v + G\mathfrak{d}v^2 = \mathfrak{d}s^2$$

$$\mathsf{E} \equiv \mathfrak{E}du^2 + 2\mathfrak{F}du\,dv + \mathfrak{G}dv^2 = d\sigma^2$$

$$\mathfrak{B} \equiv Ldu\mathfrak{d}u + M(du\mathfrak{d}v + dv\mathfrak{d}u) + Ndv\mathfrak{d}v = -\Sigma dX\mathfrak{d}x,$$

d. h. wenn ω den Winkel zwischen $\mathfrak{t}$ und τ bezeichnet,

(18) $$\mathfrak{B} = -d\sigma \, . \, \mathfrak{d}s \, . \cos\omega$$

zu setzen. Die Gleichung (17) liefert dann

(19) $$\mathfrak{C}^2 = d\sigma^2 \mathfrak{d}s^2 \sin^2\omega.$$

Wie es nach (2) sein muß, verschwindet $\mathfrak{C}$ für $\sin\omega = 0$, nämlich wenn die Richtung t mit τ zusammenfällt.

§ 149.

Sphärische Abbildung des Dreikants t, t', n.

Nach § 147 ergibt das sphärische Bild einer Flächentangente mit der zu dieser konjugierten Tangente und der Flächennormale zusammen ein rechtwinkliges Dreikant, und es besteht die Äquivalenz

$$\tau, \; -t^0, \; n \sim x, \; y, \; z$$

oder

(1) $$t^0, \; \tau, \; n \sim x, \; y, \; z.$$

Immer, wenn wie hier die Kosinus einer Richtung τ aus einer anderen, $n \equiv (XYZ)$, nach der Rechnungsvorschrift

(2) $$X'' = \frac{dX}{\sqrt{\Sigma dX^2}}, \ldots$$

gebildet sind, gelten bei Hinzunahme einer dritten, zu τ und n senkrechten Richtung die Frenetschen Formeln in der Gestalt, die in der allgemeinen Theorie der Raumkurven (S. 12—15) vorliegt. Es sind also namentlich die Differentiale von A^0, B^0, C^0 ebenfalls den Größen X'', Y'', Z'' proportional.

Um dies zu beweisen und zugleich in die Gesamtheit der Formeln, die aus der sphärischen Abbildung entstehen, Ordnung und Übersicht zu bringen, hat man nur die Aufeinanderfolge der Gleichungen auf S. 53—54 unbedeutend abzuändern. Wird in der Theorie der Flächenkurven als solcher grundsätzlich von dem Dreikant t, t', n ausgegangen und die sphärische Abbildung von vornherein hinzugenommen, so kann man systematisch die drei Kurven auf der Einheitskugel betrachten, die den Tangenten und den Tangentialnormalen der Flächenkurve, sowie den Flächennormalen längs dieser Kurve entsprechen. Was schon auf S. 479 als sphärisches Bild einer Flächentangente bezeichnet worden ist, ist die Tangente der dritten dieser sphärischen Kurven.

Die Richtungskosinus der Hauptnormale erscheinen jetzt als durch die Gleichungen

(3) $$\frac{da}{d\omega} = a'', \ldots$$

oder, für

(4) $$\frac{d\omega}{ds} = k,$$
durch
(5) $$\Theta a = k a'', \ldots$$
definiert. Wegen $\Sigma a^2 = 1$ ist
$$\Sigma a \Theta a = 0,$$
d. h.
$$\Sigma a a'' = 0,$$
die Richtung $h \equiv (a''b''c'')$ auf $t \equiv (abc)$ senkrecht.

Erklärt man nun weiter $b \equiv (a'b'c')$ bis auf ein Vorzeichen durch die Gleichungen
(6) $$\Sigma a'^2 = 1$$
(7) $$\Sigma a'a = 0$$
(8) $$\Sigma a'a'' = 0,$$
so erhält man aus den beiden ersten
$$\Sigma a'\Theta a' = 0, \qquad \Sigma a'\Theta a + \Sigma a \Theta a' = 0,$$
und die zweite dieser Relationen geht nach (5) und (8) in
$$\Sigma a \Theta a' = 0$$
über. Aus
$$a\,\Theta a' + b\,\Theta b' + c\,\Theta c' = 0$$
$$a'\Theta a' + b'\Theta b' + c'\Theta c' = 0$$
folgt aber
$$\Theta a' : \Theta b' : \Theta c' = bc' - b'c : ca' - c'a : ab' - a'b = a'' : b'' : c''$$
oder
(9) $$\Theta a' = k' a'', \ldots,$$
wenn
$$k'^2 = \sum \left(\frac{da'}{ds}\right)^2 = \left(\frac{d\omega'}{ds}\right)^2$$
gesetzt wird. Die Gleichungen (9) sind also in der Tat eine bloße Folge aus (5) in Verbindung mit der Orthogonalität von b zu t und h.

Daß k' im Gegensatz zu k auch negative Werte annehmen kann, wenn die Bestimmung von a', b', c' dem Vorzeichen nach durch die Äquivalenz
$$b,\, h \sim t',\, n$$
(S. 59) zu Ende geführt wird, bleibt selbstverständlich bestehen, ebenso wie alle sonstigen Ergebnisse über Krümmung und Windung.

Die durch die Kosinus $\frac{da''}{d\omega''}, \cdots$ definierte Gerade soll nicht weiter in Betracht gezogen werden, einmal weil sie im allgemeinen nicht in einer der Ebenen des Dreikants t, t', n liegt, und ferner, weil die

mit ihr zusammenhängende Größe k'' in bekannter Weise durch k und k' bestimmt wird.

Die Lage von b und h zu den Achsen t' und n des Grunddreikants wird durch die Formeln

$$(10) \qquad a' = \quad A' \cos\varphi + X \sin\varphi$$

$$(11) \qquad a'' = -A' \sin\varphi + X \cos\varphi$$

gekennzeichnet, in denen $\varphi = (n, h)$ war (S. 59). Multipliziert man (11) mit k, benutzt die Definitionsgleichung (3) oder (5) für a'' und vergleicht das Resultat, nachdem man A statt a geschrieben hat (S. 54), mit der ersten allgemeinen Frenetschen Formel des Systems (a) (S. 55), so erhält man

$$k(-A' \sin\varphi + X \cos\varphi) = gA' + nX,$$

woraus die Gleichungen

$$(12) \qquad k \cos\varphi = n$$

$$(13) \qquad k \sin\varphi = -g$$

$$(14) \qquad k^2 = n^2 + g^2$$

(S. 59 und 60) wieder folgen.

Die gleiche Behandlung der Formel (11) (und immer der beiden zugehörigen) mit k' ergibt zunächst nur

$$\Theta a' = k'(-A' \sin\varphi + X \cos\varphi), \ldots .$$

Da $\Theta a'$ in den allgemeinen Frenetschen Formeln nicht enthalten ist, so hat man diese geometrische Ableitung aus (10) zu bilden (vgl. S. 61). Es folgt mit Hilfe der allgemeinen Frenetschen Formeln (b) und (c)

$$\Theta a' = -A(g \cos\varphi + n \sin\varphi) + (-A' \sin\varphi + X \cos\varphi)(t + \Theta\varphi).$$

Wegen (12, 13) verschwindet der Koeffizient von A, und die Vergleichung mit dem vorhergehenden Wert von $\Theta a'$ liefert nur die eine bekannte Relation

$$(15) \qquad k' = t + \Theta\varphi.$$

Diese Untersuchung und ihre Ergebnisse lassen sich von der Achse t des Dreikants unmittelbar auf t' und n übertragen. Wegen der grundlegenden Bedeutung von n nehmen wir zunächst die Abbildung durch parallele Flächennormalen noch einmal vor, von der letzthin ausschließlich die Rede gewesen ist.

Die hinzutretende Gerade $\tau \equiv (X''Y''Z'')$ ist durch

$$X'' = \frac{dX}{d\sigma}, \ldots$$

erklärt. Sie soll, wie vorher, in die Tangentialebene der Fläche selbst verlegt werden. Gleichzeitig mit ihr wird eine zweite Tangente, τ', durch die den Bedingungen (6, 7, 8) entsprechenden

$$\Sigma X'^2 = 1$$
$$\Sigma X' X = 0$$
$$\Sigma X' X'' = 0$$

definiert und das in X', Y', Z' enthaltene Vorzeichen der Äquivalenz

$$\tau, \tau' \sim t, t'$$

gemäß bestimmt (S. 478). Gegen vorher sind die Richtungen

$$t;\ t',\ n;\quad b,\quad h$$

durch

$$n;\ t,\ t';\ -\tau' \equiv t^0,\ \tau,$$

also die Größen

$$A;\ A',\ X;\quad a',\quad a'';\quad d\omega,\quad k;\quad d\omega',\quad k'$$

durch

$$X;\ A,\ A';\ -X' \equiv A^0,\ X'';\ \sqrt{\Sigma d X^2} \equiv d\sigma,\ \frac{d\sigma}{ds};\ \pm\sqrt{\Sigma d A^{0 2}} \equiv d\sigma^0,\ \frac{d\sigma^0}{ds}$$

zu ersetzen. $\frac{d\sigma}{ds}$ ist positiv, $\frac{d\sigma^0}{ds}$ kann positiv oder negativ sein. Den ersten Gleichungen (5) und (9) entsprechen

(16) $$\Theta X = \frac{d\sigma}{ds} X''$$

und

(17) $$\Theta A^0 = \frac{d\sigma^0}{ds} X''.$$

Der positive Drehungssinn in der Tangentialebene geht von t durch den rechten Winkel hindurch nach t'. Durch positive Drehung von t' bis τ entstehe der Winkel w^0; er ist identisch mit dem in demselben Sinne gezählten Winkel der Kurventangente t mit der ihr konjugierten t^0. w^0 tritt an die Stelle von φ, und die Beziehungen

(18) $$A^0 = \quad A \cos w^0 + A' \sin w^0$$

(19) $$X'' = -A \sin w^0 + A' \cos w^0$$

an die Stelle von (10) und (11).

Die Größen

$$n \equiv \Sigma X \Theta A\ ,\qquad g \equiv \Sigma A' \Theta A\ ,\qquad t \equiv \Sigma X \Theta A'$$

sind mit

$$\Sigma A' \Theta X \equiv -t,\qquad \Sigma A \Theta X \equiv -n,\qquad \Sigma A' \Theta A \equiv g$$

zu vertauschen, und die nunmehr aus den vorhergehenden Formeln abzulesenden lauten

$$\frac{d\sigma}{ds}\cos w^0 = -t \tag{20}$$

$$\frac{d\sigma}{ds}\sin w^0 = n \tag{21}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{ds}\right)^2 = t^2 + n^2 \tag{22}$$

(vgl. S. 477 (14), (15)) und

$$\frac{d\sigma^0}{ds} = g + \Theta w^0. \tag{23}$$

Diese Gleichungen liefern ebensoviele geometrische Sätze. Im besonderen enthält die letzte einen interessanten Ausdruck der geodätischen Krümmung. Die vorletzte ist mit der formentheoretischen Identität

$$\mathsf{AE} = \Gamma^2 + \mathsf{B}^2 \tag{24}$$

gleichbedeutend; vgl. S. 197, 226 oder S. 483 (17).

Bildet man drittens die Schar der Tangentialnormalen einer Flächenkurve auf die Einheitskugel ab, so hat man

$$\frac{dA'}{\sqrt{\Sigma dA'^2}} \equiv \frac{dA'}{d\sigma'} = \bar{A}, \ldots \tag{25}$$

einzuführen. Es sei $(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) \equiv \bar{\tau}$, und sodann $\bar{\tau}' \equiv (\bar{A}'\bar{B}'\bar{C}')$ auf t' und $\bar{\tau}$ senkrecht. Gegen die erste Abbildung vertauschen sich bei passender Wahl der Richtung $\bar{\tau}'$

$$t;\quad t',\ n;\quad b,\ h$$

mit

$$t';\quad n,\ t;\quad \bar{\tau}',\ \bar{\tau},$$

also

$$A;\ A',\ X;\ a',\ a'';\qquad d\omega,\qquad k;\qquad d\omega',\qquad k'$$

mit

$$A';\ X,\ A;\ \bar{A}',\ \bar{A};\ \sqrt{\Sigma dA'^2} \equiv d\sigma',\ \frac{d\sigma'}{ds};\ \pm\sqrt{\Sigma d\bar{A}'^2} \equiv d\bar{\sigma}',\ \frac{d\bar{\sigma}'}{ds}.$$

Die Größen

$$n,\quad g,\quad t$$

werden durch

$$-g,\quad t,\quad -n$$

ersetzt. Die beiden Geraden $\bar{\tau}$ und $\bar{\tau}'$ liegen in dem durch die Kurventangente bestimmten Normalschnitt der Fläche. ψ sei der durch Drehung von n nach t entstandene Winkel von t mit $\bar{\tau}$. Dann gelten folgende Gleichungen:

$$\Theta A' = \frac{d\sigma'}{ds}\bar{A} \tag{26}$$

$$\Theta \bar{A}' = \frac{d\bar{\sigma}'}{ds}\bar{A} \tag{27}$$

(28) $$\bar{A}' = X\cos\psi + A\sin\psi$$

(29) $$\bar{A} = -X\sin\psi + A\cos\psi$$

(30) $$\frac{d\sigma'}{ds}\cos\psi = -g$$

(31) $$\frac{d\sigma'}{ds}\sin\psi = -t$$

(32) $$\left(\frac{d\sigma'}{ds}\right)^2 = g^2 + t^2$$

(33) $$\frac{d\bar{\sigma}'}{ds} = -n + \Theta\psi.$$

Aus ihnen geht hervor, daß die sphärische Abbildung der Tangentialnormalen von ungleich geringerer Bedeutung ist als die der Tangenten und der Flächennormalen. Erstens kann man vermöge (32) von der Größe $\frac{d\sigma'}{ds}$ absehen. Freilich würde dies nach (14) und (22) auch schon von k und $\frac{d\sigma}{ds}$ gelten. Aber nicht nur die Krümmung k ist für die gesamte Theorie der Kurven von grundlegender Wichtigkeit, sondern auch die sphärische Abbildung durch parallele Normalen hat sich bei den verschiedensten Anwendungen als fruchtbar erwiesen und speziell im § 147 durch ihre Beziehung zur Konjugation eine neue Bedeutung gewonnen. Was zweitens $\frac{d\bar{\sigma}'}{ds}$ angeht, so gehört diese Größe mit k' und $\frac{d\sigma^0}{ds}$ zusammen in eine Gruppe, die nach (15), (23) und (33), außer mit t, g und n, auch mit den geometrischen Ableitungen dreier Winkelgrößen linear zusammenhängt. Aber schon diese Winkel selbst sind im Gebiete (t, g, n) nicht unabhängig voneinander, denn es gelten nach (12, 13), (20, 21) und (30, 31) die Formeln

(34) $$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{g}{n}, \qquad \operatorname{tg} w^0 = -\frac{n}{t}, \qquad \operatorname{tg}\psi = \frac{t}{g},$$

aus denen

(35) $$\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg} w^0 \operatorname{tg}\psi = 1$$

hervorgeht. Mithin ist $\Theta\psi$ mit $\Theta\varphi$ und Θw^0 durch eine lineare Gleichung verbunden,

(36) $$\Theta\psi = \frac{(n^2+g^2)\,t}{(t^2+g^2)\,n}\,\Theta\varphi + \frac{(n^2+t^2)\,g}{(g^2+t^2)\,n}\,\Theta w^0.$$

Sie kann in mannigfacher Weise umgeformt werden.

§ 150.

Geometrische Differentiation der Normalkrümmung.

Die Normalkrümmung und die geodätische Windung einer Flächenkurve haben die gemeinsame Eigenschaft, die Differentialquotienten

der kartesischen Koordinaten der Fläche bis zur zweiten Ordnung, und von den Ableitungen der darstellenden Funktion nur die der ersten Ordnung zu enthalten (S. 64, 194). In dem Ausdruck der Tangentialkrümmung kommen von dieser Funktion auch die zweiten Ableitungen vor (S. 129). Allgemein gesprochen, sind also n, t und g Funktionen der Ableitungen erster und zweiter Ordnung der kartesischen Koordinaten und der darstellenden Funktion. Ist die Kurve nicht durch eine Gleichung

$$\varphi(u, v) = \text{const.},$$

sondern durch eine Differentialgleichung

$$\mathfrak{M}_0 \equiv m_1 du + m_2 dv = 0$$

definiert, so treten die Koeffizienten der Differentialform $\mathfrak{M}_0$ an die Stelle der ersten Ableitungen von $\varphi(u, v)$; sie gehen also nebst ihren ersten Differentialquotienten in die betrachteten Ausdrücke ein. Es ist leicht, aus diesen durch geometrische Differentiation Größen von unmittelbar anschaulicher Bedeutung herzuleiten, die von Ableitungen einer beliebig vorgeschriebenen Ordnung abhängen.

Verschiedene Größen mit Ableitungen dritter Ordnung sind in der Theorie der Fundamentalgleichungen (S. 205) bereits aufgetreten, nämlich $\Theta' n$, $\Theta' g$, Θt und $\Theta' t$. Bei dieser Aufzählung ist die orthogonale Trajektorie der gegebenen Kurve nur insoweit berücksichtigt, als sie der zweiten geometrischen Differentiation zugrunde liegt; die auf sie bezüglichen Größen n' und g' bleiben außer Betracht.

Jene vier Größen nun kommen in den Fundamentalgleichungen, deren Natur gemäß, mit den entsprechenden Ableitungen von n' und g' zusammen gerade in solchen Verbindungen vor, aus denen die höchsten Differentialquotienten sich wegheben. Aber auch hiervon abgesehen hat eine systematische Untersuchung der Größen dritter Ordnung mit einem Ausdruck zu beginnen, der in der obigen Gruppe nicht enthalten ist, nämlich mit der ersten geometrischen Ableitung der Normalkrümmung, Θn.

Für die Darstellung $\mathfrak{M}_0 = 0$ der Grundkurve war (S. 147 (3))

$$n = \frac{L m_2^2 - 2 M m_2 m_1 + N m_1^2}{E m_2^2 - 2 F m_2 m_1 + G m_1^2} \tag{1}$$

oder (S. 200 (6))

$$n = \sum_{i, k} \mu_{1i} \mu_{1k} b_{ik}. \tag{2}$$

Wegen

$$\Theta \chi = \sum_l \mu_{1l} \frac{\partial \chi}{\partial u_l} \tag{3}$$

wird

$$(4)\qquad \Theta n = \sum_{i,k,l} \mu_{1i}\mu_{1k}\mu_{1l}\frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} + 2\sum_l \mu_{1l}\sum_{i,k} b_{ik}\mu_{1i}\frac{\partial \mu_{1k}}{\partial u_l}.$$

Ähnliche Ausdrücke sind an früheren Stellen wiederholt reduziert worden. Mittels der Formel S. 186 (25) findet man

$$\Theta n = \sum_{i,k,l} \mu_{1i}\mu_{1k}\mu_{1l}\frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} - \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\sum_{i,k,l,\nu} \mu_{1i}\mu_{2k}\mu_{1l}\mu_{1\nu}b_{ik}\overline{m}_{\nu l}$$
$$- 2\sum_{i,k,l,\varrho} \mu_{1i}\mu_{1l}\mu_{1\varrho}\begin{Bmatrix} \varrho\ l \\ k \end{Bmatrix} b_{ik}.$$

Die zweite Summe zerfällt, vom Faktor 2 abgesehen, in

$$-\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{\nu,l} \mu_{1\nu}\mu_{1l}\overline{m}_{\nu l} \equiv g$$

(S. 187 (1)) und

$$\sum_{i,k} \mu_{1i}\mu_{2k}b_{ik} \equiv t$$

(S. 196 (20)). Die dritte kann bei Vertauschung von ϱ mit k gleich

$$-2\sum_{i,k,l,\varrho} \mu_{1i}\mu_{1k}\mu_{1l}\begin{Bmatrix} k\ l \\ \varrho \end{Bmatrix} b_{i\varrho}$$

gesetzt werden. Demnach ergibt sich

$$(5)\qquad \Theta n = 2gt + \sum_{i,k,l} \mu_{1i}\mu_{1k}\mu_{1l}\left(\frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} - 2\sum_\varrho \begin{Bmatrix} k\ l \\ \varrho \end{Bmatrix} b_{i\varrho}\right).$$

Die noch stehen gebliebene Summe enthält, als Funktion der Größen $\mu_{1\nu}$ betrachtet, nur vier verschiedene Produkte, nämlich

$$\mu_{11}^3,\quad \mu_{11}^2\mu_{12},\quad \mu_{11}\mu_{12}^2,\quad \mu_{12}^3.$$

Der Koeffizient des zweiten ist

$$(6)\qquad \frac{\partial b_{11}}{\partial u_2} - 4\sum_\varrho \begin{Bmatrix} 1\ 2 \\ \varrho \end{Bmatrix} b_{1\varrho} + 2\left(\frac{\partial b_{12}}{\partial u_1} - \sum_\varrho \begin{Bmatrix} 1\ 1 \\ \varrho \end{Bmatrix} b_{2\varrho}\right),$$

und der des dritten

$$(7)\qquad \frac{\partial b_{22}}{\partial u_1} - 4\sum_\varrho \begin{Bmatrix} 1\ 2 \\ \varrho \end{Bmatrix} b_{2\varrho} + 2\left(\frac{\partial b_{12}}{\partial u_2} - \sum_\varrho \begin{Bmatrix} 2\ 2 \\ \varrho \end{Bmatrix} b_{1\varrho}\right).$$

Nach Elimination der beiden Ableitungen von b_{12} mittels der Fundamentalgleichungen (S. 229 (11)) nehmen diese Koeffizienten die Werte an

$$3\left(\frac{\partial b_{11}}{\partial u_2} - 2\sum_\varrho \begin{Bmatrix} 1\ 2 \\ \varrho \end{Bmatrix} b_{1\varrho}\right)$$

und

$$3\left(\frac{\partial b_{22}}{\partial u_1} - 2\sum_\varrho \begin{Bmatrix} 1\ 2 \\ \varrho \end{Bmatrix} b_{2\varrho}\right).$$

Setzt man demnach

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial b_{11}}{\partial u_1} - 2\sum_\varrho \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & \varrho \end{Bmatrix} b_{1\varrho} = b_{111} \\
&\frac{\partial b_{11}}{\partial u_2} - 2\sum_\varrho \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & \varrho \end{Bmatrix} b_{1\varrho} = b_{112} \\
(8) \qquad &\frac{\partial b_{22}}{\partial u_1} - 2\sum_\varrho \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & \varrho \end{Bmatrix} b_{2\varrho} = b_{221} \\
&\frac{\partial b_{22}}{\partial u_2} - 2\sum_\varrho \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & \varrho \end{Bmatrix} b_{2\varrho} = b_{222},
\end{aligned}$$

so erhält man die Formel

$$(9) \qquad \Theta n - 2gt = b_{111}\mu_{11}^3 + 3b_{112}\mu_{11}^2\mu_{12} + 3b_{221}\mu_{11}\mu_{12}^2 + b_{222}\mu_{12}^3.$$

Da die beiden Bestandteile der linken Seite Kurveninvarianten sind, so ist auch die rechte Seite eine solche, also eine simultane Invariante des Formensystems $(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathfrak{M}_0)$. Behufs Darstellung durch die Koeffizienten von $\mathfrak{M}_0$ (vgl. (1)) sind die Gleichungen

$$(10) \qquad \mu_{11} = \frac{m_2}{T\sqrt{\Delta}}, \qquad \mu_{12} = \frac{-m_1}{T\sqrt{\Delta}}$$

(S. 176 (9)) und

$$(11) \qquad \Delta = \frac{Em_2^2 - 2Fm_2m_1 + Gm_1^2}{T^2}$$

(S. 175 (3, 4)) zu benutzen. Sie liefern

$$(12) \qquad \Theta n - 2gt = \frac{b_{111}m_2^3 - 3b_{112}m_2^2m_1 + 3b_{221}m_2m_1^2 - b_{222}m_1^3}{(Em_2^2 - 2Fm_2m_1 + Gm_1^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

§ 151.

Christoffelsche Kovariante des Formenpaares (A, B). Fundamentalgrößen dritter Ordnung.

In die Entstehungsweise der Koeffizienten dieser Formel gewinnt man einen genaueren Einblick, wenn man für die Ableitungen der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung ein System von Transformationsgleichungen in derselben Weise herzustellen sucht wie im § 47 für die zweiten Differentialquotienten einer willkürlichen Funktion. Man wird zu diesem Zweck die zu

$$\mathsf{B} = \mathsf{B}'$$

gehörenden Transformationsformeln

$$(1) \qquad b_{ik} = \sum_{\lambda,\mu} b'_{\lambda\mu}\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\frac{\partial u_\mu}{\partial u_k}$$

differentiieren und die zweiten Ableitungen der neuen Variablen nach den alten mittels der Christoffelschen Relationen eliminieren. Die erste Operation liefert

$$\frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} = \sum_{\lambda,\mu,\nu} \frac{\partial b'_{\lambda\mu}}{\partial u'_\nu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k} \frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l} + \sum_{\lambda,\mu} b'_{\lambda\mu} \left(\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial^2 u'_\mu}{\partial u_k \partial u_l} + \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k} \frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i \partial u_l} \right).$$

Werden hierin aus S. 168 (23) die zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 u'_\mu}{\partial u_k \partial u_l} = \sum_\varrho \begin{Bmatrix} k & l \\ & \varrho \end{Bmatrix} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_\varrho} - \sum_{\alpha,\beta} \begin{Bmatrix} \alpha & \beta \\ & \mu \end{Bmatrix}' \frac{\partial u'_\alpha}{\partial u_k} \frac{\partial u'_\beta}{\partial u_l}$$

$$\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i \partial u_l} = \sum_\varrho \begin{Bmatrix} i & l \\ & \varrho \end{Bmatrix} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_\varrho} - \sum_{\alpha,\beta} \begin{Bmatrix} \alpha & \beta \\ & \lambda \end{Bmatrix}' \frac{\partial u'_\alpha}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\beta}{\partial u_l}$$

eingesetzt und die Gleichungen (1) in der Form

$$\sum_{\lambda,\mu} b'_{\lambda\mu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_\varrho} = b_{i\varrho}$$

$$\sum_{\lambda,\mu} b'_{\lambda\mu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_\varrho} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k} = b_{\varrho k}$$

benutzt, so findet sich, nach unmittelbar ersichtlicher Vertauschung von Bezeichnungen auch in den noch übrigen Gliedern,

$$(2) \quad \frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} - \sum_\varrho \left(\begin{Bmatrix} k & l \\ & \varrho \end{Bmatrix} b_{i\varrho} + \begin{Bmatrix} i & l \\ & \varrho \end{Bmatrix} b_{\varrho k} \right) =$$

$$\sum_{\lambda,\mu,\nu} \left(\frac{\partial b'_{\lambda\mu}}{\partial u_\nu} - \sum_\alpha \left(\begin{Bmatrix} \mu & \nu \\ & \alpha \end{Bmatrix}' b'_{\lambda\alpha} + \begin{Bmatrix} \lambda & \nu \\ & \alpha \end{Bmatrix}' b'_{\alpha\mu} \right) \right) \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k} \frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l}.$$

Setzt man demnach

$$(3) \quad \frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} - \sum_\varrho \left(\begin{Bmatrix} k & l \\ & \varrho \end{Bmatrix} b_{i\varrho} + \begin{Bmatrix} i & l \\ & \varrho \end{Bmatrix} b_{\varrho k} \right) = b_{ikl}$$

und wendet die entsprechende Bezeichnung auch für die transformierte Form an, so erhält man die Gleichungen

$$(4) \quad b_{ikl} = \sum_{\lambda,\mu,\nu} b'_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k} \frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l}.$$

Es sind die Transformationsgleichungen für die Koeffizienten einer trilinearen Differentialform

$$(5) \quad \sum_{i,k,l} b_{ikl}\, du_i\, \delta u_k\, \mathfrak{d} u_l \equiv \mathfrak{B}_3,$$

die als Christoffelsche Kovariante des Formenpaares (A, B) bezeichnet werden soll. Solange die Eigenschaft $b_{ki} = b_{ik}$ der Koeffizienten von B

nicht benutzt wird, können die Ausgangsformeln (1) als Transformationsgleichungen der bilinearen Differentialform

$$\sum_{i,k} b_{ik}\, du_i\, \delta u_k \equiv \mathfrak{B},$$

also $\mathfrak{B}_3$ als Kovariante des Formenpaares (A, $\mathfrak{B}$) betrachtet werden.

Wo es der Unterscheidung wegen nötig ist, muß die Form A, aus deren Koeffizienten die Christoffelschen Verbindungen $\left\{ {ik \atop l} \right\}$ gebildet sind, durch einen den Zeichen b_{ikl} und $\mathfrak{B}_3$ beigefügten oberen Index a kenntlich gemacht werden.

Setzt man die drei verschiedenen Differentiale in (5) einander gleich, so geht die trilineare Form in eine kubische

(6) $$\beta_{111}\, du^3 + \beta_{112}\, du^2 dv + \beta_{221}\, du\, dv^2 + \beta_{222}\, dv^3 \equiv \mathrm{B}_3$$

über, die demnach ebenfalls eine Kovariante von A und B ist. Die Koeffizienten haben einzeln die Werte

(7) $$\begin{aligned} \beta_{111} &= b_{111} \\ \beta_{112} &= b_{112} + b_{121} + b_{211} \\ \beta_{221} &= b_{221} + b_{212} + b_{122} \\ \beta_{222} &= b_{222}. \end{aligned}$$

Für

$$b_{ki} = b_{ik}$$

lassen sich diese Ausdrücke vereinfachen. Aus der Definitionsgleichung (3) folgt dann nämlich

(8) $$b_{kil} = b_{ikl},$$

d. h.

(9) $$b_{211} = b_{121}, \qquad b_{212} = b_{122},$$

und das System (4) enthält nur sechs Gleichungen. Die Formeln (7) gehen in

(10) $$\begin{aligned} \beta_{111} &= b_{111} \\ \beta_{112} &= b_{112} + 2b_{121} \\ \beta_{221} &= b_{221} + 2b_{212} \\ \beta_{222} &= b_{222} \end{aligned}$$

über. Die rechten Seiten der zweiten und dritten stimmen mit den Ausdrücken (6) und (7) des vorigen Paragraphen überein.

Alles dies gilt für ein beliebiges Formenpaar (A, B). Sind jedoch die Koeffizienten dieser Formen durch die zweite und dritte Fundamentalgleichung der Flächentheorie verbunden, so treten weitere Ver-

einfachungen ein. Aus der Definitionsgleichung für die Größen $\bar{b}_{ikl}$ (S. 228 (5)) ergibt sich nämlich der Zusammenhang

(11) $$\bar{b}_{ikl} = b_{ikl} - b_{ilk},$$

und die Fundamentalgleichungen (a. a. O. (10)) werden

(12) $$b_{112} - b_{121} = 0$$
$$b_{212} - b_{221} = 0.$$

Die Koeffizienten der kubischen Kovariante sind

(13) $$\beta_{111} = b_{111}, \qquad \beta_{112} = 3b_{112}, \qquad \beta_{221} = 3b_{221}, \qquad \beta_{222} = b_{222}.$$

Dies sind aber die in den Formeln S. 492 (8) vorkommenden Größen b_{ikl}.

Werden die Bezeichnungen der Formentheorie durch die der Flächentheorie ersetzt, so möge

(14) $$b_{111} = P, \qquad b_{112} = Q, \qquad b_{221} = R, \qquad b_{222} = S$$

geschrieben werden. Diese Größen, mit den Binomialkoeffizienten der Zahl 3 multipliziert, sind dann also Koeffizienten einer kubischen Differentialform, die gleichzeitig mit A und B transformiert wird, d. h. für die die Gleichung gilt:

(15) $$Pdu^3 + 3Qdu^2dv + 3Rdudv^2 + Sdv^3 = P'du'^3 + 3Q'du'^2dv' + 3R'du'dv'^2 + S'dv'^3$$

P, Q, R, S heißen die **Fundamentalgrößen dritter Ordnung** der Fläche. Mittels der Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung dargestellt, haben sie die Werte:

(16) $$P = \frac{\partial L}{\partial u} - 2(LJ_1 + MJ_2)$$
$$Q = \frac{\partial L}{\partial v} - 2(LJ_1' + MJ_2')$$
$$R = \frac{\partial N}{\partial u} - 2(MJ_1' + NJ_2')$$
$$S = \frac{\partial N}{\partial v} - 2(MJ_1'' + NJ_2'').$$

Den Fundamentalgleichungen zufolge kann man auch

(17) $$Q = \frac{\partial M}{\partial u} - (MJ_1 + NJ_2) - (LJ_1' + MJ_2')$$
$$R = \frac{\partial M}{\partial v} - (MJ_1' + NJ_2') - (LJ_1'' + MJ_2'')$$

setzen.

§ 152.

Herleitung des Ausdruckes von Θn durch gewöhnliche Differentiationen.

In der Formel für Θn tritt die kubische Kovariante von A und B selbst auf, wenn vermittelst der Kurvendarstellung

$$m_1\, du + m_2\, dv = 0$$

oder

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}\, du + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\, dv = 0$$

von den Ableitungen auf die Differentiale zurückgegriffen wird. Unter Berücksichtigung des Fortgangsprinzips (S. 131—132, 176) ergibt sich nämlich aus S. 492 (12) oder

$$(1)\qquad \Theta n - 2gt = \frac{P\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^3 - 3Q\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + 3R\frac{\partial \varphi}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 - S\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^3}{\left(E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

die Gleichung

$$(2)\qquad \frac{dn}{ds} = 2gt + \frac{P du^3 + 3Q du^2 dv + 3R du\, dv^2 + S dv^3}{(E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für die Tangentialkrümmung und die geodätische Windung sind dabei die Ausdrücke S. 127 (6) und S. 193 (7) gesetzt zu denken.

Bei dem Versuche, die Formel (2) ganz direkt, nämlich ohne Benutzung des Algorithmus der geometrischen Differentiationen, aus

$$n = \frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}}$$

abzuleiten, muß man — so scheint es auf den ersten Anblick — auf unübersehbare Ausdrücke stoßen. Es ist deshalb nützlich, sich klar zu machen, wie einfach die Rechnung tatsächlich wird, wenn man, wie es selbstverständlich ist, die Kurveninvarianten zweiter Ordnung als bereits bekannt betrachtet und sich außerdem der Rolle erinnert, die die Christoffelschen Verbindungen überall da spielen, wo Ableitungen der Fundamentalgrößen erster Ordnung vorkommen.

Die Ausgangsgleichung ist

$$(3)\qquad \mathsf{A}^2 dn = \begin{vmatrix} \mathsf{A} & d\mathsf{A} \\ \mathsf{B} & d\mathsf{B} \end{vmatrix},$$

und die Differentialbildung liefert

$$d\mathsf{A} = \mathsf{A}_1 + 2\mathsf{A}_2$$
$$d\mathsf{B} = \mathsf{B}_1 + 2\mathsf{B}_2,$$

wenn für diese Rechnung der Kürze wegen

$$dE du^2 + 2 dF du\, dv + dG dv^2 = \mathsf{A}_1$$

$$E du\, d^2u + F(du\, d^2v + dv\, d^2u) + G dv\, d^2v = \mathsf{A}_2$$

gesetzt und $\mathsf{B}_1, \mathsf{B}_2$ entsprechend definiert werden. Die Gleichung (3) geht in

$$(4) \qquad \mathsf{A}^2 dn = \begin{vmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{A}_1 \\ \mathsf{B} & \mathsf{B}_1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{A}_2 \\ \mathsf{B} & \mathsf{B}_2 \end{vmatrix}$$

über. Nach den aus S. 119 (5) und S. 127 (5) folgenden Formeln

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial u} &= 2(EJ_1 + FJ_2), & \frac{\partial E}{\partial v} &= 2(EJ_1' + FJ_2') \\ \frac{\partial F}{\partial u} &= FJ_1 + GJ_2 + EJ_1' + FJ_2', & \frac{\partial F}{\partial v} &= FJ_1' + GJ_2' + EJ_1'' + FJ_2'' \\ \frac{\partial G}{\partial u} &= 2(FJ_1' + GJ_2'), & \frac{\partial G}{\partial v} &= 2(FJ_1'' + GJ_2'') \end{aligned}$$

wird hierin

$$(6) \qquad \begin{aligned} \frac{1}{2} \mathsf{A}_1 = {} & (E du + F dv)(J_1 du^2 + 2J_1' du\, dv + J_1'' dv^2) \\ & + (F du + G dv)(J_2 du^2 + 2J_2' du\, dv + J_2'' dv^2). \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{vmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{A}_2 \\ \mathsf{B} & \mathsf{B}_2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} (E du + F dv) du + (F du + G dv) dv, & (E du + F dv) d^2u + (F du + G dv) d^2v \\ (L du + M dv) du + (M du + N dv) dv, & (L du + M dv) d^2u + (M du + N dv) d^2v \end{vmatrix},$$

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{A}_2 \\ \mathsf{B} & \mathsf{B}_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E du + F dv, & F du + G dv \\ L du + M dv, & M du + N dv \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} du & dv \\ d^2u & d^2v \end{vmatrix}.$$

Das Auftreten der Verbindungen $J_1 du^2 + \cdots$, $J_2 du^2 + \cdots$ und namentlich der Umstand, daß die zweiten Differentiale allein in der Determinante $du\, d^2v - dv\, d^2u$ vorkommen, weisen auf die Benutzung der Formel S. 127 (6) hin:

$$(8) \quad du\, d^2v - dv\, d^2u = \frac{g\, ds^3}{T} + \begin{vmatrix} J_1 du^2 + 2J_1' du\, dv + J_1'' dv^2, & du \\ J_2 du^2 + 2J_2' du\, dv + J_2'' dv^2, & dv \end{vmatrix},$$

und der Koeffizient von $du\, d^2v - dv\, d^2u$ in (7) außerdem auf die Gleichung S. 193 (7):

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} E du + F dv, & F du + G dv \\ L du + M dv, & M du + N dv \end{vmatrix} = t T ds^2.$$

Bevor aber diese angewendet wird, können aus (4), nach Hinzuziehung von (6), (7), (8) und nachdem man in $-\mathsf{B}\mathsf{A}_1$

$$\mathsf{B} = (L\,du + M\,dv)\,du + (M\,du + N\,dv)\,dv$$

geschrieben hat, zwei Paare von Gliedern gestrichen, und dann aus sämtlichen Gliedern der Faktor $\mathsf{A} \equiv ds^2$ weggelassen werden. Es wird

$$(10)\quad \mathsf{A}\,dn = 2g\,t\,ds^3 + \mathsf{B}_1 - 2(L\,du + M\,dv)(J_1 du^2 + 2J_1' du\,dv + J_1'' dv^2) \\ - 2(M\,du + N\,dv)(J_2 du^2 + 2J_2' du\,dv + J_2'' dv^2)$$

Setzt man nun

$$\mathsf{B}_1 \equiv dL\,du^2 + 2\,dM\,du\,dv + dN\,dv^2$$

ein, so vollzieht sich die Vereinigung und Vereinfachung der Koeffizienten von du^3, $du^2dv, \ldots$ genau wie auf S. 491—492, und es erscheint unmittelbar die Gleichung (2).

Zur Ergänzung der im § 25 aufgestellten Formeln (4) und (7) für E, F, G; L, M, N mögen die Werte der Fundamentalgrößen dritter Ordnung für die Flächendarstellung

$$\text{(III)}\qquad z = z(x, y)$$

hier angegeben werden. Die in den Definitionsgleichungen S. 495 (16) vorkommenden Christoffelschen Verbindungen haben die Werte

$$(11)\quad \begin{aligned} J_1 &= \frac{pr}{p^2+q^2+1}, & J_1' &= \frac{ps}{p^2+q^2+1}, & J_1'' &= \frac{pt}{p^2+q^2+1} \\ J_2 &= \frac{qr}{p^2+q^2+1}, & J_2' &= \frac{qs}{p^2+q^2+1}, & J_2'' &= \frac{qt}{p^2+q^2+1}. \end{aligned}$$

Setzt man, wie schon auf S. 106,

$$(12)\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = z_{30},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = z_{21},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = z_{12},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = z_{03},$$

so erhält man

$$(13)\quad \begin{aligned} P &= \frac{(p^2+q^2+1)\,z_{30} - 3r(pr+qs)}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\ Q &= \frac{(p^2+q^2+1)\,z_{21} - r(ps+qt) - 2s(pr+qs)}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\ R &= \frac{(p^2+q^2+1)\,z_{12} - t(pr+qs) - 2s(ps+qt)}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}} \\ S &= \frac{(p^2+q^2+1)\,z_{03} - 3t(ps+qt)}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}}, \end{aligned}$$

wenigstens unter der Annahme $\varepsilon = +1$ in den oben zitierten Formeln für L, M, N. Anderenfalls ist den rechten Seiten das Vorzeichen ε hinzuzufügen.

§ 153.

Normalschnitte, die von ihrem Krümmungskreise superoskuliert werden. Die Differentiale von H und K.

Unter den Anwendungen der Formel (2) verdient eine hervorgehoben zu werden. Die Kurve, längs deren die Änderung der Normalkrümmung beim Übergange vom Punkte A zu einem benachbarten untersucht werden soll, sei der Normalschnitt selbst, der zu dem Differentialverhältnis $\frac{dv}{du}$ gehört. Da für ihn der Winkel zwischen Hauptnormale und Flächennormale im Punkte A gleich Null (oder π) ist, so wird $g = 0$, und demnach

$$(1) \qquad ds^2 \mathfrak{d}n = P du^3 + 3Q du^2 dv + 3R du\, dv^2 + S dv^3,$$

wenn der Fortgang längs des Normalschnitts durch das Zeichen $\mathfrak{d}$ angedeutet wird. Die Differentiale zweiter Ordnung sind in diesem Ausdruck nicht mehr enthalten, vielmehr kann $\frac{\mathfrak{d}n}{ds}$, von den nur auf A bezüglichen Fundamentalgrößen abgesehen, als Funktion von $\frac{dv}{du}$ oder von $m_1 : m_2$ oder $\frac{\partial \varphi}{\partial u} : \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ allein dargestellt werden. Wird $\mathfrak{d}n = 0$ angenommen, so lehrt die Gleichung

$$(2) \qquad P du^3 + 3Q du^2 dv + 3R du\, dv^2 + S dv^3 = 0,$$

daß durch einen beliebigen Flächenpunkt mindestens ein Normalschnitt geht, der von seinem Krümmungskreise superoskuliert wird.

Wo irgend Ableitungen dritter Ordnung ins Spiel kommen, empfiehlt sich die Benutzung der Fundamentalgrößen P, Q, R, S immer dann, wenn die Symmetrie der Untersuchung gewahrt werden kann oder soll. Nach der Natur der flächentheoretischen Aufgaben ist dies nicht immer möglich. So erscheinen bei der Betrachtung einer einzelnen Schale der Krümmungsmittelpunktsfläche notwendig bestimmte Größen dritter Ordnung vor anderen bevorzugt, wie es die Formeln des § 115 erkennen lassen. Aber auch in solchen Fällen gewährt die Einführung von P, Q, R, S vielfach einen Überblick über den Formelzusammenhang.

In sehr übersichtlicher Weise lassen sich die Ableitungen der elementaren symmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen mittels der Fundamentalgrößen dritter Ordnung darstellen. Aus

$$H = \frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2}$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

findet man ganz direkt:

$$(3)\quad \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= \frac{1}{T^2}\left(G\frac{\partial L}{\partial u} - 2F\frac{\partial M}{\partial u} + E\frac{\partial N}{\partial u}\right) \\ &\quad + 2(\eta_{11}J_1 + \eta_{12}J_1') + 2(\eta_{21}J_2 + \eta_{22}J_2') \\ \frac{\partial H}{\partial v} &= \frac{1}{T^2}\left(G\frac{\partial L}{\partial v} - 2F\frac{\partial M}{\partial v} + E\frac{\partial N}{\partial v}\right) \\ &\quad + 2(\eta_{11}J_1' + \eta_{12}J_1'') + 2(\eta_{21}J_2' + \eta_{22}J_2'') \end{aligned}$$

$$(4)\quad \begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial u} &= \frac{1}{T^2}\left(N\frac{\partial L}{\partial u} - 2M\frac{\partial M}{\partial u} + L\frac{\partial N}{\partial u}\right) \\ &\quad - 2K(J_1 + J_2') \\ \frac{\partial K}{\partial v} &= \frac{1}{T^2}\left(N\frac{\partial L}{\partial v} - 2M\frac{\partial M}{\partial v} + L\frac{\partial N}{\partial v}\right) \\ &\quad - 2K(J_1' + J_2''). \end{aligned}$$

Bei Einführung der Ableitungen von L, M, N aus den Gleichungen S. 495 (16, 17) fallen die Christoffelschen Größen weg, und es bleibt

$$(5)\quad \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial u} &= \frac{1}{T^2}(GP - 2FQ + ER) \\ \frac{\partial H}{\partial v} &= \frac{1}{T^2}(GQ - 2FR + ES) \end{aligned}$$

$$(6)\quad \begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial u} &= \frac{1}{T^2}(NP - 2MQ + LR) \\ \frac{\partial K}{\partial v} &= \frac{1}{T^2}(NQ - 2MR + LS). \end{aligned}$$

Die hieraus zusammenzusetzenden Ausdrücke

$$(7)\quad dH = \frac{1}{T^2}\big(G(Pdu + Qdv) - 2F(Qdu + Rdv) + E(Rdu + Sdv)\big)$$

$$(8)\quad dK = \frac{1}{T^2}\big(N(Pdu + Qdv) - 2M(Qdu + Rdv) + L(Rdu + Sdv)\big)$$

können als simultane algebraische Invarianten je einer der beiden Grundformen und der kubischen Kovariante aufgefaßt werden. Es sei

$$(9)\quad Pdu^3 + 3Qdu^2dv + 3Rdudv^2 + Sdv^3 = \mathsf{H}.$$

Aus der Gleichung

$$\mathsf{H} = \mathsf{H}'$$

würde für eine beliebige Form H

$$\frac{\partial \mathsf{H}}{\partial \xi_i} = \sum_\lambda \frac{\partial \mathsf{H}'}{\partial \xi'_\lambda} s_{\lambda i}$$

(vgl. S. 154) und weiter

(10)
$$\frac{\partial^2 \mathsf{H}}{\partial \xi_i \partial \xi_k} = \sum_{\lambda,\mu} \frac{\partial^2 \mathsf{H}'}{\partial \xi'_\lambda \partial \xi'_\mu} s_{\lambda i} s_{\mu k}$$

folgen. Der Beweis dafür, daß dann

(11)
$$\sum_{i,k} \alpha_{ik} \frac{\partial^2 \mathsf{H}}{\partial \xi_i \partial \xi_k} = \sum_{\lambda,\mu} \alpha'_{\lambda\mu} \frac{\partial^2 \mathsf{H}'}{\partial \xi'_\lambda \partial \xi'_\mu}$$

wird, unterscheidet sich in nichts von dem auf S. 156 für einen speziellen Fall geführten. Hat H, wie jetzt festgehalten werden soll, die Bedeutung (9), so werde, in Verallgemeinerung des Operationszeichens H_a (S. 160 (3)),

(12)
$$\frac{1}{6} \sum_{i,k} \alpha_{ik} \frac{\partial^2 \mathsf{H}}{\partial \xi_i \partial \xi_k} = H_a(\mathsf{A}, \mathsf{H})$$

(13)
$$\frac{1}{6} \frac{b}{a} \sum_{i,k} \beta_{ik} \frac{\partial^2 \mathsf{H}}{\partial \xi_i \partial \xi_k} = H_a(\mathsf{B}, \mathsf{H})$$

oder ausführlicher

(14)
$$\frac{1}{6a}\left(a_{22} \frac{\partial^2 \mathsf{H}}{\partial \xi_1^2} - 2a_{12} \frac{\partial^2 \mathsf{H}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + a_{11} \frac{\partial^2 \mathsf{H}}{\partial \xi_2^2}\right) = H_a(\mathsf{A}, \mathsf{H})$$

(15)
$$\frac{1}{6a}\left(b_{22} \frac{\partial^2 \mathsf{H}}{\partial \xi_1^2} - 2b_{12} \frac{\partial^2 \mathsf{H}}{\partial \xi_1 \partial \xi_2} + b_{11} \frac{\partial^2 \mathsf{H}}{\partial \xi_2^2}\right) = H_a(\mathsf{B}, \mathsf{H})$$

gesetzt. Man erhält dann, wie die Ausdrücke von $\frac{\partial^2 \mathsf{H}}{\partial \xi_1^2}, \ldots$ unmittelbar erkennen lassen,

(16)
$$dH = H_a(\mathsf{A}, \mathsf{H})$$

(17)
$$dK = H_a(\mathsf{B}, \mathsf{H}).$$

§ 154.

Die Differentiale der Hauptkrümmungen.

Aus den Differentialen von H und K setzen sich die der Hauptkrümmungen selbst nach folgenden Formeln zusammen:

(1)
$$dn_1 = \frac{n_1\, dH - dK}{n_1 - n_2}$$
$$dn_2 = \frac{dK - n_2\, dH}{n_1 - n_2}.$$

Durch Multiplikation ergibt sich

(2) $$(n_1 - n_2)^2 dn_1 dn_2 = - K dH^2 + H dH dK - dK^2$$

oder

(3) $$(H^2 - 4K) dn_1 dn_2 = \left(- K \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^2 + H \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial K}{\partial u} - \left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)^2\right) du^2$$
$$+ \left(- 2K \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial H}{\partial v} + H \left(\frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial K}{\partial v} + \frac{\partial K}{\partial u} \frac{\partial H}{\partial v}\right) - 2 \frac{\partial K}{\partial u} \frac{\partial K}{\partial v}\right) du dv$$
$$+ \left(- K \left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)^2 + H \frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial K}{\partial v} - \left(\frac{\partial K}{\partial v}\right)^2\right) dv^2.$$

Die Nullsetzung dieses Ausdrucks liefert die Differentialgleichung der Kurven, von denen im § 120 die Rede gewesen ist, längs deren nämlich eine Hauptkrümmung (oder ein Hauptkrümmungsradius) einen konstanten Wert hat.

Um die Koeffizienten der quadratischen Differentialform durch die Fundamentalgrößen dritter Ordnung darzustellen, könnte man einfach die Formel (2) mit (16) und (17) des vorigen Paragraphen verbinden. Eine etwas veränderte Darstellung ergibt sich durch Einzelberechnung der Koeffizienten aus (5) und (6), nämlich

$$- K \left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^2 + H \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial K}{\partial u} - \left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)^2 =$$
$$\frac{1}{T^2} \left((\eta_{21} P + (\eta_{22} - \eta_{11}) Q - \eta_{12} R)^2 + ((\eta_{22} - \eta_{11})^2 + 4 \eta_{12} \eta_{21}) (PR - Q^2)\right),$$

und durch Vertauschung von u mit v, wobei die beiden Größenreihen

$$\begin{matrix} \eta_{11} & \eta_{12} & P & Q \\ \eta_{22} & \eta_{21} & S & R \end{matrix}$$

ineinander übergehen:

$$- K \left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)^2 + H \frac{\partial H}{\partial v} \frac{\partial K}{\partial v} - \left(\frac{\partial K}{\partial v}\right)^2 =$$
$$\frac{1}{T^2} \left((\eta_{21} Q + (\eta_{22} - \eta_{11}) R - \eta_{12} S)^2 + ((\eta_{22} - \eta_{11})^2 + 4 \eta_{12} \eta_{21}) (QS - R^2)\right).$$

Drittens ist

$$- 2K \frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial H}{\partial v} + H \left(\frac{\partial H}{\partial u} \frac{\partial K}{\partial v} + \frac{\partial K}{\partial u} \frac{\partial H}{\partial v}\right) - 2 \frac{\partial K}{\partial u} \frac{\partial K}{\partial v} =$$
$$\frac{1}{T^2} \left(2(\eta_{21} P + (\eta_{22} - \eta_{11}) Q - \eta_{12} R)(\eta_{21} Q + (\eta_{22} - \eta_{11}) R - \eta_{12} S)\right.$$
$$\left. + ((\eta_{22} - \eta_{11})^2 + 4 \eta_{12} \eta_{21}) (PS - QR)\right).$$

Werden diese Werte in (3) eingeführt und die Gleichung

(4) $$(\eta_{22} - \eta_{11})^2 + 4 \eta_{12} \eta_{21} = H^2 - 4K$$

benutzt, so folgt

$$(5)\qquad (H^2-4K)\,dn_1\,dn_2 =$$

$$\frac{1}{T^2}\big((\eta_{21}P+(\eta_{22}-\eta_{11})Q-\eta_{12}R)\,du+(\eta_{21}Q+(\eta_{22}-\eta_{11})R-\eta_{12}S)\,dv\big)^2$$
$$+\frac{H^2-4K}{T^2}\big((PR-Q^2)\,du^2+(PS-QR)\,du\,dv+(QS-R^2)\,dv^2\big).$$

Von den beiden Bestandteilen der rechten Seite ist der erste eine algebraische Kovariante des Formensystems (A, B, H), der zweite, von dem invarianten Faktor H^2-4K abgesehen, eine Kovariante von A und H allein, in der außerdem die Form A nur in ihrer Determinante $a\equiv T^2$ zum Vorschein kommt. Schreibt man

$$(6)\quad \frac{1}{T}\big(\eta_{21}(P\,du+Q\,dv)+(\eta_{22}-\eta_{11})(Q\,du+R\,dv)-\eta_{12}(R\,du+S\,dv)\big)$$
$$=\frac{1}{T^2}\big(c_{22}(P\,du+Q\,dv)-2c_{12}(Q\,du+R\,dv)+c_{11}(R\,du+S\,dv)\big)$$

(vgl. S. 194(13) und S. 224(12), so sieht man, daß diese erste Größe aus A, Γ und H ebenso gebildet ist wie vorher dK aus A, B und H, daß also

$$(7)\quad \frac{1}{T^2}\begin{vmatrix} P\,du+Q\,dv, & Q\,du+R\,dv, & R\,du+S\,dv\\ E & F & G\\ L & M & N\end{vmatrix}=H_a(\Gamma,\mathsf{H})$$

gesetzt werden kann.

Die Größe an zweiter Stelle in (5) steht in unmittelbarem Zusammenhange mit der Hesseschen Determinante von H,

$$(8)\qquad H(\mathsf{H})\equiv\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2\mathsf{H}}{\partial\xi_1^2}, & \dfrac{\partial^2\mathsf{H}}{\partial\xi_1\partial\xi_2}\\ \dfrac{\partial^2\mathsf{H}}{\partial\xi_2\partial\xi_1}, & \dfrac{\partial^2\mathsf{H}}{\partial\xi_2^2}\end{vmatrix},$$

denn es ist

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} P\,du+Q\,dv, & Q\,du+R\,dv\\ Q\,du+R\,dv, & R\,du+S\,dv\end{vmatrix}=\frac{1}{36}H(\mathsf{H}).$$

Diese quadratische Kovariante von H erscheint durch Division mit T^2 in eine absolute Kovariante verwandelt, wie es die Gleichungen

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2\mathsf{H}}{\partial\xi_1^2}, & \dfrac{\partial^2\mathsf{H}}{\partial\xi_1\partial\xi_2}\\ \dfrac{\partial^2\mathsf{H}}{\partial\xi_2\partial\xi_1}, & \dfrac{\partial^2\mathsf{H}}{\partial\xi_2^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2\mathsf{H}'}{\partial\xi_1'^2}, & \dfrac{\partial^2\mathsf{H}'}{\partial\xi_1'\partial\xi_2'}\\ \dfrac{\partial^2\mathsf{H}'}{\partial\xi_2'\partial\xi_1'}, & \dfrac{\partial^2\mathsf{H}'}{\partial\xi_2'^2}\end{vmatrix}s^2$$
$$T^2=T'^2s^2$$

bedingen.

Durch Elimination der drei Größen

$$P\xi_1+Q\xi_2,\quad Q\xi_1+R\xi_2,\quad R\xi_1+S\xi_2$$

aus den Ausdrücken der drei linearen Kovarianten und der Form H selbst ergibt sich die Relation

$$(10) \qquad 2\Gamma H_a(\Gamma, \mathsf{H}) =$$
$$(H\mathsf{B} - 2K\mathsf{A})H_a(\mathsf{A}, \mathsf{H}) + (H\mathsf{A} - 2\mathsf{B})H_a(\mathsf{B}, \mathsf{H}) - (H^2 - 4K)\mathsf{H}.$$

§ 155.

Geometrische Differentiation der Tangentialkrümmung.

Unter den auf eine Flächenkurve bezüglichen geometrischen Größen, die von dritten Differentialquotienten der Funktion φ oder zweiten Ableitungen der Formenkoeffizienten m_ν abhängen, aber in den Fundamentalgleichungen nicht vorkommen (vgl. S. 490), befindet sich auch Θg. Bedenkt man, daß

$$(1) \qquad g = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k} \mu_{1i}\mu_{1k}\overline{m}_{ik}$$

ist (S. 187 (6)), während

$$n = \sum_{i,k} \mu_{1i}\mu_{1k}\mathfrak{b}_{ik}$$

war, so darf man erwarten, daß bei der Reduktion von Θg nach der bei Θn befolgten Methode eine Kovariante auftreten wird, die aus M (S. 181 (5)) ebenso entsteht wie $\mathfrak{B}_3$ aus B oder $\mathfrak{B}$, nämlich nach dem Christoffelschen Verfahren. Sie hätte schon im § 57 eingeführt werden können, wenn es sich dort um $\Theta' g$ und $\Theta g'$ selbst, nicht gerade um einen Ausdruck gehandelt hätte, aus dem die zweiten Ableitungen der Größen m_ν wegfallen.

Die Annahme $\Theta g = 0$ liefert die Differentialgleichung der Kurven konstanter geodätischer Krümmung (§ 95—96).

Beginnt man nun die Berechnung wie auf S. 491, so erhält man zunächst

$$(2) \qquad \Theta(g\sqrt{\Delta}) = -\sum_{i,k,l} \mu_{1i}\mu_{1k}\mu_{1l}\frac{\partial \overline{m}_{ik}}{\partial u_l}$$
$$- \sum_l \mu_{1l} \sum_{i,k} \overline{m}_{ik}\left(\mu_{1i}\frac{\partial \mu_{1k}}{\partial u_l} + \mu_{1k}\frac{\partial \mu_{1i}}{\partial u_l}\right).$$

Diese Gleichung entspricht den Formeln (6) und (7) auf S. 208. Anstatt aber, wie dort, auf die zweiten Differentialquotienten als solche auszugehen, bleibt man bei den Ableitungen $\frac{\partial \overline{m}_{ik}}{\partial u_l}$ stehen und benutzt nur wieder den Ausdruck von $\frac{\partial \mu_{1k}}{\partial u_l}$ (S. 186 (25)), sowie außer (1) die Formeln S. 208 (2, 4). Dann treten sofort die Größenverbindungen

$$(3) \qquad \frac{\partial \overline{m}_{ik}}{\partial u_l} - \sum_\varrho \left(\begin{Bmatrix} k\,l \\ \varrho \end{Bmatrix} \overline{m}_{i\varrho} + \begin{Bmatrix} i\,l \\ \varrho \end{Bmatrix} \overline{m}_{\varrho k}\right) = \overline{m}_{ikl}$$

auf, die den Größen b_{ikl} (S. 493 (3)) genau entsprechen. Es ergibt sich

(4) $$\Theta g = -gg' - \frac{2g}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k} \mu_{1k}\mu_{2i}\overline{m}_{ik} - \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k,l} \mu_{1i}\mu_{1k}\mu_{1l}\overline{m}_{ikl}.$$

Der zweite Bestandteil ist aus dem Ausdruck von $\Theta(\sqrt{\Delta})$ entstanden. Will man der Formel für Θg die für $\Theta' g$, sowie die für die geometrischen Ableitungen von g' an die Seite stellen, so braucht man auch den Wert von $\Theta'(\sqrt{\Delta})$ (S. 208 (5)). Der Gleichförmigkeit mit (1) und

(5) $$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k} \mu_{1i}\mu_{2k}\overline{m}_{ik} = g'$$

wegen mögen noch folgende Definitionen eingeführt werden:

(6) $$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k} \mu_{1k}\mu_{2i}\overline{m}_{ik} = h'$$

(7) $$\frac{-1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k} \mu_{2k}\mu_{2i}\overline{m}_{ik} = h.$$

Dann ist

(8) $$\frac{\Theta(\sqrt{\Delta})}{\sqrt{\Delta}} = h'$$

(9) $$\frac{\Theta'(\sqrt{\Delta})}{\sqrt{\Delta}} = -h,$$

und die Formel (4) lautet

(10) $$\Theta g = -gg' - 2gh' - \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k,l} \mu_{1i}\mu_{1k}\mu_{1l}\overline{m}_{ikl}.$$

Für die Größe $\Theta' g$ findet man, von S. 208 (7) ausgehend und die Berechnung in derselben Weise wie bei Θg fortsetzend,

(11) $$\Theta' g = g'^2 + g'h' + gh - \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k,l} \mu_{1i}\mu_{1k}\mu_{2l}\overline{m}_{ikl}.$$

Ebenso braucht die Reduktion von $\Theta g'$ und $\Theta' g'$ nicht im einzelnen erläutert zu werden; es ergibt sich

(12) $$\Theta g' = g^2 - gh - g'h' + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k,l} \mu_{1i}\mu_{2k}\mu_{1l}\overline{m}_{ikl}$$

(13) $$\Theta' g' = -gg' + 2g'h + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k,l} \mu_{1i}\mu_{2k}\mu_{2l}\overline{m}_{ikl}.$$

Rechnungsmäßig bedarf das Gleichungssystem (10, 11, 12, 13) noch einer Ergänzung. Jede der Größen $\overline{m}_{ikl}$ enthält eine bestimmte

zweite Ableitung eines der beiden Formenkoeffizienten m_1, m_2, nämlich $\frac{\partial^2 m_i}{\partial u_k \partial u_l}$, und vier bestimmte Verbindungen aus diesen Differentialquotienten erscheinen hier als durch die geometrischen Ableitungen Θg, $\Theta' g$, $\Theta g'$ und $\Theta' g'$ vertreten. Sämtliche zweiten Ableitungen kommen vor, wenn noch Θh, $\Theta' h$, $\Theta h'$ und $\Theta' h'$ hinzugenommen werden. Unter den acht Größen $\Theta g, \ldots \Theta' h'$ sind dann freilich zwei überflüssig, weil die Anzahl der Ableitungen $\frac{\partial^2 m_i}{\partial u_k \partial u_l}$ nur gleich sechs ist.

Die hinzutretenden Gleichungen lauten

$$\Theta h' = \quad g^2 - gh - h'^2 + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k,l} \mu_{2i} \mu_{1k} \mu_{1l} \overline{m}_{ikl} \tag{14}$$

$$\Theta' h' = -gg' + g'h + hh' + \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k,l} \mu_{2i} \mu_{1k} \mu_{2l} \overline{m}_{ikl} \tag{15}$$

$$\Theta h = \quad gg' + gh' - hh' - \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k,l} \mu_{2i} \mu_{2k} \mu_{1l} \overline{m}_{ikl} \tag{16}$$

$$\Theta' h = -g'^2 - g'h' + h^2 - \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k,l} \mu_{2i} \mu_{2k} \mu_{2l} \overline{m}_{ikl}. \tag{17}$$

Die Anzahl dieser Formeln verringert sich, und die Ausdrücke selbst erfahren eine Vereinfachung, wenn die Kurve durch die Gleichung $\varphi(u, v) = \text{const.}$ dargestellt wird, die Differentialform $\mathfrak{M}_0$ also der Bedingung der Integrabilität genügt. Die Größen g' und h' sind nämlich mit der Integrabilitäts-Invariante durch eine einfache Gleichung verbunden,

$$\begin{aligned} h' - g' &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k} \mu_{1k} \mu_{2i} (\overline{m}_{ik} - \overline{m}_{ki}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{i,k} \mu_{1k} \mu_{2i} \left(\frac{\partial m_i}{\partial u_k} - \frac{\partial m_k}{\partial u_i} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} (\mu_{11} \mu_{22} - \mu_{12} \mu_{21}) \left(\frac{\partial m_2}{\partial u_1} - \frac{\partial m_1}{\partial u_2} \right), \end{aligned}$$

d. h.

$$h' - g' = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} J_a(\mathfrak{M}_0). \tag{18}$$

Werden nun unter der Annahme

$$\frac{\partial m_2}{\partial u_1} - \frac{\partial m_1}{\partial u_2} = 0,$$

also

$$m_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \quad m_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial u_2},$$

die Zeichen

$$\mu_{11} \quad \mu_{12} \quad \mu_{21} \quad \mu_{22} \quad \overline{m}_{ik}$$

durch

$$\varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \varphi_1' \quad \varphi_2' \quad \varphi_{ik}$$

(vgl. S. 176 und S. 169, 181), und entsprechend

$$\overline{m}_{ikl} \quad \text{durch} \quad \varphi_{ikl}$$

ersetzt, so treten wegen $h' = g'$ an die Stelle der Gleichungen (10) bis (13) die folgenden:

(19) $$\Theta g = -3gg' - \frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}} \sum_{i,k,l} \varphi_i \varphi_k \varphi_l \varphi_{ikl} \cdot$$

(20) $$\Theta' g = 2g'^2 + gh - \frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}} \sum_{i,k,l} \varphi_i \varphi_k \varphi_l' \varphi_{ikl}$$

(21) $$\Theta g' = g^2 - gh - g'^2 + \frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}} \sum_{i,k,l} \varphi_i \varphi_k' \varphi_l \varphi_{ikl}$$

(22) $$\Theta' g' = -gg' + 2g'h + \frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}} \sum_{i,k,l} \varphi_i \varphi_k' \varphi_l' \varphi_{ikl}.$$

Die Formel (14) wird mit (12) oder (21), (15) mit (13) oder (22) identisch, und die beiden noch übrigen heißen

(23) $$\Theta h = \quad 2gg' - g'h - \frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}} \sum_{i,k,l} \varphi_i' \varphi_k' \varphi_l \varphi_{ikl} \cdot$$

(24) $$\Theta' h = -2g'^2 + h^2 - \frac{1}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}} \sum_{i,k,l} \varphi_i' \varphi_k' \varphi_l' \varphi_{ikl}.$$

§ 156.

Umformung der gefundenen Ausdrücke. Äquivalenzen zwischen geometrischen Ableitungen.

Die Ausdrücke (19) bis (22) der geometrischen Ableitungen von g und g' erscheinen von einem bestimmten Gesichtspunkt aus betrachtet nicht in ihrer einfachsten Form.

Nach S. 187 (4) und S. 189 (11) kann man auch von

(1) $$g = \sum_{i,k} \mu_{2i} \mu_{1k} \overline{m}_{1,ik}$$

(2) $$g' = -\sum_{i,k} \mu_{2i} \mu_{2k} \overline{m}_{1,ik}$$

ausgehen; Formeln, die sich äußerlich von den früheren durch das Fehlen des Nenners $\sqrt{\Delta}$ unterscheiden. Während nun in den bisher benutzten Ausdrücken nur solche Größen stehen, die aus den Koeffizienten von $\mathfrak{M}_0$ selbst nach dem Christoffelschen Verfahren gebildet sind, werden zur Herstellung der Größen $\overline{m}_{1,ik}$ nach demselben Verfahren zuerst die Koeffizienten m_ν algebraisch verändert, namentlich auch durch $\sqrt{\Delta}$ dividiert (S. 178 (21), 187 (3)). Beim Fortgang zu den geometrischen Ableitungen wird man jetzt sein Augenmerk auf solche Größen richten müssen, die aus $\overline{m}_{1,ik}$ so entstehen wie die $\overline{m}_{ikl}$ aus $\overline{m}_{ik}$, nämlich nach der Rechnungsvorschrift

(3) $$\frac{\partial \overline{m}_{1,ik}}{\partial u_l} - \sum_\varrho \left(\begin{Bmatrix} k\,l \\ \varrho \end{Bmatrix} \overline{m}_{1,i\varrho} + \begin{Bmatrix} i\,l \\ \varrho \end{Bmatrix} \overline{m}_{1,\varrho k} \right) = \overline{m}_{1,ikl}.$$

In der Tat erscheinen diese Größen sofort, wenn man die Reduktion der Formeln auch hier wieder so vornimmt wie es im Vorhergehenden beständig geschehen ist. Z. B. wird

$$\Theta g = \sum_{i,k,l} \mu_{2i}\mu_{1k}\mu_{1l}\overline{m}_{1,ikl} - \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{\varrho,l} \mu_{1\varrho}\,\mu_{1l}\,\overline{m}_{\varrho l} \sum_{i,k} \mu_{2i}\mu_{2k}\overline{m}_{1,ik}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_{\varrho,l} \mu_{1\varrho}\,\mu_{1l}\,\overline{m}_{\varrho l} \sum_{i,k} \mu_{1i}\mu_{1k}\overline{m}_{1,ik}.$$

Hier kann der zweite Teil der rechten Seite unmittelbar mittels (2) und des früheren Ausdruckes von g dargestellt werden, aber die zweite auf i und k bezügliche Summe ist besonders zu berechnen. Dies geschieht durch Vergleichung der Formel S. 185 (20)

(4) $$\frac{\partial m_{1i}}{\partial u_k} = -\frac{m_{2i}}{\sqrt{\Delta}} \sum_\varrho \mu_{1\varrho}\overline{m}_{\varrho k} + \sum_\varrho \begin{Bmatrix} i\,k \\ \varrho \end{Bmatrix} m_{1\varrho}$$

mit der oben zitierten Definitionsgleichung für $\overline{m}_{1,ik}$,

(5) $$\frac{\partial m_{1i}}{\partial u_k} = \overline{m}_{1,ik} + \sum_\varrho \begin{Bmatrix} i\,k \\ \varrho \end{Bmatrix} m_{1\varrho}.$$

Sie liefert

(6) $$\overline{m}_{1,ik} = -\frac{m_{2i}}{\sqrt{\Delta}} \sum_\varrho \mu_{1\varrho}\overline{m}_{\varrho k}.$$

Benutzt man noch die Gleichung S. 180 (30), so sieht man, daß

(7) $$\sum_{i,k} \mu_{1i}\mu_{1k}\overline{m}_{1,ik} = 0$$

und auch

(8) $$\sum_{i,k} \mu_{1i}\mu_{2k}\overline{m}_{1,ik} = 0$$

wird. Hiernach ergibt sich

(9) $$\Theta g = -gg' + \sum_{i,k,l} \mu_{2i}\mu_{1k}\mu_{1l}\overline{m}_{1,ikl},$$

und in gleicher Weise

(10) $$\Theta' g = g'^2 + \sum_{i,k,l} \mu_{2i}\mu_{1k}\mu_{2l}\overline{m}_{1,ikl}$$

(11) $$\Theta g' = g^2 - \sum_{i,k,l} \mu_{2i}\mu_{2k}\mu_{1l}\overline{m}_{1,ikl}$$

(12) $$\Theta' g' = -gg' - \sum_{i,k,l} \mu_{2i}\mu_{2k}\mu_{2l}\overline{m}_{1,ikl}.$$

Diese Formeln enthalten nicht die Größen h und h', und der eigentliche Grund dafür liegt darin, daß die hier an die Spitze gestellten und sodann dem Christoffelschen Verfahren unterworfenen Größen $\overline{m}_{1,ik}$ von vornherein nur von dem Verhältnis $m_1 : m_2$ abhängen, während dies für die Größen $\overline{m}_{ik}$ nicht zutrifft. Ihrer geometrischen Natur nach enthalten $g, g', \Theta g, \ldots \Theta' g'$ sämtlich nur dieses Verhältnis und seine Ableitungen. Während nun hier bei Einführung von μm_1 und μm_2 statt m_1 und m_2 der Proportionalitätsfaktor μ aus jedem einzelnen Gliede wegfällt, wird in den Formeln des vorigen Paragraphen das Auftreten von μ in bestimmten Gliedern erst durch sein Vorkommen in anderen Gliedern aufgehoben.

Der Gebrauch des einen oder anderen Formelsystems richtet sich nach dem Zweck der jeweiligen Untersuchung. Will man sich eine Vorstellung von den Größen bilden, die in der Theorie der geometrischen Differentiationen ein gegebenes System gewöhnlicher Ableitungen der Formenkoeffizienten m_ν oder der willkürlichen Funktion $\varphi(u, v)$ ersetzen können, so wird man, schon der Einheitlichkeit ihrer Entstehung wegen, die Gleichungen des vorigen Paragraphen bevorzugen. Sollen dagegen nur bestimmte geometrische Größen, die sich früher als wichtig erwiesen haben, unter einander in Zusammenhang gebracht und die an sie anknüpfenden Aufgaben erörtert werden, so genügen dazu die letzten Formeln (9) bis (12). Aber auch hier wird man, im Anschluß an frühere Bemerkungen (vgl. z. B. S. 506), die Frage nach der kleinsten Anzahl von Kovarianten einer gegebenen Ordnung beständig im Auge behalten müssen. In diesem Sinne sind nun offenbar $\Theta' g$ und $\Theta g'$ einander äquivalent, denn man kommt, gleichviel ob mittels (10, 11) oder der entsprechenden Gleichungspaare im vorigen Paragraphen, auf die Gleichung zwischen der Bonnetschen Kovariante und der Gaußschen Invariante (§ 57—58). Diese Gleichung hat hier in erster Linie die Bedeutung, daß die zweiten Ableitungen der Formenkoeffizienten m_ν oder die dritten Ableitungen der Funktion $\varphi(u, v)$ in

der Summe $\Theta' g + \Theta g'$ nicht mehr vorkommen. Aber aus der von selbst auftretenden Verbindung $\Theta' g + \Theta g' - g^2 - g'^2$ fiel überhaupt alles heraus, was sich auf $\mathfrak{M}_0$ oder $\varphi(u, v)$ bezieht (S. 211—212).

Eine zweite Äquivalenz (inbezug auf die höchsten Ableitungen) folgt aus den Gleichungen S. 506 (15, 16). Zunächst wird

$$(13)\quad \Theta' h' + \Theta h - g' h - g h' = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \sum_i \mu_{2i} \sum_{k,l} (\mu_{1k}\mu_{2l} - \mu_{2k}\mu_{1l}) \overline{m}_{ikl}.$$

Die auf k und l bezügliche Summe reduziert sich auf

$$(\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{21}\mu_{12})(\overline{m}_{i12} - \overline{m}_{i21}) \equiv \frac{1}{T}(\overline{m}_{i12} - \overline{m}_{i21}),$$

und hierin ist

$$\overline{m}_{i12} - \overline{m}_{i21} = \frac{\partial \overline{m}_{i1}}{\partial u_2} - \frac{\partial \overline{m}_{i2}}{\partial u_1} - \sum_\varrho \begin{Bmatrix} i\,2 \\ \varrho \end{Bmatrix} \overline{m}_{\varrho 1} + \sum_\varrho \begin{Bmatrix} i\,1 \\ \varrho \end{Bmatrix} \overline{m}_{\varrho 2}.$$

Die Differenz der beiden Ableitungen ist gelegentlich der Reduktion der Bonnetschen Kovariante bereits berechnet worden; aus S. 209 (9, 10) folgt

$$\frac{\partial \overline{m}_{i1}}{\partial u_2} - \frac{\partial \overline{m}_{i2}}{\partial u_1} = \sum_\nu \left(\begin{Bmatrix} i\,2 \\ \nu \end{Bmatrix} \overline{m}_{\nu 1} - \begin{Bmatrix} i\,1 \\ \nu \end{Bmatrix} \overline{m}_{\nu 2} \right) + \sum_\nu \{i\nu 21\} m_\nu.$$

Die Gleichung (13) geht demnach in

$$\Theta' h' + \Theta h - g' h - g h' = \frac{1}{T\sqrt{\Delta}} \sum_i \mu_{2i} \sum_\nu \{i\nu 21\} m_\nu$$

über.

Die auf S. 211 eingeführten oder benutzten Formeln liefern dann weiter

$$\frac{1}{T\sqrt{\Delta}} \sum_{i,\nu} \mu_{2i} \{i\nu 21\} m_\nu = \frac{1}{T} \sum_{i,\nu} \mu_{2i} \{i\nu 21\} m_{2\nu}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{i,\nu} \mu_{2i} \{i\nu 21\} \sum_p a_{p\nu} \mu_{2p}$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{i,p} \mu_{2i} \mu_{2p} [ip21],$$

und diese Größe verschwindet infolge der Eigenschaft

$$[ipkl] = -[pikl]$$

(S. 212 (24)). Das Ergebnis lautet also

$$(14)\qquad \Theta' h' + \Theta h = g' h + g h'$$

oder für $h' = g'$ (vgl. S. 506):

$$(15)\qquad \Theta' g' + \Theta h = g'(g + h).$$

§ 157.

Relationen zwischen den geometrischen Ableitungen von n und n'.

Ein planmäßiges Vorgehen im Sinne der beiden letzten Paragraphen, in denen die ersten geometrischen Ableitungen von g und g vollständig aufgestellt worden sind, erfordert, noch einmal auf die Normalkrümmung

$$n \equiv \sum_{i,k} \mu_{1i}\mu_{1k}b_{ik}$$

zurückzugreifen, um auch von ihr und der ihr zugeordneten Größe

$$n' \equiv \sum_{i,k} \mu_{2i}\mu_{2k}b_{ik}$$

die ersten Ableitungen sämtlich zu bilden.

Erstens kann man Θn selbst (S. 491 (5)) unter Benutzung der Größen b_{ikl} (S. 493 (3)) die Form geben:

(1) $$\Theta n = 2gt + \sum_{i,k,l} \mu_{1i}\mu_{1k}\mu_{1l}b_{ikl}.$$

Zweitens ist bereits auf S. 227 die Gleichung

$$\Theta' n + 2g't = \sum_{i,k,l} \mu_{1i}\mu_{1k}\mu_{2l}\frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} - 2\sum_{i,k,l,\varrho} \mu_{1i}\mu_{1\varrho}\mu_{2l}\begin{Bmatrix}\varrho\, l\\ k\end{Bmatrix} b_{ik}$$

abgeleitet worden. Vertauscht man im zweiten Bestandteil der rechten Seite k mit ϱ und zieht wieder S. 493 (3) hinzu, so findet man

(2) $$\Theta' n = -2g't + \sum_{i,k,l} \mu_{1i}\mu_{1k}\mu_{2l}b_{ikl}.$$

Diesen Formeln entsprechen die beiden:

(3) $$\Theta n' = -2gt + \sum_{i,k,l} \mu_{2i}\mu_{2k}\mu_{1l}b_{ikl}$$

und

(4) $$\Theta' n' = 2g't + \sum_{i,k,l} \mu_{2i}\mu_{2k}\mu_{2l}b_{ikl}.$$

Alle vier geometrischen Ableitungen enthalten die Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung der Funktion $\varphi(u, v)$, oder bei der Darstellung der Flächenkurve mittels der Gleichung $\mathfrak{M}_0 = 0$, die Formenkoeffizienten m_ν und deren erste Ableitungen nach u und v. Genauer gesprochen, hängen n und n' nur von dem Verhältnis $\frac{\partial \varphi}{\partial u} : \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ oder $m_1 : m_2$ ab, die geometrischen Ableitungen außerdem von den beiden Differentialquotienten dieses Verhältnisses. Demnach müssen die vier betrachteten Ableitungen durch zwei (algebraische) Gleichungen verbunden sein, die Ergebnisse der Elimination von $\frac{\partial}{\partial u}\frac{m_2}{m_1}$ und $\frac{\partial}{\partial v}\frac{m_2}{m_1}$ aus den Formeln (1) bis (4).

Diese einfachen Überlegungen sind lediglich durch das Auftreten bestimmter Größen in einer gewissen Anzahl von Formeln bedingt, aber nicht durch die spezielle Art des Vorkommens dieser Größen. Im vorliegenden Falle erscheinen die Ausdrücke auf den rechten Seiten der Formeln in je zwei wesentlich verschiedene Teile zerlegt, weil die dreifachen Summen nur von $\frac{m_2}{m_1}$ selbst abhängen, die ersten Bestandteile aber auch von den Ableitungen dieses Quotienten. Außerdem haben die ersten Teile in (1) und (3), (2) und (4) jedesmal entgegengesetzt gleiche Werte. Bezeichnet man die ersten Differentialquotienten des Verhältnisses $\frac{m_2}{m_1}$ oder überhaupt die ersten Ableitungen von m_1 und m_2 als Größen zweiter Ordnung, insofern sie bei der spezielleren Darstellung der Flächenkurve auf die zweiten Ableitungen der Funktion $\varphi(u, v)$ führen, so vollzieht sich also die Elimination der Größen zweiter Ordnung aus den vier Formeln einfach durch Addition von (1) und (3), (2) und (4).

Um dies festzustellen, hätte es der ausdrücklichen Bildung aller vier Ableitungen garnicht bedurft. Denn schon zwischen n und n' selbst, als von der einen Größe erster Ordnung $\frac{\partial \varphi}{\partial u} : \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ abhängig, muß eine algebraische Gleichung bestehen, und diese ist keine andere als die Relation

$$n + n' = n_1 + n_2 \equiv H$$

(S. 85 (4)). Es muß also

$$(5) \qquad \begin{aligned} \Theta n + \Theta n' &= \Theta H \\ \Theta' n + \Theta' n' &= \Theta' H \end{aligned}$$

werden. Durch direkte Untersuchung wird dies leicht bestätigt. Man hat z. B.

$$\Theta n + \Theta n' = \sum_{i,k,l} (\mu_{1i}\mu_{1k} + \mu_{2i}\mu_{2k})\mu_{1l} b_{ikl},$$

d. h. nach S. 180 (36)

$$(6) \qquad \Theta n + \Theta n' = \sum_{i,k,l} \mu_{1l} \alpha_{ik} b_{ikl}.$$

Nun können die Formeln S. 500 (5) unter Berücksichtigung der zwischen den Größen b_{ikl} geltenden Beziehungen S. 494 (9), S. 495 (12) in die eine

$$(7) \qquad \frac{\partial H}{\partial u_l} = \sum_{i,k} \alpha_{ik} b_{ikl} \qquad (l = 1, 2)$$

zusammengezogen werden. Man erhält also

$$\Theta n + \Theta n' = \sum_l \mu_{1l} \frac{\partial H}{\partial u_l},$$

woraus die Behauptung sofort folgt.

Was oben von den beiden verschiedenen Bestandteilen in den Ausdrücken $\Theta n, \ldots \Theta' n'$ gesagt worden ist, kann man sehr einfach aussprechen, wenn man, unter Hinzuziehung des Begriffs der Äquivalenz (S. 509), sein Augenmerk nur auf die Art des Vorkommens der Größen zweiter Ordnung richtet. Die Formeln (1) bis (4) lehren dann, daß Θn, $\Theta n'$ zu g, und $\Theta' n$, $\Theta' n'$ zu g' äquivalent sind.

Noch schärfer läßt sich die Verschiedenheit der ersten und der zweiten Bestandteile charakterisieren, wenn man auch auf ihre Zusammensetzung hinsichtlich derjenigen Größen achtet, die mit der Kurve nichts zu tun haben. Die drei Kovarianten g, g' und t enthalten nämlich die Fundamentalgrößen erster Ordnung der Fläche nebst ihren ersten Ableitungen, sowie die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung, also insgesamt nur erste und zweite Ableitungen der kartesischen Koordinaten. Die dritten Ableitungen dagegen, die notwendiger Weise auftreten müssen, finden sich in den zweiten Bestandteilen vereinigt, und zwar allein in den Verbindungen, die als Fundamentalgrößen dritter Ordnung benannt worden sind.

§ 158.

Der allgemeine Christoffelsche Satz.

Die Fundamentalgrößen erster, zweiter und dritter Ordnung einer Fläche erscheinen übereinstimmend als Koeffizienten von Differentialformen, die sich bei einer beliebigen Transformation der krummlinigen Koordinaten invariant verhalten. Aber es empfiehlt sich offenbar nicht, die Definition der Fundamentalgrößen an diese Eigenschaft allein zu knüpfen. Sonst würden z. B. auch die Koeffizienten der Form Γ als Fundamentalgrößen bezeichnet werden müssen, ebenso wie die Koeffizienten aller Formen $\alpha\mathsf{A} + \beta\mathsf{B}$, wo α und β Konstanten oder Invarianten sind. Eine Ausnahme tritt hier nur für

$$-K\mathsf{A} + H\mathsf{B} \equiv \mathfrak{E} du^2 + 2\mathfrak{F} du dv + \mathfrak{G} dv^2$$

ein; die Größen $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ sind wegen

$$\mathfrak{E} du^2 + 2\mathfrak{F} du dv + \mathfrak{G} dv^2 = d\sigma^2$$

wirklich Fundamentalgrößen, nämlich der Bildkugel einer Fläche mit den Grundformen A und B.

Die Fundamentalgrößen höherer Ordnung sollen vielmehr nach einer einheitlichen, induktiven Methode hergestellt werden, und zwar in derselben Weise, wie schon die Größen dritter Ordnung aus denen der zweiten gebildet worden sind (§ 151). Das Verfahren ist das von Christoffel zuerst im Gebiete einer einzigen Differentialform angewendete, das sich in seiner Erweiterung auf ein Formenpaar im Laufe der vorangehenden Untersuchungen wiederholt als fruchtbar erwiesen hat. Es wird genügen, die Methode für die vierte Ordnung auseinanderzusetzen; die Ausdehnung auf Fundamentalgrößen höherer Ordnung bietet nicht die geringsten Schwierigkeiten (vgl. S. 521).

Der Christoffelsche Satz gestattet, allgemein aus einer m-fach linearen und einer quadratischen Differentialform eine $(m+1)$-fach lineare Kovariante herzuleiten.

Es seien für beliebiges n

$$d_1u_1, \dots d_1u_n;\; d_2u_1, \dots d_2u_n;\; \dots\; d_mu_1, \dots d_mu_n$$

die Variabeln der Differentialform. Ist diese z. B. gleich $\mathfrak{B}_3$ (S. 493 (5)), so hat man

$$d_1u_1 = du,\; d_1u_2 = dv;\;\; d_2u_1 = \delta u,\; d_2u_2 = \delta v;\;\; d_3u_1 = \mathfrak{d}u,\; d_3u_2 = \mathfrak{d}v.$$

Irgend ein Glied der m-fach linearen Form $\mathfrak{G}_m$ setzt sich aus einem Produkt von m Differentialen

$$d_1u_{i_1}d_2u_{i_2}\dots d_mu_{i_m}$$

und einem Koeffizienten

$$(i_1 i_2 \dots i_m)$$

zusammen, sodaß

$$\mathfrak{G}_m = \sum_{i_1,\dots i_m}(i_1 i_2 \dots i_m)\, d_1u_{i_1} d_2u_{i_2} \dots d_mu_{i_m}$$

wird, die Summation erstreckt über alle Kombinationen (mit Wiederholung) der Zahlen $1, \dots n$ zu je m.

Der Übergang zu neuen Variablen $u_1', \dots u_n'$ wird durch die Substitution

$$u_\nu' = u_\nu'(u_1, \dots u_n) \qquad \begin{pmatrix}\nu = 1, \dots n\\ \mu = 1, \dots m\end{pmatrix}$$

$$d_\mu u_\nu' = \sum_\lambda \frac{\partial u_\nu'}{\partial u_\lambda} d_\mu u_\lambda$$

vermittelt, vermöge deren die Gleichung

$$\mathfrak{G}_m = \mathfrak{G}_m'$$

oder

$$\sum_{i_1,\dots i_m}(i_1 i_2 \dots i_m)\, d_1u_{i_1} d_2u_{i_2} \dots d_mu_{i_m} = \sum_{a_1,\dots a_m}(a_1 a_2 \dots a_m)'\, d_1u_{a_1}' d_2u_{a_2}' \dots d_mu_{a_m}'$$

mit folgendem System von Transformationsgleichungen gleichbedeutend ist:

$$(1)\qquad (i_1 i_2 \ldots i_m) = \sum_{a_1, \ldots a_m} (a_1 a_2 \ldots a_m)' \frac{\partial u'_{a_1}}{\partial u_{i_1}} \frac{\partial u'_{a_2}}{\partial u_{i_2}} \cdots \frac{\partial u'_{a_m}}{\partial u_{i_m}}.$$

Die Differentiation nach u_i ergibt

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial (i_1 i_2 \ldots i_m)}{\partial u_i} = & \sum_{a, a_1, \ldots a_m} \frac{\partial (a_1 a_2 \ldots a_m)'}{\partial u'_a} \frac{\partial u'_a}{\partial u_i} \frac{\partial u'_{a_1}}{\partial u_{i_1}} \cdots \frac{\partial u'_{a_m}}{\partial u_{i_m}} \\ & + \sum_{a_1, \ldots a_m} (a_1 \ldots a_m)' \frac{\partial^2 u'_{a_1}}{\partial u_{i_1} \partial u_i} \frac{\partial u'_{a_2}}{\partial u_{i_2}} \cdots \frac{\partial u'_{a_m}}{\partial u_{i_m}} \\ & + \sum_{a_1, \ldots a_m} (a_1 \ldots a_m)' \frac{\partial u'_{a_1}}{\partial u_{i_1}} \frac{\partial^2 u'_{a_2}}{\partial u_{i_2} \partial u_i} \cdots \frac{\partial u'_{a_m}}{\partial u_{i_m}} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Hierin läßt sich das auf die $(m+1)$-fache Summe folgende Aggregat m-facher Summen schreiben

$$\begin{aligned} & \sum_{h, a_2, \ldots a_m} (h a_2 \ldots a_m)' \frac{\partial^2 u'_h}{\partial u_{i_1} \partial u_i} \frac{\partial u'_{a_2}}{\partial u_{i_2}} \cdots \frac{\partial u'_{a_m}}{\partial u_{i_m}} \\ & + \sum_{a_1, h, \ldots a_m} (a_1 h \ldots a_m)' \frac{\partial u'_{a_1}}{\partial u_{i_1}} \frac{\partial^2 u'_h}{\partial u_{i_2} \partial u_i} \cdots \frac{\partial u'_{a_m}}{\partial u_{i_m}} \\ & + \cdots\cdots\cdots\cdots, \end{aligned}$$

und man kann, genau wie bei der speziellen Untersuchung auf S. 493, aus S. 168 (23)

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 u'_h}{\partial u_i \partial u_{i_\alpha}} = \sum_{\nu} \begin{Bmatrix} i\, i_\alpha \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial u'_h}{\partial u_\nu} - \sum_{\lambda, \mu} \begin{Bmatrix} \lambda\, \mu \\ h \end{Bmatrix}' \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_{i_\alpha}}$$

einsetzen. Nach (1) ist aber

$$\begin{aligned} & \sum_{h, a_2, \ldots a_m} (h a_2 \ldots a_m)' \frac{\partial u'_h}{\partial u_\nu} \frac{\partial u'_{a_2}}{\partial u_{i_2}} \cdots \frac{\partial u'_{a_m}}{\partial u_{i_m}} = (\nu i_2 \ldots i_m) \\ & \sum_{a_1, h, \ldots a_m} (a_1 h \ldots a_m)' \frac{\partial u'_{a_1}}{\partial u_{i_1}} \frac{\partial u'_h}{\partial u_\nu} \cdots \frac{\partial u'_{a_m}}{\partial u_{i_m}} = (i_1 \nu \ldots i_m) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Man bringe diese Ausdrücke, nachdem man sie mit den zugehörigen Größen $\begin{Bmatrix} i\, i_\alpha \\ \nu \end{Bmatrix}$ multipliziert, dann über ν summiert hat, auf die linke Seite der Gleichung (2) und setze

$$(4)\qquad \frac{\partial(i_1, i_2 \ldots i_m)}{\partial u_i} - \sum_\nu \left(\begin{Bmatrix} i\, i_1 \\ \nu \end{Bmatrix} (\nu i_2 \ldots i_m) + \begin{Bmatrix} i\, i_2 \\ \nu \end{Bmatrix} (i_1 \nu \ldots i_m) + \cdots + \begin{Bmatrix} i\, i_m \\ \nu \end{Bmatrix} (i_1 \ldots i_{m-1} \nu) \right) = (i_1 i_2 \ldots i_m i).$$

Dann kommen auf der rechten Seite von (2) die aus den transformierten Koeffizienten entsprechend gebildeten Größen vor. Denn der noch nicht berücksichtigte Bestandteil der ersten m-fachen Summe, der von der Doppelsumme auf der rechten Seite von (3) herrührt, hat, vom Vorzeichen abgesehen, den Ausdruck

$$\sum_{h, a_2, \ldots a_m} (h a_2 \ldots a_m)' \sum_{a, a_1} \begin{Bmatrix} a\, a_1 \\ h \end{Bmatrix}' \frac{\partial u'_a}{\partial u_i} \frac{\partial u'_{a_1}}{\partial u_{i_1}} \frac{\partial u'_{a_2}}{\partial u_{i_2}} \cdots \frac{\partial u'_{a_m}}{\partial u_{i_m}}.$$

Ihm entspricht aus der zweiten m-fachen Summe

$$\sum_{a_1, h, \ldots a_m} (a_1 h \ldots a_m)' \sum_{a, a_2} \begin{Bmatrix} a\, a_2 \\ h \end{Bmatrix}' \frac{\partial u'_a}{\partial u_i} \frac{\partial u'_{a_1}}{\partial u_{i_1}} \frac{\partial u'_{a_2}}{\partial u_{i_2}} \cdots \frac{\partial u'_{a_m}}{\partial u_{i_m}};$$

und so fort. Nimmt man die vorher weggelassene $(m+1)$-fache Summe hinzu und vereinigt unter dem auf $a, a_1, \ldots a_m$ bezüglichen Summenzeichen alle Glieder, die den Faktor

$$\frac{\partial u'_a}{\partial u_i} \frac{\partial u'_{a_1}}{\partial u_{i_1}} \frac{\partial u'_{a_2}}{\partial u_{i_2}} \cdots \frac{\partial u'_{a_m}}{\partial u_{i_m}}$$

haben, so erhält man, wie behauptet,

$$\frac{\partial(a_1 a_2 \ldots a_m)'}{\partial u'_a} - \sum_h \left(\begin{Bmatrix} a\, a_1 \\ h \end{Bmatrix}' (h a_2 \ldots a_m)' + \begin{Bmatrix} a\, a_2 \\ h \end{Bmatrix}' (a_1 h \ldots a_m)' + \cdots + \begin{Bmatrix} a\, a_m \\ h \end{Bmatrix}' (a_1 \ldots a_{m-1} h)' \right) \equiv (a_1 \ldots a_m a)',$$

und die Gleichung oder vielmehr das System von Gleichungen (2) selbst lautet

$$(5)\qquad (i_1 \ldots i_m i) = \sum_{a_1, \ldots a_m, a} (a_1 \ldots a_m a)' \frac{\partial u'_{a_1}}{\partial u_{i_1}} \frac{\partial u'_{a_2}}{\partial u_{i_2}} \cdots \frac{\partial u'_{a_m}}{\partial u_{i_m}} \frac{\partial u'_a}{\partial u_i}.$$

Dies sind die Transformationsgleichungen der $(m+1)$-fach linearen Differentialform

$$\sum_{i_1, \ldots i_m, i} (i_1 \ldots i_m i)\, d_1 u_{i_1} \ldots d_m u_{i_m} d_{m+1} u_i.$$

§ 159.

Anwendung des Christoffelschen Verfahrens auf die Herleitung einer vierfach linearen Kovariante.

Es sei nun $m = 3$, und die dreifach lineare Form die im § 151 aus B oder 𝔅 hergeleitete

$$\sum_{i,k,l} b_{ikl}\, du_i\, \delta u_k\, \mathfrak{d} u_l \equiv \mathfrak{B}_3.$$

Die Koeffizienten der aus ihr durch Fortsetzung des Christoffelschen Verfahrens hervorgehenden Differentialform

$$\sum_{i,k,l,m} b_{iklm}\, d_1 u_i\, d_2 u_k\, d_3 u_l\, d_4 u_m \equiv \mathfrak{B}_4$$

haben nach (4) die Werte

$$(1) \qquad b_{iklm} = \frac{\partial b_{ikl}}{\partial u_m} - \sum_\nu \left(\begin{Bmatrix} i\,m \\ \nu \end{Bmatrix} b_{\nu k l} + \begin{Bmatrix} k\,m \\ \nu \end{Bmatrix} b_{i \nu l} + \begin{Bmatrix} l\,m \\ \nu \end{Bmatrix} b_{ik\nu} \right).$$

Da jeder Index die Werte 1 und 2 anzunehmen hat, so ist die Anzahl dieser Größen allgemein gleich 2^4. Sie verringert sich jedoch aus mehreren Gründen bedeutend. Denn schon wegen $b_{ki} = b_{ik}$ und ferner in Folge der Fundamentalgleichungen gelten für die Koeffizienten von $\mathfrak{B}_3$ die Gleichungspaare

$$(2) \qquad b_{kil} = b_{ikl} \qquad \text{(S. 494 (8))}$$

und

$$(3) \qquad b_{ilk} = b_{ikl}, \qquad \text{(S. 495 (12))}$$

die diese Größen von acht auf vier zurückbrachten.

Vertauscht man nun in der Definitionsgleichung (1) zuerst i mit k, so folgt

$$b_{kilm} = \frac{\partial b_{kil}}{\partial u_m} - \sum_\nu \left(\begin{Bmatrix} k\,m \\ \nu \end{Bmatrix} b_{\nu i l} + \begin{Bmatrix} i\,m \\ \nu \end{Bmatrix} b_{k \nu l} + \begin{Bmatrix} l\,m \\ \nu \end{Bmatrix} b_{ki\nu} \right)$$

$$= \frac{\partial b_{ikl}}{\partial u_m} - \sum_\nu \left(\begin{Bmatrix} k\,m \\ \nu \end{Bmatrix} b_{i \nu l} + \begin{Bmatrix} i\,m \\ \nu \end{Bmatrix} b_{\nu k l} + \begin{Bmatrix} l\,m \\ \nu \end{Bmatrix} b_{ik\nu} \right)$$

$$(4) \qquad b_{kilm} = b_{iklm}.$$

Zweitens liefert die Vertauschung von k mit l

$$(5) \qquad b_{ilkm} = b_{iklm}.$$

Aber auch die Vertauschung von l mit m ergibt noch eine Reduktion, und zwar ohne Rücksicht auf die speziellen Eigenschaften der Größen b_{ik} und b_{ikl}. Denn in b_{iklm} und b_{ikml} tritt übereinstimmend die zweite Ableitung von b_{ik} nach u_l und u_m auf. Die Ausführung der Differentiation liefert

$$\frac{\partial b_{ikl}}{\partial u_m} = \frac{\partial^2 b_{ik}}{\partial u_l\, \partial u_m} - \sum_\varrho \left(\frac{\partial \begin{Bmatrix} k\,l \\ \varrho \end{Bmatrix}}{\partial u_m} b_{i\varrho} + \frac{\partial \begin{Bmatrix} i\,l \\ \varrho \end{Bmatrix}}{\partial u_m} b_{\varrho k} \right)$$

$$- \sum_\nu \left(\begin{Bmatrix} k\,l \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial b_{i\nu}}{\partial u_m} + \begin{Bmatrix} i\,l \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial b_{\nu k}}{\partial u_m} \right)$$

(6) $$\frac{\partial b_{ikl}}{\partial u_m} = \frac{\partial^2 b_{ik}}{\partial u_l \partial u_m} - \sum_\nu \left(\begin{Bmatrix} k\,l \\ \nu \end{Bmatrix} b_{i\nu m} + \begin{Bmatrix} i\,l \\ \nu \end{Bmatrix} b_{\nu k m} \right)$$
$$- \sum_\varrho b_{i\varrho} \left(\frac{\partial \begin{Bmatrix} k\,l \\ \varrho \end{Bmatrix}}{\partial u_m} + \sum_\nu \begin{Bmatrix} k\,l \\ \nu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu\,m \\ \varrho \end{Bmatrix} \right)$$
$$- \sum_\varrho b_{\varrho k} \left(\frac{\partial \begin{Bmatrix} i\,l \\ \varrho \end{Bmatrix}}{\partial u_m} + \sum_\nu \begin{Bmatrix} i\,l \\ \nu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu\,m \\ \varrho \end{Bmatrix} \right)$$
$$- \sum_{\nu,\varrho} b_{\nu\varrho} \left(\begin{Bmatrix} k\,l \\ \nu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} i\,m \\ \varrho \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} i\,l \\ \nu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} k\,m \\ \varrho \end{Bmatrix} \right),$$

woraus

$$\frac{\partial b_{ikm}}{\partial u_l} - \frac{\partial b_{ikl}}{\partial u_m} = \sum_\nu \left(\begin{Bmatrix} k\,l \\ \nu \end{Bmatrix} b_{i\nu m} + \begin{Bmatrix} i\,l \\ \nu \end{Bmatrix} b_{\nu k m} \right)$$
$$- \sum_\nu \left(\begin{Bmatrix} k\,m \\ \nu \end{Bmatrix} b_{i\nu l} + \begin{Bmatrix} i\,m \\ \nu \end{Bmatrix} b_{\nu k l} \right)$$
$$+ \sum_\varrho b_{i\varrho} \left(\frac{\partial \begin{Bmatrix} k\,l \\ \varrho \end{Bmatrix}}{\partial u_m} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} k\,m \\ \varrho \end{Bmatrix}}{\partial u_l} + \sum_\nu \left(\begin{Bmatrix} k\,l \\ \nu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu\,m \\ \varrho \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k\,m \\ \nu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu\,l \\ \varrho \end{Bmatrix} \right) \right)$$
$$- \sum_\varrho b_{\varrho k} \left(\frac{\partial \begin{Bmatrix} i\,m \\ \varrho \end{Bmatrix}}{\partial u_l} - \frac{\partial \begin{Bmatrix} i\,l \\ \varrho \end{Bmatrix}}{\partial u_m} + \sum_\nu \left(\begin{Bmatrix} i\,m \\ \nu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu\,l \\ \varrho \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i\,l \\ \nu \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \nu\,m \\ \varrho \end{Bmatrix} \right) \right),$$

d. h. nach S. 209 (10)

(7) $$b_{ikml} - b_{iklm} = \sum_\varrho \{k\varrho l m\}\, b_{i\varrho} - \sum_\varrho \{i\varrho m l\}\, b_{\varrho k}$$

folgt. Hiernach sind die beiden Größen links einander äquivalent, nämlich inbezug auf die höchsten in ihnen vorkommenden Ableitungen der kartesischen Koordinaten, die der 4. Ordnung;

(8) $$b_{ikml} \sim b_{iklm}.$$

Jede der Relationen (4) und (5) vertritt vier Gleichungen, die Äquivalenz (8) deren drei, sodaß die sechzehn Größen b_{iklm} sich auf fünf reduzieren, als welche man

$$b_{1111}, \quad b_{1112}, \quad b_{1212}, \quad b_{2221}, \quad b_{2222}$$

nehmen kann. Daß sich unter diesen keine äquivalenten mehr finden, ist leicht zu prüfen. Denn aus

$$b_{11} = \Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \quad b_{12} = \Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}, \quad b_{22} = \Sigma X \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}$$

folgt

(9)
$$b_{111} \sim \Sigma X \frac{\partial^3 x}{\partial u^3}, \quad b_{112} \sim \Sigma X \frac{\partial^3 x}{\partial u^2 \partial v}, \quad b_{221} \sim \Sigma X \frac{\partial^3 x}{\partial u \partial v^2},$$
$$b_{222} \sim \Sigma X \frac{\partial^3 x}{\partial v^3},$$

(10)
$$b_{1111} \sim \Sigma X \frac{\partial^4 x}{\partial u^4}, \quad b_{1112} \sim \Sigma X \frac{\partial^4 x}{\partial u^3 \partial v}, \quad b_{1212} \sim \Sigma X \frac{\partial^4 x}{\partial u^2 \partial v^2},$$
$$b_{2221} \sim \Sigma X \frac{\partial^4 x}{\partial u \partial v^3}, \quad b_{2222} \sim \Sigma X \frac{\partial^4 x}{\partial v^4}.$$

Die Gleichung (7) kann etwas anders geschrieben werden, wenn die Definitionsformel für $[ipkl]$,

(11)
$$\sum_\nu a_{p\nu} \{i\nu kl\} = [ipkl]$$

(S. 211 (17)) oder

(12)
$$\{k\varrho lm\} = \sum_\lambda \alpha_{\lambda\varrho} [k\lambda lm]$$

benutzt wird. Es ergibt sich nämlich

(13)
$$b_{ikml} - b_{iklm} = \sum_\lambda [k\lambda lm] \sum_\varrho \alpha_{\lambda\varrho} b_{i\varrho} - \sum_\lambda [i\lambda ml] \sum_\varrho \alpha_{\lambda\varrho} b_{\varrho k},$$

d. h. unter Anwendung von S. 221 (14)

(14)
$$b_{ikml} - b_{iklm} = \sum_\lambda [i\lambda ml] \eta_{k\lambda} - \sum_\lambda [k\lambda lm] \eta_{i\lambda}.$$

Die drei in dieser Formel enthaltenen Relationen heißen

(15)
$$\begin{aligned} b_{1121} - b_{1112} &= \qquad 2\,\eta_{12}\,[1221] \\ b_{1221} - b_{1212} &= (\eta_{22} - \eta_{11})[1221] \\ b_{2221} - b_{2212} &= - \quad 2\,\eta_{21}\,[1221] \end{aligned}$$

oder auch, weil nach S. 224 (12) und S. 194 (13)

(16)
$$\eta_{12} = -\frac{c_{11}}{\sqrt{a}}, \quad \eta_{22} - \eta_{11} = -\frac{2c_{12}}{\sqrt{a}}, \quad \eta_{21} = \frac{c_{22}}{\sqrt{a}}$$

und nach S. 212 (26), S. 211 (20)

(17)
$$[1221] = -aK$$

ist,

(18)
$$\begin{aligned} b_{1121} - b_{1112} &= 2K\sqrt{a}\,c_{11} \\ b_{1221} - b_{1212} &= 2K\sqrt{a}\,c_{12} \\ b_{2221} - b_{2212} &= 2K\sqrt{a}\,c_{22}; \end{aligned}$$

Beziehungen, die sich ihrerseits wieder in

(19)
$$b_{ik21} - b_{ik12} = 2K\sqrt{a}\,c_{ik}$$

zusammenfassen lassen.

§ 160.

Fundamentalgrößen vierter Ordnung.

Wie für $m = 3$, so sollen auch hier als Fundamentalgrößen diejenigen bezeichnet werden, auf die man kommt, wenn man die verschiedenen Differentiale einander gleich setzt, also von der vierfach linearen Form $\mathfrak{B}_4$ zu einer biquadratischen

(1) $$\beta_{1111}du^4 + \beta_{1112}du^3dv + \beta_{1212}du^2dv^2 + \beta_{2221}du\,dv^3 + \beta_{2222}dv^4 \equiv \mathsf{B}_4$$

übergeht. Der erste und letzte Koeffizient, β_{1111} und β_{2222}, werden dann den Größen b_{1111} und b_{2222} gleich, ferner β_{1112} und β_{2221} gleich den Summen der je vier Koeffizienten b_{iklm}, für welche drei Indizes den Wert 1 oder 2 haben, und β_{1212} gleich dem Aggregat der sechs Größen, in denen zwei Indizes gleich 1, die beiden anderen gleich 2 sind. Die Eigenschaften (4) und (5) liefern

(2) $$\begin{aligned}\beta_{1112} &= b_{1112} + 3b_{1121}\\ \beta_{1212} &= 3(b_{1212} + b_{1221})\\ \beta_{2221} &= b_{2221} + 3b_{2212},\end{aligned}$$

und durch die Äquivalenzen (8), d. h. die Relationen (18), tritt eine weitere Reduktion der vorkommenden Größen b_{iklm} ein. Das vollständige Formelsystem für die Koeffizienten von B_4 lautet:

(3) $$\begin{aligned}\beta_{1111} &= b_{1111}\\ \beta_{1112} &= 4b_{1112} + 6K\sqrt{a}\,c_{11} = 4b_{1121} - 2K\sqrt{a}\,c_{11}\\ \beta_{1212} &= 6b_{1212} + 6K\sqrt{a}\,c_{12} = 6b_{1221} - 6K\sqrt{a}\,c_{12}\\ \beta_{2221} &= 4b_{2221} - 6K\sqrt{a}\,c_{22} = 4b_{2212} + 2K\sqrt{a}\,c_{22}\\ \beta_{2222} &= b_{2222}.\end{aligned}$$

Bezeichnet man nun die Koeffizienten von B_4 kürzer, indem man zugleich in gebräuchlicher Weise bestimmte Binomialkoeffizienten als Faktoren einführt, also

(4) $$\mathsf{B}_4 = b_{40}du^4 + 4b_{31}du^3dv + 6b_{22}du^2dv^2 + 4b_{13}du\,dv^3 + b_{04}dv^4$$

setzt, so erhält man

(5) $$\begin{aligned}b_{40} &= b_{1111}\\ b_{31} &= b_{1112} + \tfrac{3}{2}K\sqrt{a}\,c_{11} = b_{1121} - \tfrac{1}{2}K\sqrt{a}\,c_{11}\\ b_{22} &= b_{1212} + K\sqrt{a}\,c_{12} = b_{1221} - K\sqrt{a}\,c_{12}\\ b_{13} &= b_{2221} - \tfrac{3}{2}K\sqrt{a}\,c_{22} = b_{2212} + \tfrac{1}{2}K\sqrt{a}\,c_{22}\\ b_{04} &= b_{2222}.\end{aligned}$$

Die fünf Größen $b_{\lambda\mu}$ $(\lambda + \mu = 4)$ sind die **Fundamentalgrößen vierter Ordnung.**

In den Bezeichnungen der Flächentheorie haben sie folgende Werte:

$$
(6)\quad
\begin{aligned}
b_{40} &= \frac{\partial P}{\partial u} - 3(PJ_1 + QJ_2)\\
b_{31} &= \frac{\partial P}{\partial v} - 3(PJ_1' + QJ_2') + \tfrac{3}{2}K(EM - FL)\\
&= \frac{\partial Q}{\partial u} - 2(QJ_1 + RJ_2) - (PJ_1' + QJ_2') - \tfrac{1}{2}K(EM - FL)\\
b_{22} &= \frac{\partial Q}{\partial v} - 2(QJ_1' + RJ_2') - (PJ_1'' + QJ_2'') + \tfrac{1}{2}K(EN - GL)\\
&= \frac{\partial R}{\partial u} - 2(QJ_1' + RJ_2') - (RJ_1 + SJ_2) - \tfrac{1}{2}K(EN - GL)\\
b_{13} &= \frac{\partial R}{\partial v} - 2(QJ_1'' + RJ_2'') - (RJ_1' + SJ_2') + \tfrac{1}{2}K(FN - GM)\\
&= \frac{\partial S}{\partial u} - 3(RJ_1' + SJ_2') - \tfrac{3}{2}K(FN - GM)\\
b_{04} &= \frac{\partial S}{\partial v} - 3(RJ_1'' + SJ_2'').
\end{aligned}
$$

Über den Gebrauch dieser Fundamentalgrößen ist Entsprechendes zu sagen wie bei der 3. Ordnung (S. 499).

Allgemein gilt für die Fundamentalgrößen m. Ordnung folgende Erklärung: Es sind, nach Abtrennung der Binomialkoeffizienten der Zahl m, die $m + 1$ Koeffizienten der binären Differentialform B_m, die aus der m-fach linearen Christoffelschen Kovariante $\mathfrak{B}_m$ der Formen B und A durch Gleichsetzung der verschiedenen Differentiale von u und von v hervorgeht. Wird also

$$
(7)\qquad \mathsf{B}_m = \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} b_{m-\mu,\mu}\, du^{m-\mu} dv^{\mu}
$$

gesetzt, so sind

$$
b_{m0},\quad b_{m-1,1},\quad b_{m-2,2},\ \dots\ b_{0m}
$$

die Fundamentalgrößen.

§ 161.

Die geometrischen Differentiationen im schiefwinkligen Kurvennetz. Transformationsformeln.

In früheren Abschnitten sind die geometrischen Differentiationen an eine einzige Funktion oder lineare Differentialform geknüpft worden, wobei die ersten Differentialquotienten einer willkürlichen Funktion durch die geometrischen Ableitungen längs einer Flächenkurve

und ihrer orthogonalen Trajektorie vertreten wurden. Den geometrischen Differentiationen längs den Krümmungslinien (§ 118) liegt zwar eine quadratische Differentialform zugrunde, aber die Orthogonalität der geometrischen Differentiationen, wie man sagen kann, bleibt bestehen. Man kann nicht erwarten, daß die orthogonalen Differentiationen unter allen Umständen das zweckmäßigste Hilfsmittel der Untersuchung bilden werden. Spielen doch z. B. auf den Flächen negativen Krümmungsmaßes neben den Krümmungslinien auch die Asymptotenkurven eine ausgezeichnete Rolle, und diese Kurven schneiden sich nur auf den Minimalflächen überall unter rechten Winkeln. Es liegt demnach das Bedürfnis vor, die gewöhnlichen Ableitungen durch kovariante Ausdrücke zu ersetzen, die auf ein schiefwinkliges Kurvennetz gegründet sind.

Das Kurvennetz kann durch Nullsetzung zweier linearen Differentialformen

$$(1)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{N}_1 &\equiv n_{11}du + n_{12}dv \\ \mathfrak{N}_2 &\equiv n_{21}du + n_{22}dv \end{aligned}$$

definiert werden, und im Zusammenhange mit ihnen seien die Operationszeichen D_1, D_2 durch die Formeln

$$(2)\qquad \begin{aligned} D_1\chi &= \frac{1}{n}\left(\quad n_{22}\frac{\partial\chi}{\partial u} - n_{21}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right) \\ D_2\chi &= \frac{1}{n}\left(-n_{12}\frac{\partial\chi}{\partial u} + n_{11}\frac{\partial\chi}{\partial v}\right) \end{aligned}$$

erklärt. Die Hinzufügung des Nenners

$$(3)\qquad n \equiv \begin{vmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{vmatrix}$$

dient dabei, wie immer, zunächst nur dazu, die homogenen linearen Funktionen der partiellen Ableitungen in absolute Kovarianten zu verwandeln. Diese Determinante ist die einzige Größe, in der das Formenpaar $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$ als solches vorkommt; in den Zählern hängt $D_1\chi$ nur von $\mathfrak{N}_2$, $D_2\chi$ nur von $\mathfrak{N}_1$ ab. Die Kovarianz findet ihren Ausdruck in den Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{aligned} D_1\chi &= \frac{1}{n'}\left(\quad n'_{22}\frac{\partial\bar\chi}{\partial u'} - n'_{21}\frac{\partial\bar\chi}{\partial v'}\right) \equiv D'_1\bar\chi \\ D_2\chi &= \frac{1}{n'}\left(-n'_{12}\frac{\partial\bar\chi}{\partial u'} + n'_{11}\frac{\partial\bar\chi}{\partial v'}\right) \equiv D'_2\bar\chi. \end{aligned}$$

Wählt man die neuen Parameter den Bedingungen

$$n'_{12} = 0, \qquad n'_{21} = 0$$

gemäß, so erhält man also

$$(5)\qquad \begin{aligned} D_1\chi &= \frac{1}{n'_{11}}\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial u'} \\ D_2\chi &= \frac{1}{n'_{22}}\frac{\partial \bar{\chi}}{\partial v'}. \end{aligned}$$

Zu geometrischen Differentiationen werden freilich die Operationen D_1, D_2 erst unter Annahme eines bestimmten Zusammenhanges zwischen den linearen Formen $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ einerseits und der quadratischen Form $\mathsf{A} \equiv ds^2$ andererseits. Bevor aber hierauf eingegangen wird, möge die Vertauschungsformel (§ 54) allgemein hergestellt werden. Bildet man

$$\begin{aligned} D_2D_1\chi - D_1D_2\chi = \frac{1}{n}\left(-n_{12}\frac{\partial D_1\chi}{\partial u} + n_{11}\frac{\partial D_1\chi}{\partial v}\right) \\ -\frac{1}{n}\left(\quad n_{22}\frac{\partial D_2\chi}{\partial u} - n_{21}\frac{\partial D_2\chi}{\partial v}\right), \end{aligned}$$

ersetzt $D_1\chi$ und $D_2\chi$ durch die Ausdrücke (2) und nach Ausführung der Differentiationen umgekehrt die allein stehenbleibenden partiellen Ableitungen 1. Ordnung durch ihre aus (2) folgenden Werte

$$(6)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial u} &= n_{11}D_1\chi + n_{21}D_2\chi \\ \frac{\partial \chi}{\partial v} &= n_{12}D_1\chi + n_{22}D_2\chi, \end{aligned}$$

so findet man unmittelbar

$$(7)\qquad D_2D_1\chi - D_1D_2\chi = \mathfrak{h}_1 D_1\chi - \mathfrak{h}_2 D_2\chi,$$

worin

$$(8)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{h}_1 &= -\frac{1}{n}\left(\frac{\partial n_{11}}{\partial v} - \frac{\partial n_{12}}{\partial u}\right) \\ \mathfrak{h}_2 &= -\frac{1}{n}\left(\frac{\partial n_{22}}{\partial u} - \frac{\partial n_{21}}{\partial v}\right) \end{aligned}$$

ist. Für diese Größen einzeln gilt Entsprechendes wie bei $D_1\chi$ und $D_2\chi$: Das Formenpaar $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$ tritt bloß in seiner Determinante n auf, die partiellen Ableitungen aber beziehen sich nur auf die Koeffizienten je einer Form. Und zwar erscheinen die Integrabilitäts-Invarianten der beiden Formen, durch Division mit n in absolute Invarianten verwandelt.

Ferner mögen hier sogleich die Übergangsformeln zwischen D-Operationen, die sich auf zwei verschiedene Formenpaare gründen, angeschlossen werden. Es seien

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_1 &\equiv r_{11}du + r_{12}dv \\ \mathfrak{R}_2 &\equiv r_{21}du + r_{22}dv \end{aligned}$$

zwei weitere beliebige lineare Differentialformen. Die Gleichungen (2) lassen sich in

(9) $$D_i\chi = \sum_\alpha \nu_{i\alpha}\frac{\partial\chi}{\partial u_\alpha}$$

zusammenfassen, und ihnen entspricht für das Formenpaar $(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2)$

(10) $$\overline{D}_k\chi = \sum_\beta \varrho_{k\beta}\frac{\partial\chi}{\partial u_\beta}.$$

Diese Gleichungssysteme sind mit

(11) $$\frac{\partial\chi}{\partial u_\alpha} = \sum_i n_{i\alpha} D_i\chi$$

(12) $$\frac{\partial\chi}{\partial u_\beta} = \sum_k r_{k\beta}\overline{D}_k\chi$$

gleichbedeutend. Die Elimination der partiellen Ableitungen ergibt

(13) $$\overline{D}_k\chi = \sum_\alpha D_\alpha\chi\sum_\beta n_{\alpha\beta}\varrho_{k\beta}$$

oder

(14) $$D_i\chi = \sum_\alpha \overline{D}_\alpha\chi\sum_\beta r_{\alpha\beta}\nu_{i\beta}.$$

§ 162.

Die geometrischen Differentiationen bei der Darstellung der Grundkurven durch eine quadratische Gleichung.

Ist das Kurvennetz nicht durch zwei lineare Gleichungen $\mathfrak{R}_1 = 0$, $\mathfrak{R}_2 = 0$, sondern durch eine quadratische,

(1) $$\Lambda \equiv l_{11}du^2 + 2l_{12}du\,dv + l_{22}dv^2 = 0,$$

gegeben, so hat man $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ als Faktoren von Λ zu definieren und dann auf die Gleichungen (2) des vorigen Paragraphen zurückzugreifen. Die Anzahl der Bestimmungsgleichungen wird der Anzahl der unbekannten Koeffizienten gleich, wenn die Gleichung

(2) $$\mathfrak{R}_1^2 + 2b\,\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2 + \mathfrak{R}_2^2 = \mathsf{A}$$

zu

(3) $$\nu\,\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2 = \Lambda$$

hinzugenommen wird. Denn diese beiden Bestimmungen liefern sechs Gleichungen für ebensoviele Unbekannte n_{11}, n_{12}, n_{21}, n_{22}, b und ν. Zugleich werden durch diesen Ansatz die Operationen D_1, D_2 zu geometrischen Differentiationen.

Anstatt nun die durch (2) und (3) vermittelten Beziehungen zwischen A und Λ, $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ auf direktem Wege weiter zu verfolgen,

empfiehlt es sich, aufs neue durch die simultane Transformation von A und Λ in algebraische Summen von Quadraten hindurchzugehen. Die vier Koeffizienten zweier linearen Differentialformen $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ und die beiden Größen l_1, l_2 mögen demnach den sechs in

$$\mathfrak{M}_1^2 + \mathfrak{M}_2^2 = \mathsf{A} \tag{4}$$

$$l_1\mathfrak{M}_1^2 + l_2\mathfrak{M}_2^2 = \Lambda \tag{5}$$

enthaltenen Bedingungen genügen. l_1 und l_2 sind Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} El - l_{11}, & Fl - l_{12} \\ Fl - l_{12}, & Gl - l_{22} \end{vmatrix} = 0; \tag{6}$$

durch die Annahme

$$l_1 > l_2$$

werde eine bestimmte Folge zwischen $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ festgesetzt. Die Werte der Koeffizienten dieser Formen und, damit unmittelbar zusammenhängend, die positiven Richtungen der aufeinander senkrechten Kurven $\mathfrak{M}_2 = 0$, $\mathfrak{M}_1 = 0$ lassen sich dann so wählen, daß der im positiven Sinne von der ersten zur zweiten Kurve gerechnete Winkel gleich $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{nicht } \frac{3\pi}{2}\right)$ wird, daß also die beiden Kurven in dieser Folge den Koordinatenlinien $v =$ const., $u =$ const. äquivalent sind. Dem entsprechend wird $m \equiv m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} > 0$.

Nunmehr definiere man $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$ durch die Formeln

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_1 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{l_1 - l_2}{-l_2}}\,\mathfrak{M}_1 - \sqrt{\frac{l_1 - l_2}{l_1}}\,\mathfrak{M}_2\right) \\ \mathfrak{N}_2 &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{l_1 - l_2}{-l_2}}\,\mathfrak{M}_1 + \sqrt{\frac{l_1 - l_2}{l_1}}\,\mathfrak{M}_2\right), \end{aligned} \tag{7}$$

so wird auch

$$n \equiv n_{11}n_{22} - n_{12}n_{21} > 0,$$

und die beiden Kurven c_1, c_2, auf die es eigentlich ankommt, nämlich $\mathfrak{N}_2 = 0$, $\mathfrak{N}_1 = 0$, ebenfalls den Koordinatenlinien $v =$ const., $u =$ const. äquivalent. Aus (4), (5) und (7) ergeben sich die Gleichungen (2), (3) in der Form

$$\mathsf{A} = \mathfrak{N}_1^2 - 2\frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2}\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2 + \mathfrak{N}_2^2 \tag{8}$$

$$\Lambda = -\frac{4 l_1 l_2}{l_1 - l_2}\mathfrak{N}_1\mathfrak{N}_2. \tag{9}$$

Die hierin auftretenden Koeffizienten lassen sich leicht zu dem Winkel $\alpha (< \pi)$ des Netzes $\Lambda = 0$ in Beziehung setzen. Nach (6) ist

$$(10)\qquad \begin{aligned} l_1 + l_2 &= \frac{G l_{11} - 2 F l_{12} + E l_{22}}{EG - F^2} \\ l_1 l_2 &= \frac{l_{11} l_{22} - l_{12}^2}{EG - F^2} = \frac{l}{T^2}. \end{aligned}$$

Die Vergleichung mit den Formeln S. 45 (17, 18) liefert, wenn α statt w geschrieben wird,

$$(11)\qquad \begin{aligned} \cos\alpha &= \varepsilon \frac{l_1 + l_2}{l_1 - l_2} \\ \sin\alpha &= \frac{2\sqrt{-l_1 l_2}}{l_1 - l_2}. \end{aligned}$$

Die Gleichung (8) gibt also lediglich den Ausdruck eines beliebigen Linienelements auf der Fläche wieder, dargestellt durch die Bogenelemente der Kurven c_1 und c_2.

Die Richtungskosinus dieser Kurven sind unter sich und mit denen der Normale durch die Relationen

$$(12)\qquad \begin{aligned} &\sum A_1^2 = 1, && \sum A_2^2 = 1, && \sum X^2 = 1, \\ &\sum A_2 X = 0, && \sum A_1 X = 0, && \sum A_1 A_2 = \cos\alpha \end{aligned}$$

verbunden. Unterwirft man das Formelsystem den Operationen D_1 und D_2 und löst die entstehenden Gleichungen nach den einzelnen Ableitungen auf, so erhält man die allgemeinen Frenetschen Formeln für das schiefwinklige Kurvennetz. In die Einzelheiten der Rechnung soll nicht noch einmal eingetreten werden. Da von vornherein nur invariante Operationen ins Spiel kommen, so kann man sich durch Spezialisierung der Parameter eine ausreichende Vorstellung von dem Bildungsgesetz der Formeln und der in ihnen auftretenden geometrischen Größen verschaffen.

Im Hinblick auf die nachher (S. 528) wieder anzuwendende Vertauschungsformel hat man dabei zu beachten, daß die spezialisierten Werte der Größen $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$,

$$\mathfrak{h}_1 = -\frac{1}{\sqrt{E'G'}}\frac{\partial\sqrt{E'}}{\partial v'}, \qquad \mathfrak{h}_2 = -\frac{1}{\sqrt{E'G'}}\frac{\partial\sqrt{G'}}{\partial u'},$$

im allgemeinen Falle nicht die Tangentialkrümmungen $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ der Kurven c_1 und c_2 darstellen, daß vielmehr für diese Größen die für u', v' statt u, v aus S. 139 (9) hervorgehenden Formeln gelten. Nach Einführung des Winkels α findet man

$$(13)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{h}_1 &= (\mathfrak{g}_1 + D_1\alpha)\operatorname{cosec}\alpha + (\mathfrak{g}_2 + D_2\alpha)\operatorname{ctg}\alpha \\ \mathfrak{h}_2 &= (\mathfrak{g}_1 + D_1\alpha)\operatorname{ctg}\alpha + (\mathfrak{g}_2 + D_2\alpha)\operatorname{cosec}\alpha. \end{aligned}$$

Die geometrischen Ableitungen $D_i\alpha$ $(i=1,2)$ erscheinen in den allgemeinen Frenetschen Formeln ebenfalls nur in den Verbindungen $\mathfrak{g}_i + D_i\alpha$. Außerdem kommen vor: die Normalkrümmungen $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$ und die geodätischen Windungen $\mathfrak{t}_1$, $\mathfrak{t}_2$. Sie hängen mit α durch die Gleichung

(14) $$\mathfrak{n}_1 \cos\alpha + \mathfrak{t}_1 \sin\alpha = \mathfrak{n}_2 \cos\alpha - \mathfrak{t}_2 \sin\alpha$$

oder

(15) $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\mathfrak{n}_2 - \mathfrak{n}_1}{\mathfrak{t}_2 + \mathfrak{t}_1}$$

zusammen.

Die Wichtigkeit der Tangentialnormale für die Theorie der Flächenkurven kennzeichnet sich hier aufs neue durch das Auftreten der Ausdrücke

(16) $$\begin{aligned} A_1 \operatorname{ctg}\alpha - A_2 \operatorname{cosec}\alpha &\equiv A', \ldots \\ A_2 \operatorname{ctg}\alpha - A_1 \operatorname{cosec}\alpha &\equiv A'', \ldots . \end{aligned}$$

Die allgemeinen Frenetschen Formeln selbst werden, wenn

(17) $$\mathfrak{n}_1 \cos\alpha + \mathfrak{t}_1 \sin\alpha \equiv \mathfrak{n}_2 \cos\alpha - \mathfrak{t}_2 \sin\alpha = \mathfrak{m}$$

gesetzt wird:

(a_1) $$\begin{aligned} D_1 A_1 &= -\mathfrak{g}_1 A' + \mathfrak{n}_1 X \\ D_1 B_1 &= -\mathfrak{g}_1 B' + \mathfrak{n}_1 Y \\ D_1 C_1 &= -\mathfrak{g}_1 C' + \mathfrak{n}_1 Z \end{aligned}$$

(b_1) $$\begin{aligned} D_1 A_2 &= (\mathfrak{g}_1 + D_1\alpha) A'' + \mathfrak{m} X \\ D_1 B_2 &= (\mathfrak{g}_1 + D_1\alpha) B'' + \mathfrak{m} Y \\ D_1 C_2 &= (\mathfrak{g}_1 + D_1\alpha) C'' + \mathfrak{m} Z \end{aligned}$$

(c_1) $$\begin{aligned} D_1 X &= -\mathfrak{n}_1 A_1 + \mathfrak{t}_1 A' \\ D_1 Y &= -\mathfrak{n}_1 B_1 + \mathfrak{t}_1 B' \\ D_1 Z &= -\mathfrak{n}_1 C_1 + \mathfrak{t}_1 C' \end{aligned}$$

(a_2) $$\begin{aligned} D_2 A_1 &= (\mathfrak{g}_2 + D_2\alpha) A' + \mathfrak{m} X \\ D_2 B_1 &= (\mathfrak{g}_2 + D_2\alpha) B' + \mathfrak{m} Y \\ D_2 C_1 &= (\mathfrak{g}_2 + D_2\alpha) C' + \mathfrak{m} Z \end{aligned}$$

(b_2) $$\begin{aligned} D_2 A_2 &= -\mathfrak{g}_2 A'' + \mathfrak{n}_2 X \\ D_2 B_2 &= -\mathfrak{g}_2 B'' + \mathfrak{n}_2 Y \\ D_2 C_2 &= -\mathfrak{g}_2 C'' + \mathfrak{n}_2 Z \end{aligned}$$

(c_2) $$\begin{aligned} D_2 X &= -\mathfrak{n}_2 A_2 - \mathfrak{t}_2 A'' \\ D_2 Y &= -\mathfrak{n}_2 B_2 - \mathfrak{t}_2 B'' \\ D_2 Z &= -\mathfrak{n}_2 C_2 - \mathfrak{t}_2 C''. \end{aligned}$$

Sie gehen für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ in S. 55 (a, b, c) und S. 200—201 (a', b', c') über.

Endlich folgen aus diesen Systemen in bekannter Weise die Fundamentalgleichungen

$$\text{(A)} \quad \begin{aligned} D_2 \mathfrak{g}_1 + D_1 \mathfrak{g}_2 + D_2 D_1 \alpha + \mathfrak{h}_2 D_2 \alpha - (\mathfrak{h}_1^2 - 2\mathfrak{h}_1 \mathfrak{h}_2 \cos\alpha + \mathfrak{h}_2^2) \operatorname{cosec}\alpha \\ = (\mathfrak{n}_1 \mathfrak{n}_2 - \mathfrak{m}^2) \operatorname{cosec}\alpha \end{aligned}$$

$$\text{(B)} \quad \begin{aligned} D_2 \mathfrak{n}_1 - \operatorname{ctg}\alpha\, D_2 \mathfrak{t}_1 + \operatorname{cosec}\alpha\, D_1 \mathfrak{t}_2 - 2\mathfrak{h}_2 \mathfrak{t}_2 \operatorname{cosec}\alpha + \mathfrak{h}_1(\mathfrak{n}_2 - \mathfrak{n}_1) \operatorname{cosec}^2\alpha = 0 \\ D_1 \mathfrak{n}_2 + \operatorname{ctg}\alpha\, D_1 \mathfrak{t}_2 - \operatorname{cosec}\alpha\, D_2 \mathfrak{t}_1 + 2\mathfrak{h}_1 \mathfrak{t}_1 \operatorname{cosec}\alpha + \mathfrak{h}_2(\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n}_2) \operatorname{cosec}^2\alpha = 0. \end{aligned}$$

In der ersten von ihnen könnte statt $D_2 D_1 \alpha + \mathfrak{h}_2 D_2 \alpha$ symmetrischer

$$\frac{1}{2}(D_2 D_1 \alpha + D_1 D_2 \alpha + \mathfrak{h}_1 D_1 \alpha + \mathfrak{h}_2 D_2 \alpha)$$

geschrieben werden. Durch Hinzunahme spezieller Voraussetzungen über das Kurvennetz oder die Fläche selbst läßt sich eine große Anzahl interessanter und wichtiger Sätze aus ihnen ableiten.

XII. Abschnitt.

Invarianten und Kovarianten von gegebener Ordnung.

§ 163.

Über Biegungs-Kovarianten und Invarianten 0. und 1. Ordnung.

Unter den flächentheoretischen Sätzen ist der von der Biegungsinvarianz des Gaußschen Krümmungsmaßes einer der wichtigsten. Ihm treten im Gebiete der Biegungstheorie andere zur Seite, die sich auf Kovarianten beziehen; die geodätische Krümmung einer Flächenkurve war eine solche. Es ist leicht, aus vorgelegten Biegungs-Invarianten und Kovarianten Größen derselben Art in jeder gewünschten Anzahl abzuleiten, und zwar nach verschiedenen Methoden. So braucht man z. B. nur die Operationen Δ^1 und Δ^2 in beliebiger Folge und beliebig oft auf die gegebenen Größen anzuwenden. Aber ungleich wichtiger ist es, die Fülle der von allen Seiten zuströmenden Invarianten und Kovarianten nach natürlichen Gesichtspunkten zu gruppieren und dann aus dem Bestande jeder Gruppe eine Auswahl zu treffen. Daß sich diese bei verschiedenen Untersuchungen nicht immer auf dieselben Größen zu richten braucht, versteht sich von selbst.

Die ganze analytische Theorie der Biegung gründet sich auf die Transformationsgleichungen einer binären quadratischen Differentialform A, die in der Flächentheorie das Quadrat des Linienelements bedeutet. Je nachdem man ein System von Funktionen $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$, ... gleichzeitig mit A betrachtet oder nicht, gelangt man zu Biegungskovarianten oder Biegungsinvarianten. Offenbar wird man zweckmäßig die Kovarianten nach der höchsten Ordnung der in ihnen vorkommenden Differentialquotienten der Funktionen $\varphi, \psi, \ldots$ einteilen, die Invarianten aber nach den Ableitungen von E, F, G. Für eine Biegungskovariante einer einzigen Funktion charakteristisch ist das Bestehen einer Gleichung

$$(1)\qquad f\left(E, F, G, \frac{\partial E}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \ldots\right) = f\left(E', F', G', \frac{\partial E'}{\partial u'}, \ldots, \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u'}, \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial v'}, \frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial u'^2}, \ldots\right),$$

in der f auf beiden Seiten dieselbe Funktion bedeutet. Kommen Ableitungen von φ bis zur m. Ordnung vor, so soll die Biegungskovariante selbst als von der m. Ordnung bezeichnet werden. Die Ausdehnung dieser Definition auf ein System mehrerer Funktionen liegt auf der Hand. Treten jedoch Ableitungen willkürlicher Funktionen garnicht auf, so kennzeichnet die Gleichung (1) eine Biegungsinvariante. Im besonderen enthält das Krümmungsmaß K außer den Fundamentalgrößen E, F und G auch deren sämtliche partielle Ableitungen 1. Ordnung und eine bestimmte Verbindung aus Ableitungen 2. Ordnung; es ist also eine Biegungsinvariante 2. Ordnung. $\Delta^1 K$ würde eine Biegungsinvariante 3. Ordnung sein, $\Delta^1\Delta^1 K$, $\Delta(K, \Delta^1 K)$, $\Delta^2 K$ Biegungsinvarianten 4. Ordnung, und so fort.

Die Fragen nun, die aufgeworfen werden müssen, wenn die Übersicht über das betrachtete Gebiet nicht verloren gehen soll, sind folgende: Welches ist die niedrigste Ordnung, für die Biegungs-Invarianten und Kovarianten existieren können? Wieviele voneinander unabhängige Größen dieser Art gibt es für jede vorgeschriebene Ordnung? Wie kann man ein vollständiges System unabhängiger Größen herstellen?

Diese Fragen sollen, soweit sie Kovarianten betreffen, hier nur für eine einzige Funktion beantwortet werden. Die Verallgemeinerung auf ein Funktionensystem bietet keine Schwierigkeit. Auch sollen unter den Biegungkovarianten diejenigen, die nur von dem Verhältnis $\frac{\partial \varphi}{\partial u} : \frac{\partial \varphi}{\partial v}$ abhängen, nicht besonders ausgezeichnet werden.

Beginnt man nun, wie angegeben, die planmäßige Untersuchung mit den Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} E &= E'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + 2F'\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u} + G'\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2 \\ F &= E'\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + F'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v}\right) + G'\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} \\ G &= E'\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + 2F'\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial v} + G'\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2 \end{aligned} \tag{2}$$

oder

$$a_{ik} = \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu}\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}, \qquad (i, k = 1, 2) \tag{3}$$

so erkennt man bald, daß die gesonderte Behandlung der Invarianten sich nicht empfiehlt. Man wird vielmehr, wenigstens bis zu einer bestimmten Ordnung hin, zusammen mit (3) auch die Gleichung

$$\varphi(u_1, u_2) = \overline{\varphi}(u'_1, u'_2) \tag{4}$$

und deren Derivierte im Auge behalten.

Offenbar ist es nicht möglich, die vier partiellen Ableitungen $\frac{\partial u_1'}{\partial u_1}, \frac{\partial u_1'}{\partial u_2}, \frac{\partial u_2'}{\partial u_1}, \frac{\partial u_2'}{\partial u_2}$ aus den drei Gleichungen (3) zu eliminieren. Es gibt also keine Biegungsinvariante 0. Ordnung.

Die Hinzunahme der Gleichung (4) führt nicht weiter. Es gibt also auch keine Biegungskovariante der Ordnung Null.

Ohne über Differentialquotienten 1. Ordnung hinauszugehen, kann man zu den beiden ersten Derivierten der Gleichung (4)

$$(5) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \sum_{\lambda} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u_\lambda'} \frac{\partial u_\lambda'}{\partial u_i} \qquad (i = 1, 2)$$

fortschreiten. Die vier oben genannten Ableitungen lassen sich dann aus den fünf Gleichungen (3, 5) entfernen. Dabei ergibt sich das Resultat in sehr übersichtlicher Form, wenn zunächst aus (5) die drei Beziehungen

$$(6) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} = \sum_{\lambda, \mu} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u_\lambda'} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u_\mu'} \frac{\partial u_\lambda'}{\partial u_i} \frac{\partial u_\mu'}{\partial u_k}$$

gebildet werden. Es sind die Transformationsgleichungen für die quadratische Differentialform

$$\sum_{i, k} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} du_i du_k \equiv d\varphi^2.$$

Die Zusammenstellung mit (3) liefert die Invarianz — im algebraischen Sinne —

$$(7) \qquad \sum_{i, k} \alpha_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} = \sum_{\lambda, \mu} \alpha_{\lambda\mu}' \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u_\lambda'} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u_\mu'},$$

deren beide Seiten von dem hier eingenommenen Standpunkt aus als verschiedene Ausdrücke einer Biegungskovariante bezeichnet werden müssen. Ein beim Zurückgehen von (6) zu (5) theoretisch auftretendes Vorzeichen ist für die Kovariante ohne Bedeutung. Von der zweiten algebraischen simultanen Invariante des Formenpaares $(\mathsf{A}, d\varphi^2)$ ist nicht die Rede, weil sie identisch verschwindet (S. 163).

Hiernach gibt es eine Biegungskovariante 1. Ordnung, die keine Ableitungen der Größen a_{ik} enthält, nämlich

$$\sum_{i, k} \alpha_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial \varphi}{\partial u_k} \equiv H_a(\mathsf{A}, d\varphi^2) \equiv \Delta_a^1 \varphi.$$

Die ersten Ableitungen der Formenkoeffizienten treten auf, wenn die Transformationsgleichungen (3) nach den Variabeln u_i differentiiert werden. So entstehen 2.3 Relationen

$$(8)\qquad \frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l} = \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial^2 u'_\mu}{\partial u_k \partial u_l} + \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k} \frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i \partial u_l}$$
$$+ \sum_{\lambda,\mu,\nu} \frac{\partial a'_{\lambda\mu}}{\partial u'_\nu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k} \frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l},$$

die ebensoviele Differentialquotienten $\frac{\partial^2 u'_a}{\partial u_a \partial u_b}$ enthalten. Daß sich diese nicht eliminieren lassen, erkennt man am deutlichsten aus der Möglichkeit, die Gleichungen nach den einzelnen Ableitungen aufzulösen. Die Operation ist im § 46 ausgeführt worden und hat die Christoffelschen Formeln

$$(9)\qquad \frac{\partial^2 u'_h}{\partial u_i \partial u_k} - \sum_\nu \begin{Bmatrix} ik \\ \nu \end{Bmatrix} \frac{\partial u'_h}{\partial u_\nu} = - \sum_{\lambda,\mu} \begin{Bmatrix} \lambda\mu \\ h \end{Bmatrix}' \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k} \qquad (h, i, k = 1, 2)$$

(S. 168 (23)) geliefert.

Da man keine Relation zwischen den Größen a_{ik}, $a'_{\lambda\mu}$ und ihren ersten Ableitungen herstellen kann, so gibt es keine Biegungsinvariante 1. Ordnung.

§ 164.

Die Biegungsinvariante zweiter Ordnung. Riemannsche Kovarianz.

Anders verhält es sich für die nächste Ordnung, bei der die Anzahl der abgeleiteten Gleichungen die der hinzutretenden Differentialquotienten um eine Einheit übertrifft. Denn aus den Transformationsgleichungen entstehen 3.3 Derivierte zweiter Ordnung, während 2.4 Ableitungen dritter Ordnung der Größen u'_λ vorhanden sind. Wenn diese also bei der Elimination nicht etwa gruppenweise wegfallen, so ergibt sich eine neue Gleichung, die sich nach Entfernung der zweiten Ableitungen mittels der Christoffelschen Formeln als eine Relation zwischen den ersten und zweiten Differentialquotienten der Größen a_{ik} und $a'_{\lambda\mu}$ und den ersten Ableitungen der Variabeln u'_λ darstellt. Diese Relation ist dann mit den bereits vorliegenden behufs Elimination der letztgenannten Größen zusammenzunehmen.

Die Elimination selbst ist im § 57 implizite bereits angestellt worden. Während es sich aber dort darum handelte, eine bestimmte Verbindung aus Biegungskovarianten, die sich als Invariante erwiesen hatte, durch die Formenkoeffizienten allein auszudrücken, ist hier von Biegungskovarianten garnicht die Rede. Behufs genauer Einsicht in den Eliminationsprozeß muß also die Rechnung anders geführt werden. Dabei wird man die abgeleiteten Gleichungen erster Ordnung aus einem auf S. 165 angegebenen Grunde so schreiben, wie

es sich schon für die Herleitung der Christoffelschen Formeln als nützlich herausgestellt hat, nämlich

$$(1)\quad \frac{\partial a_{ik}}{\partial u_l} = \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_i}\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_k \partial u_l} + \sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i \partial u_l} + \sum_{\lambda,\mu,\nu}\frac{\partial a'_{\lambda\mu}}{\partial u'_\nu}\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l}$$

(a. a. O. (11)).

Differentiiert man nach u_m und faßt das Bildungsgesetz des entstehenden Ausdrucks inbezug auf die Ableitungen dritter Ordnung ins Auge, so übersieht man sogleich, daß das vollständige Resultat der Elimination dieser Größen, auch für $n > 2$, durch Bildung von

$$\frac{\partial^2 a_{il}}{\partial u_k \partial u_m} + \frac{\partial^2 a_{km}}{\partial u_i \partial u_l} - \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial u_l \partial u_m} - \frac{\partial^2 a_{lm}}{\partial u_i \partial u_k}$$

erlangt wird. Hierbei treten Glieder von verschiedener Gestalt auf, und zwar zuerst solche, die in den zweiten Differentialquotienten der Variablen u'_λ von der zweiten Dimension sind:

$$2\sum_{\lambda,\mu} a'_{\lambda\mu}\left(\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i \partial u_k}\frac{\partial^2 u'_\mu}{\partial u_l \partial u_m} - \frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i \partial u_l}\frac{\partial^2 u'_\mu}{\partial u_k \partial u_m}\right).$$

Ersetzt man die Ableitungen durch ihre Werte aus den Christoffelschen Formeln, so erhält man hieraus mehrere verschiedene Gruppen von Ausdrücken, nämlich

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} &2\sum_{\lambda,\mu,\sigma,\tau} a'_{\lambda\mu}\left(\begin{Bmatrix} i\ k \\ \sigma \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l\ m \\ \tau \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i\ l \\ \sigma \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k\ m \\ \tau \end{Bmatrix}\right)\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_\sigma}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_\tau} \\ &\equiv 2\sum_{\sigma,\tau} a_{\sigma\tau}\left(\begin{Bmatrix} i\ k \\ \sigma \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l\ m \\ \tau \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} i\ l \\ \sigma \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} k\ m \\ \tau \end{Bmatrix}\right)\end{aligned}$$

nach Benutzung der Transformationsgleichungen; sodann

$$\text{(II)}\quad \begin{aligned} &2\sum_{\sigma,\tau,\lambda,\mu,\nu,\varrho} a'_{\sigma\tau}\left(\begin{Bmatrix} \lambda\ \mu \\ \sigma \end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix} \nu\ \varrho \\ \tau \end{Bmatrix}' - \begin{Bmatrix} \lambda\ \nu \\ \sigma \end{Bmatrix}'\begin{Bmatrix} \mu\ \varrho \\ \tau \end{Bmatrix}'\right)\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l}\frac{\partial u'_\varrho}{\partial u_m} \\ &\equiv 2\sum_{\sigma,\tau,\lambda,\mu,\nu,\varrho} \alpha'_{\sigma\tau}\left(\begin{bmatrix} \lambda\ \mu \\ \sigma \end{bmatrix}'\begin{bmatrix} \nu\ \varrho \\ \tau \end{bmatrix}' - \begin{bmatrix} \lambda\ \nu \\ \sigma \end{bmatrix}'\begin{bmatrix} \mu\ \varrho \\ \tau \end{bmatrix}'\right)\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l}\frac{\partial u'_\varrho}{\partial u_m}\end{aligned}$$

bei Anwendung der Beziehungen S. 167 (22) oder S. 168 (24), die in gleicher Weise für die transformierten Größen gelten.

Eine dritte Gruppe enthält die Christoffelschen Verbindungen sowohl aus den Größen a_{ik} wie aus den transformierten $a'_{\lambda\mu}$ zusammengesetzt. Sie hebt sich aber gegen ein anderes Aggregat, das aus den in den zweiten Ableitungen linearen Gliedern

$$2\sum_{\lambda,\mu,\nu}\begin{bmatrix}\mu\ \nu\\ \lambda\end{bmatrix}'\left(\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_l}\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_m}\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i\partial u_k}+\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_k}\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_l\partial u_m}\right.$$
$$\left.-\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_m}\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i\partial u_l}-\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l}\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_k\partial u_m}\right)$$

hervorgeht. Diese enthalten außerdem noch ein Aggregat:

$$\text{(III)}\qquad 4\sum_{\sigma,\tau,\lambda,\mu,\nu,\varrho}\alpha'_{\sigma\tau}\left(\begin{bmatrix}\lambda\ \nu\\ \sigma\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\mu\ \varrho\\ \tau\end{bmatrix}'-\begin{bmatrix}\lambda\ \mu\\ \sigma\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}\nu\ \varrho\\ \tau\end{bmatrix}'\right)\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l}\frac{\partial u'_\varrho}{\partial u_m}.$$

Endlich können die Glieder, in denen die zweiten Ableitungen der Größen u'_λ garnicht vorkommen, in die Summe

$$\text{(IV)}\qquad \sum_{\lambda,\mu,\nu,\varrho}\left(\frac{\partial^2 a'_{\lambda\nu}}{\partial u'_\mu\partial u'_\varrho}+\frac{\partial^2 a'_{\mu\varrho}}{\partial u'_\lambda\partial u'_\nu}-\frac{\partial^2 a'_{\lambda\mu}}{\partial u'_\nu\partial u'_\varrho}-\frac{\partial^2 a'_{\nu\varrho}}{\partial u'_\lambda\partial u'_\mu}\right)\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l}\frac{\partial u'_\varrho}{\partial u_m}$$

zusammengezogen werden. Nachdem man noch (II) gegen einen Teil von (III) gehoben hat, läßt sich die durch Elimination der zweiten und dritten Ableitungen entstehende Gleichung in die Form

$$\text{(2)}\qquad (imkl)=\sum_{\lambda,\mu,\nu,\varrho}(\lambda\varrho\mu\nu)'\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}\frac{\partial u'_\nu}{\partial u_l}\frac{\partial u'_\varrho}{\partial u_m}$$

setzen, wo

$$\text{(3)}\qquad (imkl)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a_{il}}{\partial u_k\partial u_m}+\frac{\partial^2 a_{km}}{\partial u_i\partial u_l}-\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial u_l\partial u_m}-\frac{\partial^2 a_{lm}}{\partial u_i\partial u_k}\right)$$
$$+\sum_{p,q}a_{pq}\left(\begin{Bmatrix}i\ l\\ p\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}k\ m\\ q\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}i\ k\\ p\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}l\ m\\ q\end{Bmatrix}\right)$$

ist und $(\lambda\varrho\mu\nu)'$ für die transformierten Größen die entsprechende Bedeutung hat. Das durch (2) vertretene Gleichungssystem charakterisiert die Kovarianz

$$\text{(4)}\qquad \sum_{i,k,l,m}(imkl)\,du_i\,\delta u_k\,\mathfrak{d}u_l\,\partial u_m=\sum_{\lambda,\mu,\nu,\varrho}(\lambda\varrho\mu\nu)'\,du'_\lambda\,\delta u'_\mu\,\mathfrak{d}u'_\nu\,\partial u'_\varrho,$$

die nach Riemann bezeichnet wird.

Für die hier allein interessierende Annahme $n=2$ lassen sich die Koeffizienten der Riemannschen Kovariante auf eine einzige Größe, etwa (1212), zurückführen. Dies folgt leicht aus dem Zusammenhange der Größen $(imkl)$ mit den im § 57 eingeführten $[imkl]$, der durch die Gleichungen S. 212 (22), S. 209 (10) und S. 211 (17) vermittelt wird,

$$\text{(5)}\qquad 2\,(imkl)=[lkmi]+[ilkm]+[lmki].$$

Das System (2) reduziert sich auf die eine Gleichung

$$\text{(6)}\qquad (1212)=(1212)'\left(\frac{\partial u'_1}{\partial u_1}\frac{\partial u'_2}{\partial u_2}-\frac{\partial u'_2}{\partial u_1}\frac{\partial u'_1}{\partial u_2}\right)^2,$$

und die Elimination der Ableitungen kann mit Hilfe der aus den Transformationsgleichungen folgenden Relation

$$(7) \qquad a = a'\left(\frac{\partial u_1'}{\partial u_1}\frac{\partial u_2'}{\partial u_2} - \frac{\partial u_2'}{\partial u_1}\frac{\partial u_1'}{\partial u_2}\right)^2$$

vollendet werden. An die Stelle der Riemannschen Kovarianz tritt dann die Invarianz

$$(8) \qquad \frac{(1212)}{a} = \frac{(1212)'}{a'}.$$

Daß es die Gaußsche Invarianz ist, sieht man aus der Relation

$$(9) \qquad (1212) = [1212],$$

die aus (5) in Verbindung mit S. 211 (20) und S. 212 (24) folgt und nach S. 212 (26)

$$(10) \qquad \frac{(1212)}{a} = K_a$$

liefert.

Es gibt also eine Biegungsinvariante zweiter Ordnung; sie hat in der Flächentheorie die Bedeutung des Krümmungsmaßes.

Die zweiten Ableitungen der Formenkoeffizienten sind in K_a nur in der Verbindung

$$\frac{\partial^2 a_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{11}}{\partial u_2^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 a_{22}}{\partial u_1^2} \equiv p$$

enthalten. Man könnte die zu der Invarianz (8) führende Elimination etwas einfacher anstellen, wenn man sein Augenmerk von vornherein auf diese Verbindung richtete. Aber die eigentliche Natur des Eliminationsresultats tritt deutlicher hervor, wenn die Zahl n nicht von Anfang an spezialisiert wird.

Die Rechnung wird auch dann etwas einfacher, wenn man bei der neuen Differentiation von den Christoffelschen Formeln anstatt von den Gleichungen (1) ausgeht. Doch ist dann eine Erörterung darüber nötig, wie viele der hierbei entstehenden Relationen voneinander unabhängig sind, und außerdem erscheint das Ergebnis der Elimination der zweiten und dritten Ableitungen nicht sofort in der übersichtlichen Gestalt (2).

§ 165.

Die Biegungsinvariante dritter Ordnung.

Nachdem die Gaußsche Invarianz $K_a = K_{a'}$ oder

$$(1) \qquad K = K'$$

einmal bewiesen ist, kann man leicht überblicken, in welche Form sich beim Fortgange zu den dritten Derivierten der Transformationsglei-

chungen das Resultat der Elimination der Ableitungen zweiter bis vierter Ordnung setzen läßt. Unter Ableitungen ohne weiteren Zusatz sollen dabei auch fernerhin die Differentialquotienten der Größen u'_λ nach den ursprünglichen Veränderlichen u_i verstanden werden.

Die Anzahl der Derivierten dritter Ordnung ist gleich 3 . 4, die der neu hinzukommenden Ableitungen vierter Ordnung gleich 2 . 5. Demnach werden zwei Resultanten existieren, aus denen noch die zweiten und die unter der Bedingung (1) ebenfalls eindeutig bestimmten dritten Ableitungen zu entfernen sind. Setzt man nun in den dritten Derivierten der Transformationsgleichungen die Glieder mit den höchsten Ableitungen der Variablen an, so bemerkt man sofort, daß man zur Elimination dieser Ableitungen die Verbindungen

$$\frac{\partial^3 a_{12}}{\partial u_1^2 \partial u_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 a_{11}}{\partial u_1 \partial u_2^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 a_{22}}{\partial u_1^3},$$

$$\frac{\partial^3 a_{12}}{\partial u_1 \partial u_2^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 a_{11}}{\partial u_2^3} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3 a_{22}}{\partial u_1^2 \partial u_2}$$

bilden muß. Ihre Form lehrt zugleich, daß die beiden so entstehenden Resultanten voneinander unabhängig sind. Die Ausdrücke selbst stimmen mit den Ableitungen $\frac{\partial p}{\partial u_1}$ und $\frac{\partial p}{\partial u_2}$ überein, die auch auftreten, wenn man (1) nach u_1 und u_2 differentiiert, also

$$\frac{\partial K}{\partial u_i} = \sum_\lambda \frac{\partial K'}{\partial u'_\lambda}\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \qquad (i = 1, 2) \tag{2}$$

bildet. Da nun endlich diese Gleichungen auch aus den Transformationsgleichungen S. 530 (3) durch fortgesetzte Differentiationen hervorgegangen sind, zweite und dritte Ableitungen aber nicht enthalten, so müssen sie mit dem Resultat der Elimination aller Ableitungen der Größen u'_λ, bis auf die der ersten Ordnung, aus dem Gesamtsystem der bis jetzt betrachteten Derivierten äquivalent sein. Die vier ersten Differentialquotienten sind schließlich aus den beiden Gleichungen (2) und den drei Transformationsgleichungen zu eliminieren. Und da die Formeln S. 531 (5) für $\varphi = K$, $\overline{\varphi} = K'$ in die obigen (2) übergehen, so ergibt sich aus dem dort Bemerkten, daß sich das Eliminationsresultat in die invariante Form

$$\sum_{i,k} \alpha_{ik}\frac{\partial K}{\partial u_i}\frac{\partial K}{\partial u_k} = \sum_{\lambda,\mu} \alpha'_{\lambda\mu}\frac{\partial K'}{\partial u'_\lambda}\frac{\partial K'}{\partial u'_\mu}$$

oder

$$\Delta_a^1 K = \Delta_{a'}^1 K' \tag{3}$$

setzen läßt. D. h. es existiert eine Biegungsinvariante dritter Ordnung, der Differentialparameter erster Ordnung der Gaußschen Invariante.

Bis jetzt ist also Folgendes festgestellt: Aus den drei Transformationsgleichungen und ihren $6 + 9 + 12$ Derivierten erster, zweiter und dritter Ordnung, zusammen 30 Gleichungen, die $4 + 6 + 8 + 10 = 28$ Ableitungen der Größen u'_λ enthalten, ergeben sich durch deren Elimination so viele Resultanten wie theoretisch zu erwarten sind, nämlich zwei. Es sind die Gleichungen (1) und (3). Eine von ihnen, die erste, entsteht schon durch Wegschaffung der Ableitungen erster bis dritter Ordnung aus den Transformationsgleichungen und ihren ersten und zweiten Derivierten, obgleich die Anzahl der Ableitungen und die der Gleichungen übereinstimmend gleich 18 ist. Daß trotzdem, wenn man einen Schritt weiter geht, nicht $12 - 10 = 2$ neue Resultanten hinzukommen können, sondern nur eine, wird noch deutlicher, wenn man zuerst das System der 27 Derivierten für sich betrachtet und aus ihm die 24 Differentialquotienten zweiter, dritter und vierter Ordnung eliminiert. Von den drei Resultanten, die dann noch die ersten Differentialquotienten enthalten, ist eine mit S. 534 (6) identisch, während die zwei anderen mit den obigen Gleichungen (2) übereinkommen. Daß dann die erstgenannte mit den Transformationsgleichungen allein, ohne Hinzuziehung von (2), eine Resultante liefert, rührt daher, daß in ihr die Ableitungen nur in der Verbindung $\frac{\partial(u'_1, u'_2)}{\partial(u_1, u_2)}$ auftreten, für die auch aus den Transformationsgleichungen eine im übrigen nur die Größen a_{ik} und $a'_{\lambda\mu}$ enthaltende Formel, nämlich S. 535 (7), hergestellt werden kann.

§ 166.

Die zweite Biegungskovariante erster Ordnung. Biegungskovarianten zweiter Ordnung.

Um nun zu den Biegungskovarianten zurückzukehren, ohne zunächst über die erste Ordnung hinauszugehen, muß man die Gleichungen S. 531 (5)

$$(1)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} = \sum_\lambda \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u'_\lambda} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}$$

mit denen zusammenstellen, die nach Elimination der höheren Ableitungen die Größen $\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}$ noch enthalten. Nach Ausscheidung der Relation S. 534 (6), die auf die Invarianz $K = K'$ geführt hat, sind dies die Transformationsgleichungen und die ersten Derivierten jener Invarianz,

$$(2)\qquad \frac{\partial K}{\partial u_i} = \sum_\lambda \frac{\partial K'}{\partial u'_\lambda} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}$$

(S. 536 (2)). Im ganzen hat man sieben Relationen mit vier zu eliminierenden Ableitungen. Zwei der drei Resultanten sind bereits aufgestellt worden, nämlich

(3) $$\Delta^1_a \varphi = \Delta^1_{a'} \varphi$$

(S. 531 (7)) und

(4) $$\Delta^1_a K = \Delta^1_{a'} K'$$

(S. 536 (3)). Was noch fehlt, ergibt sich in der brauchbarsten Gestalt mittels der aus (1) und (2) folgenden Formeln

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial K}{\partial u_k} = \sum_{\lambda, \mu} \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u'_\lambda} \frac{\partial K'}{\partial u'_\mu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k}$$

(vgl. S. 531). Man bilde nämlich eine der beiden absoluten simultanen Invarianten des Formenpaares $(\mathsf{A}, d\varphi\, dK)$,

$$\sum_{i,k} \alpha_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial K}{\partial u_k} \equiv H_a(\mathsf{A}, d\varphi\, dK) \equiv \Delta_a(\varphi, K),$$

deren charakteristische Gleichung

(5) $$\Delta_a(\varphi, K) = \Delta_{a'}(\overline{\varphi}, K')$$

hier als Biegungskovarianz aufzufassen ist. Die zweite simultane Invariante steht in unmittelbarem Zusammenhange mit der Funktionaldeterminante von φ und K, deren Kovarianz natürlich auch aus (1) und (2) selbst ohne weiteres abgelesen werden kann. Freilich kann die Gleichung

(6) $$D_a(\varphi, K) = D_{a'}(\varphi, K')$$

nichts Neues liefern, und in der Tat enthält das System (3, 4, 5, 6) wegen der Identität

(7) $$D_a(\varphi, K)^2 = \Delta^1_a \varphi \cdot \Delta^1_a K - \Delta_a(\varphi, K)^2$$

nur drei unabhängige Relationen.

Der Zwischenparameter der willkürlichen Funktion φ und der speziellen Funktion K gewinnt hier eine besondere Bedeutung. Er erscheint als Biegungskovariante erster Ordnung von φ, deren Koeffizienten Ableitungen der Fundamentalgrößen a_{ik} bis zur dritten Ordnung hin enthalten.

Da übrigens die Differentialquotienten von φ in $\Delta_a(\varphi, K)$ und $D_a(\varphi, K)$ linear vorkommen, in $\Delta^1_a \varphi$ dagegen in der zweiten Dimension, so ist es zweckmäßiger, gleichzeitig mit (5) auch die Kovarianz (6) beizubehalten und dafür die zuerst gefundene (3) wegzulassen, anstatt zu ihr eine der beiden neuen Gleichungen hinzuzunehmen.

Nachdem die Kovarianzen (5) und (6) gefunden sind, kann man sich mit Vorteil der Operationszeichen D_a und Δ_a zur Herstellung höherer Biegungskovarianten bedienen. So lassen sich schon für die Ordnung $m = 2$ die Größen

$$D_a(\Delta_a^1 \varphi, K) \text{ und } \Delta_a(\Delta_a^1 \varphi, K)$$

als Biegungkovarianten ansetzen. Da aber nach dem für $m = 1$ gefundenen Ergebnis zu erwarten ist, daß die Anzahl unabhängiger Biegungskovarianten einer beliebigen Ordnung mit der Anzahl der partiellen Ableitungen von φ für dieselbe Ordnung übereinstimmt, so ist zu diesen beiden Größen noch eine dritte hinzuzunehmen. Es sei der Differentialparameter zweiter Ordnung $\Delta_a^2 \varphi$, der hier als simultane Invariante der Form A und ihrer Christoffelschen Kovariante Φ_a erscheint,

$$\Delta_a^2 \varphi = \sum_{i,k} \alpha_{ik} \varphi_{ik} \equiv H_a(\mathsf{A}, \Phi_a)$$

(S. 320 (14, 15)). Zu untersuchen ist, ob die drei betrachteten Kovarianten inbezug auf die drei Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1^2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_1 \partial u_2}, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_2^2}$$

voneinander unabhängig sind. Wegen der durch die Formeln

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i \partial u_k} - \sum_\nu \left\{ {ik \atop \nu} \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\nu} = \varphi_{ik} \tag{8}$$

vermittelten eindeutigen Beziehung zwischen diesen Ableitungen und den Koeffizienten von Φ_a kann man statt dessen auch das Verhalten der Biegungskovarianten hinsichtlich dieser drei Größen prüfen. Nun erhält man, wenn man die Bezeichnungen S. 132 (9, 10) sowohl für φ selbst wie auch für K benutzt,

$$D_a(\Delta_a^1 \varphi, K) = \tag{9}$$
$$2\sqrt{\Delta_a^1 \varphi}\sqrt{\Delta_a^1 K}(\varphi_1' K_1 \varphi_{11} + (\varphi_1' K_2 + \varphi_2' K_1)\varphi_{12} + \varphi_2' K_2 \varphi_{22})$$

$$\Delta_a(\Delta_a^1 \varphi, K) = \tag{10}$$
$$2\sqrt{\Delta_a^1 \varphi}\sqrt{\Delta_a^1 K}(\varphi_1' K_1' \varphi_{11} + (\varphi_1' K_2' + \varphi_2' K_1')\varphi_{12} + \varphi_2' K_2' \varphi_{22})$$

$$\Delta_a^2 \varphi = \alpha_{11}\varphi_{11} + 2\alpha_{12}\varphi_{12} + \alpha_{22}\varphi_{22}. \tag{11}$$

Die Determinante dieser drei in $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{22}$ homogenen Ausdrücke hat den Wert

$$\frac{4\Delta_a^1\varphi\Delta_a^1 K}{a^{\frac{3}{2}}},$$

ist also von Null verschieden.

Mit der Einführung der Operationen D_a und Δ_a ist der Weg der Resultantenbildung verlassen worden. Und man sieht auf den ersten Blick, daß bei der Weiterverfolgung dieses Weges sich die drei eben besprochenen Biegungskovarianten nicht als die einfachsten ihrer Ordnung herausstellen würden. Um nämlich Kovarianten zweiter Ordnung zu bilden, braucht man zu den schon vorhandenen Gleichungen nur folgende drei hinzuzunehmen:

$$(12) \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial u_i\partial u_k} = \sum_\lambda \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial u'_\lambda}\frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i\partial u_k} + \sum_{\lambda,\mu}\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial u'_\lambda\partial u'_\mu}\frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i}\frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k};$$

oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn wieder die Kovarianz der Christoffelschen Differentialform als bereits erwiesen gilt: die Transformationsgleichungen für die Koeffizienten dieser Form. Dann kann man die Elimination der ersten Ableitungen auf verschiedene Weisen so ausführen, daß Ableitungen dritter Ordnung der Fundamentalgrößen, wie sie in (9) und (10) vorkommen, nicht aufzutreten brauchen, sondern, wie in (11), nur solche erster Ordnung. Ohne den Einzelheiten nachzugehen, entnehmen wir dem Früheren zwei bestimmte Ausdrücke, die bereits als Biegungskovarianten nachgewiesen sind, nämlich die Tangentialkrümmung der Kurve $\varphi(u, v) = \text{const.}$ und die ihrer orthogonalen Trajektorie. Es war (S. 137 (26))

$$(13) \qquad g_\varphi = -\frac{1}{\sqrt{\Delta_a^1\varphi}}(\varphi_1^2\varphi_{11} + 2\varphi_1\varphi_2\varphi_{12} + \varphi_2^2\varphi_{22}).$$

Dieser Formel entspricht nach S. 189 (10) und infolge des Zusammenhanges der Ausdrücke S. 176 (9, 10) mit den oben zitierten S. 132 (9, 10):

$$(14) \qquad g'_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\Delta_a^1\varphi}}(\varphi_1\varphi'_1\varphi_{11} + (\varphi_1\varphi'_2 + \varphi_2\varphi'_1)\varphi_{12} + \varphi_2\varphi'_2\varphi_{22}).$$

Auf einen Übergang zu einfacheren, für den vorliegenden Zweck ausreichende Aggregaten soll wegen der wichtigen geometrischen Bedeutung von g_φ und g'_φ selbst verzichtet werden. Stellt man jetzt die beiden neuen Größen mit dem Differentialparameter zweiter Ordnung zusammen, so findet man als Wert der Determinante inbezug auf $\varphi_{11}, \varphi_{12}, \varphi_{22}$:

$$-\frac{1}{a^{\frac{3}{2}}\Delta_a^1\varphi}.$$

Hiernach bilden g_φ, g'_φ und $\Delta^2\varphi$ ebenfalls ein System unabhängiger Biegungskovarianten zweiter Ordnung.

§ 167.

Biegungs-Kovarianten und Invarianten m. Ordnung.

Angenommen nun, es gebe, wie für $m-1=2$ bewiesen ist, für die $m-1$. Ordnung m voneinander unabhängige Biegungskovarianten der Funktion φ, die in den m Ableitungen

$$\frac{\partial^{m-1}\varphi}{\partial u_1^{m-1}} \equiv \varphi^{(m-1,0)}, \qquad \frac{\partial^{m-1}\varphi}{\partial u_1^{m-2}\partial u_2} \equiv \varphi^{(m-2,1)}, \ldots \frac{\partial^{m-1}\varphi}{\partial u_2^{m-1}} \equiv \varphi^{(0,m-1)}$$

linear sind. Sie mögen mit $F_1, \ldots F_m$ bezeichnet werden, und es sei

$$l_{\mu 1}\varphi^{(m-1,0)} + l_{\mu 2}\varphi^{(m-2,1)} + \cdots + l_{\mu m}\varphi^{(0,m-1)}$$

der Teil von F_μ, der die höchsten Ableitungen enthält. Die Unabhängigkeit der Funktionen F_i, immer hinsichtlich der höchsten Ableitungen, findet darin ihren Ausdruck, daß die Funktionaldeterminante von $F_1, \ldots F_m$ inbezug auf diese Ableitungen, also die Determinante

$$|l_{ik}| \equiv l, \qquad (i, k = 1, \ldots m)$$

nicht Null ist. Man kann dann ohne Schwierigkeit und auf verschiedenen Wegen beweisen, daß für die m. Ordnung $m+1$ unabhängige Biegungskovarianten existieren müssen.

Wird in $D_a(\varphi, K)$ und $\Delta_a(\varphi, K)$ die Funktion φ durch irgend eine der Biegungskovarianten $m-1$. Ordnung ersetzt, so entstehen neue Kovarianten, und zwar von der m. Ordnung. Man substituiere nun sämtliche Größen F_i der Reihe nach etwa in $D_a(\varphi, K)$ und nehme für eine von ihnen, F_λ, den Ausdruck $\Delta_a(\varphi, K)$ hinzu. Es sei, nur zur Abkürzung und ohne Rücksicht auf frühere Bezeichnungen,

$$D_a(\varphi, K) = \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}$$

$$\Delta_a(\varphi, K) = \alpha'\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} + \beta'\frac{\partial\varphi}{\partial u_2}.$$

Dann ergibt sich für die Funktionaldeterminante von

$$\Delta_a(F_\lambda, K), \quad D_a(F_1, K), \ldots D_a(F_m, K)$$

inbezug auf die Ableitungen

$$\varphi^{(m,0)}, \qquad \varphi^{(m-1,1)}, \ldots \varphi^{(0,m)}$$

der Wert

$$\begin{vmatrix} \alpha' l_{\lambda 1}, & \alpha' l_{\lambda 2} + \beta' l_{\lambda 1}, & \ldots\ldots & \alpha' l_{\lambda m} + \beta' l_{\lambda, m-1}, & \beta' l_{\lambda m} \\ \alpha l_{11}, & \alpha l_{12} + \beta l_{11}, & \ldots\ldots & \alpha l_{1m} + \beta l_{1, m-1}, & \beta l_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha l_{m1}, & \alpha l_{m2} + \beta l_{m1}, & \ldots\ldots & \alpha l_{mm} + \beta l_{m, m-1}, & \beta l_{mm} \end{vmatrix}$$

oder ausgerechnet

$$-(\alpha\beta'-\beta\alpha')l(l_{\lambda 1}\beta^{m-1}-l_{\lambda 2}\beta^{m-2}\alpha+l_{\lambda 3}\beta^{m-3}\alpha^2-\cdots+(-1)^{m-1}l_{\lambda m}\alpha^{m-1}).$$

Von den drei Faktoren ist der erste, $\alpha\beta'-\beta\alpha'$, gleich $\frac{1}{\sqrt{a}}\Delta_a^1 K$, also nicht Null. Der zweite, l, ist der Annahme nach von Null verschieden. Der dritte kann sicher nicht für jedes λ aus der Reihe $1, 2, \ldots m$ verschwinden, weil sonst die Determinante der m in den m Potenzen und Potenzprodukten β^{m-1}, $-\beta^{m-2}\alpha$, $\beta^{m-3}\alpha^2, \ldots$ homogenen linearen Funktionen gleich Null sein müßte. Diese Determinante hat aber den Wert l.

Hiernach übertrifft auch für eine beliebige Ordnung m die Anzahl der Biegungskovarianten die Zahl m um eine Einheit.

Nun handelt es sich endlich noch um die Anzahl der Biegungsinvarianten für eine beliebige Ordnung.

Setzt man in $D_a(\varphi, K)$ und $\Delta_a(\varphi, K)$

$$\varphi = \Delta_a^1 K$$

ein und nimmt $\Delta_a^2 K$ hinzu, so bekommt man drei Biegungsinvarianten vierter Ordnung, die voneinander unabhängig sein müssen. Zwar genügt hierfür nicht ohne weiteres die vorhin bewiesene Unabhängigkeit der drei Größen inbezug auf die zweiten Ableitungen von K, weil K nicht, wie φ, eine willkürliche Funktion ist. Aber die vierten Ableitungen der Formenkoeffizienten kommen nur in den Verbindungen

$$\frac{\partial^2 p}{\partial u_1^2}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial u_1 \partial u_2}, \quad \frac{\partial^2 p}{\partial u_2^2}$$

vor, und diese können aus den drei Invarianten nicht eliminiert werden. Ebensowenig ist die Elimination der höchsten Ableitungen möglich, wenn man nach dem oben für φ auseinandergesetzten Verfahren aus den drei Invarianten vierter Ordnung vier neue von der fünften Ordnung und sukzessive $m-1$ von der m. Ordnung bildet. Nur bleibt eben deshalb, weil die Verbindung p, auf die sich diese Schlüsse stützen, bloß bestimmte Ableitungen zweiter Ordnung enthält, die Frage offen, ob es nicht noch andere, von den eben beschriebenen unabhängige Invarianten gibt.

Auch diese Untersuchung kann nach verschiedenen Methoden ausgeführt werden. Um möglichst direkt zu verfahren, lasse man jetzt die Biegungskovarianten bei Seite und stelle die Gleichungen zusammen, aus denen die Biegungsinvarianten durch Resultantenbildung entspringen müssen. Beim Fortgange bis zu Invarianten $m-1$. Ordnung sind dies die Transformationsgleichungen nebst ihren Derivierten

bis zur $m-1$. Ordnung. Das System enthält die Ableitungen der Variabeln u'_λ nach den ursprünglichen Veränderlichen u_i bis zur m. Ordnung. Für $m=1, 2, 3$ und 4 ist es bereits diskutiert worden und hat die Resultanten

$$K = K', \qquad \Delta^1_a K = \Delta^1_{a'} K'$$

geliefert.

Beim Fortschreiten zu $m=5$, also zu den 3.5 Derivierten vierter Ordnung, treten 2.6 Ableitungen fünfter Ordnung hinzu. Eliminiert man diese, so bleiben drei Resultanten zurück, aus denen man sich von vornherein auch die Differentialquotienten dritter und vierter Ordnung mittels früherer Gleichungen weggeschafft denken kann. Ebenso wie bei dem vorhergehenden Schritt die beiden auftretenden Resultanten mit

$$\frac{\partial K}{\partial u_i} = \sum_\lambda \frac{\partial K'}{\partial u'_\lambda} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \tag{1}$$

äquivalent waren, so müssen sie hier mit den Relationen

$$\frac{\partial^2 K}{\partial u_i \partial u_k} = \sum_\lambda \frac{\partial K'}{\partial u'_\lambda} \frac{\partial^2 u'_\lambda}{\partial u_i \partial u_k} + \sum_{\lambda,\mu} \frac{\partial^2 K'}{\partial u'_\lambda \partial u'_\mu} \frac{\partial u'_\lambda}{\partial u_i} \frac{\partial u'_\mu}{\partial u_k} \tag{2}$$

gleichbedeutend sein. Ersetzt man schließlich auch die zweiten Ableitungen durch ihre Werte aus den Christoffelschen Formeln, so enthalten die drei Gleichungen außer den ersten Ableitungen noch der Reihe nach die Größen $\frac{\partial^2 p}{\partial u_1^2}$, $\frac{\partial^2 p}{\partial u_1 \partial u_2}$, $\frac{\partial^2 p}{\partial u_2^2}$ als diejenigen, die von den höchsten Differentialquotienten der Fundamentalgrößen abhängen. Man kommt also auch auf diesem natürlichen Wege wieder zu jenen drei Verbindungen; und außerdem lehrt die Art ihres Eingehens in die Gleichungen (2), daß die nach Elimination der ersten Ableitungen neu hinzutretenden drei Resultanten, die Differentialquotienten der ursprünglichen und der transformierten Fundamentalgrößen bis zur vierten Ordnung enthalten, voneinander unabhängig sein müssen. Allerdings liefert dieses Ergebnis das Bildungsgesetz dreier unabhängigen Biegungsinvarianten vierter Ordnung nicht mit, ja es sagt nicht einmal etwas über die invariante Form der Resultanten aus. Aber daß nicht mehr als drei verschiedene Biegungsinvarianten vierter Ordnung existieren können, steht nun fest.

Daß und in welcher Weise diese Schlüsse sich fortsetzen lassen, leuchtet ein. Es darf also als bewiesen betrachtet werden, daß für jede Ordnung $m > 3$ die Anzahl unabhängiger Biegungsinvarianten gleich $m-1$ ist.

Auf welchem Wege man auch die Anzahl der Biegungs-Invarianten und Kovarianten von gegebener Ordnung ermittelt haben möge, so muß doch die Gesamtanzahl der Invarianten bis zur $m-1$. und der Kovarianten bis zur m. Ordnung hin gleich der Anzahl der unabhängigen Resultanten sein, die durch Elimination der Ableitungen 1. bis m. Ordnung aus folgenden Gleichungen entstehen: 1) dem System der Transformationsgleichungen nebst ihren Derivierten 1. bis $m-1$. Ordnung; 2) den Derivierten 1. bis m. Ordnung der Gleichung $\varphi(u_1, u_2) = \varphi(u_1', u_2')$. Das erste System enthält

$$3(1+2+\cdots+m) \equiv \frac{3m(m+1)}{2}$$

Gleichungen, das zweite

$$2+3+\cdots+(m+1) \equiv \frac{m(m+3)}{2}.$$

Zu eliminierende Ableitungen gibt es

$$2(2+3+\cdots+(m+1)) \equiv m(m+3).$$

Die theoretisch zu erwartende Anzahl von Resultanten ist demnach

$$\frac{3m(m+1)}{2} + \frac{m(m+3)}{2} - m(m+3) \equiv m^2.$$

In der Tat ergibt sich diese Zahl wieder durch Addition der Anzahlen

$$2+3+\cdots+(m+1) \equiv \frac{m(m+3)}{2}$$

der Biegungskovarianten 1. bis m. Ordnung und

$$1+1+3+4+\cdots+(m-2) \equiv \frac{m(m-3)}{2}$$

der Biegungsinvarianten 2. bis $m-1$. Ordnung.

§ 168.

Fundamental-Kovarianten und Invarianten.

Die in den vorangehenden Paragraphen behandelten Biegungs-Invarianten und Kovarianten bilden nur einen Teil aller flächentheoretischen Invarianten uud Kovarianten überhaupt. Denn für die Theorie der Biegung war bloß eine einzige binäre quadratische Differentialform von Bedeutung, und schon die Ausdrücke der Koeffizienten dieser Form mittels der kartesischen Koordinaten kommen nur bei besonderen Aufgaben zum Vorschein (vgl. S. 123). Anders verhält es sich, wenn eine Fläche als starr angesehen oder wenigstens ihre Verbiegbarkeit nicht von vornherein in Betracht gezogen wird. Neben die Form $\mathsf{A} \equiv ds^2$ tritt dann als gleichberechtigt eine zweite, $\mathsf{B} \equiv n\,ds^2$. Als Grundbeispiel für dieses Verhältnis kann die Theorie der Hauptkrümmungen

dienen. n_1 und n_2 sind Invarianten, aber nur ihr Produkt oder vielmehr eine Größe, deren Gleichheit mit $n_1 n_2$ sich hinterher herausstellt, ist eine Biegungsinvariante. Diese Hauptkrümmungen nun erscheinen als irrationale simultane Invarianten des Formenpaares (A, B).

Wenn man die Untersuchung der Invarianten und Kovarianten von Grund aus in Angriff nehmen will (vgl. S. 530), so darf man das Formenpaar nicht als bereits gegeben voraussetzen, sondern hat einfach zu fragen, was für Größen bei der Transformation der kartesischen und der krummlinigen Koordinaten ungeändert bleiben. Die Scheidung nach Invarianten und Kovarianten, die Einteilung nach Ordnungen vollzieht sich wie in der Biegungstheorie. Auch methodisch kann das Problem ebenso behandelt werden wie dort: Die Invarianzen und Kovarianzen müssen sich als Resultanten eines Gleichungssystems herausstellen, aus dem man die Transformationskoeffizienten oder die Größen, die deren Stelle vertreten, eliminiert. Allgemeine gruppentheoretische Hilfsmittel sollen ebensowenig wie in den Paragraphen 163—167 herangezogen werden. Ferner soll, wie bisher, nicht nur für die kartesischen, sondern auch für die krummlinigen Koordinaten die Äquivalenz der neuen Größen zu den alten festgehalten werden. Die Ergebnisse einer nicht-äquivalenten Transformation sind dann unmittelbar zu übersehen. Ob man bei den einzelnen Schritten die Verwandlung der kartesischen Koordinaten oder der Parameter zuerst vornimmt, wird sich nach Zweckmäßigkeitsgründen richten.

Die beiden Systeme von Transformationen, denen eine durch die Gleichungen

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} x &= x(u, v) \\ y &= y(u, v) \\ z &= z(u, v) \end{aligned}$$

dargestellte Fläche unterworfen werden kann, lauten

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} x' &= x'_0 + a\,x + b\,y + c\,z \\ y' &= y'_0 + a'x + b'y + c'z \\ z' &= z'_0 + a''x + b''y + c''z \end{aligned}$$

und

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} u' &= u'(u, v) \\ v' &= v'(u, v). \end{aligned}$$

Gesucht werden Gleichungen der Form

$$\text{(3)} \quad f\left(x, y, z, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \dots \frac{\partial y}{\partial u}, \dots ; \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \dots\right)$$
$$= f\left(x', y', z', \frac{\partial x'}{\partial u'}, \frac{\partial x'}{\partial v'}, \frac{\partial^2 x'}{\partial u'^2}, \dots \frac{\partial y'}{\partial u'}, \dots ; \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u'}, \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial v'}, \frac{\partial^2 \overline{\varphi}}{\partial u'^2}, \dots\right),$$

wo f links und rechts denselben Ausdruck bedeutet. Und zwar solche Gleichungen, die in der angedeuteten Weise als Eliminationsresultate erscheinen, vorbehaltlich der Frage, ob die Darstellung in invarianter Form überhaupt möglich ist. Willkürliche Funktionen von Invarianten und Kovarianten werden hier ebenso wie in der Biegungstheorie beiseite gelassen.

Für die Transformation (1) allein wird eine Invarianz durch die Gleichung

$$(4)\quad f\left(x, y, z, \frac{\partial x}{\partial u}, \dots ; \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \dots\right) = f\left(x', y', z', \frac{\partial x'}{\partial u}, \dots ; \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \dots\right),$$

und für (2) allein durch

$$(5)\quad f\left(x, y, z, \frac{\partial x}{\partial u}, \dots ; \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \dots\right) = f\left(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \frac{\partial \bar{x}}{\partial u'}, \dots ; \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial u'}, \dots\right)$$

gekennzeichnet. Wo von Invarianten schlechthin die Rede ist, bedarf es also der Angabe der Transformation, auf die sie sich beziehen. Größen, die bei beiden Transformationen ihre Form nicht ändern, heißen Fundamental-Invarianten und Kovarianten.

Die Ordnung einer Kovariante von φ richtet sich nach der höchsten Ordnung der vorkommenden Ableitungen dieser Funktion; die einer Invariante nach der höchsten Ordnung der überhaupt auftretenden Differentialquotienten. Da eine Funktion φ in einer Invariante nicht enthalten ist, so sind dies Ableitungen von x, y, z. Im Hinblick auf die Bedeutung willkürlicher Funktionen $\varphi(u, v)$ in der Flächentheorie können die Kovarianten auch als Kurveninvarianten bezeichnet und den Punktinvarianten gegenübergestellt werden (S. 207).

§ 169.

Nichtexistenz einer Fundamentalinvariante erster Ordnung.

Um nun zunächst bei der Transformation der krummlinigen Koordinaten zu bleiben, so müssen alle Punktinvarianten für die Substitution

$$(1)\quad \begin{aligned} u' &= u'(u, v) \\ v' &= v'(u, v) \end{aligned}$$

aus den Gleichungen

$$(2)\quad \begin{aligned} x(u, v) &= \bar{x}(u', v') \\ y(u, v) &= \bar{y}(u', v') \\ z(u, v) &= \bar{z}(u', v') \end{aligned}$$

und ihren Derivierten durch Elimination sämtlicher darin auftretenden Ableitungen der neuen Parameter u', v' nach den alten u, v hervorgehen. Für die erste Ordnung sind demnach aus den $2 \,.\, 3$ abgeleiteten

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= \frac{\partial \bar{y}}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{\partial \bar{y}}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial \bar{z}}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial \bar{z}}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial v} \end{aligned}$$

die 2 . 2 Differentialquotienten $\frac{\partial u'}{\partial u}, \frac{\partial v'}{\partial u}, \frac{\partial u'}{\partial v}, \frac{\partial v'}{\partial v}$ zu entfernen. Vollzieht man diese Elimination in der elementarsten Weise, indem man die vier Ableitungen aus zweien der Gleichungspaare berechnet und in das dritte einsetzt, so erhält man die beiden voneinander unabhängigen Resultanten

$$(4)\qquad \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} : \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} : \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{\partial(\bar{y},\bar{z})}{\partial(u',v')} : \frac{\partial(\bar{z},\bar{x})}{\partial(u',v')} : \frac{\partial(\bar{x},\bar{y})}{\partial(u',v')}.$$

Wegen der Äquivalenz von u, v und u', v' (S. 43) können sie auch in der Form

$$(5)\qquad X = X', \qquad Y = Y', \qquad Z = Z'$$

geschrieben werden, wo die Größen links und rechts durch die Identitäten

$$(6)\qquad \sum X^2 = 1, \qquad \sum X'^2 = 1$$

verbunden sind. Da diese Größen nichts anderes sind als die Richtungskosinus der Normale, so erscheint ihre Invarianz für die Substitution (1) vom geometrischen Standpunkt aus als selbstverständlich (vgl. S. 161)

Verwandelt man auch die kartesischen Koordinaten, so hat man die durch die Gleichungen

$$(7)\qquad x' = x'_0 + \xi, \qquad y' = y'_0 + \eta, \qquad z' = z'_0 + \zeta$$

dargestellte Verschiebung des Anfangspunktes immer dann außeracht zu lassen, wenn, wie hier, die betrachteten Größen nicht die Koordinaten selbst, sondern nur ihre Ableitungen nach den Parametern enthalten. Die Drehung des Koordinatensystems, vermittelt durch die Substitution

$$(8)\qquad \begin{aligned} \xi &= a x + b y + c z \\ \eta &= a' x + b' y + c' z \\ \zeta &= a'' x + b'' y + c'' z, \end{aligned}$$

liefert zwischen den Größen X, Y, Z und ihren transformierten die Beziehungen

$$(9)\qquad \begin{aligned} \Xi &= a X + b Y + c Z \\ H &= a' X + b' Y + c' Z \\ Z &= a'' X + b'' Y + c'' Z, \end{aligned}$$

aus denen, in Verbindung mit den sechs Relationen unter den neun Transformationskoeffizienten $a, \dots c''$, zwar $\Sigma \Xi^2 = \Sigma X^2$ folgt, doch ist diese Resultante wegen $\Sigma X^2 \equiv 1$ nicht brauchbar.

Für die weitere Untersuchung ist es wichtig, sich klar zu machen, wie die Nichtexistenz von Fundamentalinvarianten erster Ordnung bei Umkehrung der Transformationsfolge herauskommt. Es mögen also jetzt zuerst die kartesischen Koordinaten geändert werden. Solange nicht mehrere Systeme von Koordinaten ins Spiel kommen, können sich bei der Verschiebung (7) nur solche Größen invariant verhalten, in denen nicht x, y, z selbst, sondern nur ihre Ableitungen auftreten. Die für diese bei Hinzunahme der Achsendrehung geltenden sechs Gleichungen

$$(10)\quad \begin{aligned} \frac{\partial x'}{\partial u} &= a\,\frac{\partial x}{\partial u} + b\,\frac{\partial y}{\partial u} + c\,\frac{\partial z}{\partial u}, & \frac{\partial x'}{\partial v} &= a\,\frac{\partial x}{\partial v} + b\,\frac{\partial y}{\partial v} + c\,\frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial y'}{\partial u} &= a'\,\frac{\partial x}{\partial u} + b'\,\frac{\partial y}{\partial u} + c'\,\frac{\partial z}{\partial u}, & \frac{\partial y'}{\partial v} &= a'\,\frac{\partial x}{\partial v} + b'\,\frac{\partial y}{\partial v} + c'\,\frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial z'}{\partial u} &= a''\frac{\partial x}{\partial u} + b''\frac{\partial y}{\partial u} + c''\frac{\partial z}{\partial u}, & \frac{\partial z'}{\partial v} &= a''\frac{\partial x}{\partial v} + b''\frac{\partial y}{\partial v} + c''\frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned}$$

geben mit den sechs Relationen zwischen $a, \dots c''$ zusammen die drei Resultanten

$$(11)\quad \begin{aligned} \left(\frac{\partial x'}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial u}\right)^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ \frac{\partial x'}{\partial u}\frac{\partial x'}{\partial v} + \frac{\partial y'}{\partial u}\frac{\partial y'}{\partial v} + \frac{\partial z'}{\partial u}\frac{\partial z'}{\partial v} &= \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} \\ \left(\frac{\partial x'}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y'}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z'}{\partial v}\right)^2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}$$

Das heißt: Die Verbindungen

$$\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \equiv E, \quad \sum\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} \equiv F, \quad \sum\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \equiv G,$$

die Fundamentalgrößen erster Ordnung der Fläche, sind Invarianten für die Transformation der kartesischen Koordinaten. Beim Übergange zu neuen Parametern entstehen dann (S. 39) die Transformationsgleichungen

$$(12)\quad \begin{aligned} E &= E'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + 2F'\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u} + G'\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2 \\ F &= E'\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + F'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v}\right) + G'\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} \\ G &= E'\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + 2F'\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial v} + G'\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2, \end{aligned}$$

aus denen die vier Ableitungen $\frac{\partial u'}{\partial u}, \frac{\partial u'}{\partial v}, \frac{\partial v'}{\partial u}, \frac{\partial v'}{\partial v}$ nicht eliminiert werden können.

§ 170.

Invarianzen für die Transformation der kartesischen Koordinaten.

Nachdem die additiven Konstanten x'_0, y'_0, z'_0 einmal aus der Untersuchung ausgeschieden sind, kann man bei den weiteren Operationen mit ξ, η, ζ statt mit x', y', z' rechnen. Bevor aber zu höheren Ableitungen fortgeschritten wird, ist zu untersuchen, ob die Formeln (11) die einzigen sind, die in der angegebenen Weise durch Resultantenbildung hergestellt werden können. Von dem hier eingenommenen Standpunkt aus darf dies nicht als selbstverständlich betrachtet werden, zumal die erste Formel (11) für sich allein schon durch Elimination der neun Substitutionskoeffizienten aus den sechs unter ihnen geltenden Relationen und den drei Gleichungen für $\frac{\partial x'}{\partial u}, \frac{\partial y'}{\partial u}, \frac{\partial z'}{\partial u}$ hervorgeht. Denn für irgend zwei Systeme von Größen, die durch die Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,z &= \xi \\ a'x + b'y + c'z &= \eta \\ a''x + b''y + c''z &= \zeta \end{aligned}$$

einer orthogonalen Substitution verknüpft sind, gilt die Beziehung

$$(2) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2.$$

In der analytischen Geometrie werden aus ihr die Bedingungen zwischen den Koeffizienten $a, \ldots c''$ abgeleitet, und umgekehrt die Gleichung aus diesen Bedingungen und den Substitutionsgleichungen hergestellt. Hier kommt es auf den zweiten Punkt an, und es muß zugleich gezeigt werden, daß (2) die einzige Resultante ist, die aus den angegebenen Gleichungen durch Elimination der Transformationskoeffizienten folgen kann.

Die Verallgemeinerung für $n > 3$, hier nicht gebraucht, liegt auf der Hand; für $n = 2$ hat die Aufgabe, wenn man dann von einer solchen noch sprechen will, ein anderes Aussehen, weil die Anzahl der Gleichungen die der zu eliminierenden Größen um eine Einheit übertrifft.

Die sechs Bedingungsgleichungen unter den Transformationskoeffizienten seien in der Form

$$(3) \qquad \begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= 1 \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 &= 1 \end{aligned}$$

$$(4) \qquad \begin{aligned} a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0 \\ a''a + b''b + c''c &= 0 \\ a\,a' + b\,b' + c\,c' &= 0 \end{aligned}$$

vorausgesetzt. Die Substitutionsgleichungen gehören hierzu eigentlich in der Gestalt

$$x = a\xi + a'\eta + a''\zeta, \ldots,$$

also nach x, y, z aufgelöst. Da aber diese mittels der Bedingungen (3, 4) sofort in (1) übergeführt werden können, so soll die bisherige Fassung (1) beibehalten werden.

Bei der Prüfung der Möglichkeit einer Elimination der neun Größen $a, \ldots c''$ aus den neun Gleichungen (1, 3, 4) wird man, so lange es tunlich ist, mit linearen Gleichungen zu operieren suchen. Von den verschiedenen Methoden, die man dabei anwenden kann, ist folgende am einfachsten. Man entnehme a, b, c aus der dritten und zweiten Gleichung (4) und der ersten Gleichung (1) und setze die Werte in die erste Bedingung (3) ein, so wird

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \\ x & y & z \end{vmatrix}^2 = \xi^2 \sum (b'c'' - c'b'')^2.$$

Diese Relation hat dann weiter zusammen mit zwei passend gewählten aus dem System (1, 3, 4) zur Darstellung von a', b', c' durch a'', b'', c'' zu dienen. Wird zur Abkürzung

$$\sum a'^2 = \lambda', \qquad \sum a''^2 = \lambda'', \qquad \sum a'a'' = \mu$$
$$\sum a'x = \eta', \qquad \sum a''x = \zeta', \qquad \sum x^2 = r^2$$

gesetzt, wo die Summationen sich immer auf die Buchstaben, nicht auf die Akzente beziehen, so kann (5) in der Form

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} \lambda' & \mu & \eta' \\ \mu & \lambda'' & \zeta' \\ \eta' & \zeta' & r^2 \end{vmatrix} = \xi^2(\lambda'\lambda'' - \mu^2)$$

geschrieben werden. Man sieht, daß es zweckmäßig ist, von den Gleichungen, in denen a', b', c' noch vorkommen, zuerst die zweite Bedingung (3) und die erste (4), nämlich

$$\lambda' = 1, \qquad \mu = 0$$

zu benutzen. Dann vereinfacht sich (6) in

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \eta' \\ 0 & \lambda'' & \zeta' \\ \eta' & \zeta' & r^2 \end{vmatrix} = \xi^2\lambda''$$

oder

$$(7)\qquad \lambda''(r^2 - \xi^2 - \eta'^2) = \zeta'^2.$$

Nun gehört dem gegebenen System noch eine Gleichung mit a', b', c' an, nämlich die zweite aus der Gruppe (1). In diese hätte man also die Werte von a', b', c' einzusetzen, die aus (7) und den schon unmittelbar vorher benutzten Formeln folgen. Allein die Elimination vollzieht sich ohne nochmalige Anwendung der letztgenannten Formeln, weil sie mit der von η' aus (7) und

$$\eta' = \eta$$

gleichbedeutend ist, und das Resultat heißt einfach

$$\lambda''(r^2 - \xi^2 - \eta^2) = \zeta'^2. \tag{8}$$

Endlich gelten für die dritte Gruppe von Substitutionskoeffizienten, a'', b'', c'', außer (8) noch die beiden letzten Gleichungen (1) und (3), die mit

$$\zeta' = \zeta, \qquad \lambda'' = 1$$

übereinstimmen. Da die drei Koeffizienten nur in den zwei Verbindungen λ'' und ζ' vorkommen, so ist die Elimination möglich und liefert

$$r^2 - \xi^2 - \eta^2 = \zeta^2,$$

d. h.

$$x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2. \tag{9}$$

Es gibt also eine von Ableitungen freie Invariante für die Drehung des rechtwinkligen Koordinatensystems, nämlich $x^2 + y^2 + z^2$.

Nunmehr werde eine zweite Reihe von Substitutionsgleichungen hinzugenommen (vgl. S. 548 (10)):

$$\begin{aligned} a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1 &= \xi_1 \\ a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 &= \eta_1 \\ a''x_1 + b''y_1 + c''z_1 &= \zeta_1. \end{aligned} \tag{10}$$

Nach dem eben Bewiesenen lassen sich die neun Substitutionskoeffizienten nicht einzeln aus (1), (3) und (4) darstellen; sonst würde ihre Elimination sehr einfach sein. Es scheint nun am nächsten zu liegen, daß man a, b, c aus den ersten Gleichungen (1), (3), (10) entnähme, a', b', c' aus den zweiten und a'', b'', c'' aus den dritten Gleichungen dieser Systeme, um sodann sämtliche Werte in (4) einzusetzen. Aber der Weg, der am schnellsten zum Ziel führt, geht nicht von einer völlig symmetrischen Behandlung der drei Größensysteme aus.

Man bestimme a, b, c als Funktionen von a'', b'', c'' aus

$$\begin{aligned} aa'' + bb'' + cc'' &= 0 \\ ax + by + cz &= \xi \\ ax_1 + by_1 + cz_1 &= \xi_1, \end{aligned}$$

a', b', c' aus

$$a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0$$
$$a'x + b'y + c'z = \eta$$
$$a'x_1 + b'y_1 + c'z_1 = \eta_1.$$

Es wird

$$a\sum a''(yz_1 - zy_1) = -(b''z_1 - c''y_1)\xi + (b''z - c''y)\xi_1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

und a', b', c' ergeben sich durch Vertauschung von ξ und ξ_1 mit η und η_1. Führt man diese Werte in sämtliche Gleichungen ein, die $a, \ldots c'$ noch enthalten, nämlich

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$
$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$$
$$aa' + bb' + cc' = 0,$$

und setzt

$$\sum a''x_1 = \zeta_1',$$
$$\sum xx_1 = s, \qquad \sum x_1^2 = r_1^2,$$

so findet man

$$(11)\quad \begin{vmatrix} \lambda'' & \zeta' & \zeta_1' \\ \zeta' & r^2 & s \\ \zeta_1' & s & r_1^2 \end{vmatrix} = \xi^2(\lambda'' r_1^2 - \zeta_1'^2) - 2\xi\xi_1(\lambda'' s - \zeta'\zeta_1') + \xi_1^2(\lambda'' r^2 - \zeta'^2)$$

$$(12)\quad \begin{vmatrix} \lambda'' & \zeta' & \zeta_1' \\ \zeta' & r^2 & s \\ \zeta_1' & s & r_1^2 \end{vmatrix} = \eta^2(\lambda'' r_1^2 - \zeta_1'^2) - 2\eta\eta_1(\lambda'' s - \zeta'\zeta_1') + \eta_1^2(\lambda'' r^2 - \zeta'^2)$$

$$(13)\quad 0 = \xi\eta(\lambda'' r_1^2 - \zeta_1'^2) - (\xi\eta_1 + \eta\xi_1)(\lambda'' s - \zeta'\zeta_1') + \xi_1\eta_1(\lambda'' r^2 - \zeta'^2).$$

Aus diesen Gleichungen und den noch nicht benutzten

$$a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1$$
$$a''x + b''y + c''z = \zeta$$
$$a''x_1 + b''y_1 + c''z_1 = \zeta_1,$$

d. h.

$$\lambda'' = 1, \qquad \zeta' = \zeta, \qquad \zeta_1' = \zeta_1$$

sind a'', b'', c'' zu eliminieren. Diese Größen kommen aber auch in (11, 12, 13) nur in den Verbindungen λ'', ζ' und ζ_1' vor. Demnach heißen die drei Resultanten

$$\begin{vmatrix} 1 & \zeta & \zeta_1 \\ \zeta & r^2 & s \\ \zeta_1 & s & r_1^2 \end{vmatrix} = \xi^2(r_1^2 - \zeta_1^2) - 2\xi\xi_1(s - \zeta\zeta_1) + \xi_1^2(r^2 - \zeta^2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \zeta & \zeta_1 \\ \zeta & r^2 & s \\ \zeta_1 & s & r_1^2 \end{vmatrix} = \eta^2(r_1^2 - \zeta_1^2) - 2\eta\eta_1(s - \zeta\zeta_1) + \eta_1^2(r^2 - \zeta^2)$$

$$0 = \xi\eta(r_1^2 - \zeta_1^2) - (\xi\eta_1 + \eta\xi_1)(s - \zeta\zeta_1) + \xi_1\eta_1(r^2 - \zeta^2).$$

Subtrahiert man die zweite von der ersten, so erhält man in Verbindung mit der dritten

$$\begin{aligned} r_1^2 - \zeta_1^2 &= \varrho(\xi_1^2 + \eta_1^2) \\ s - \zeta\zeta_1 &= \varrho(\xi\xi_1 + \eta\eta_1) \\ r^2 - \zeta^2 &= \varrho(\xi^2 + \eta^2), \end{aligned}$$

wo der Proportionalitätsfaktor ϱ offenbar nicht Null sein kann. Die erste Resultante, deren linke Seite gleich

$$(r^2 - \zeta^2)(r_1^2 - \zeta_1^2) - (s - \zeta\zeta_1)^2$$

ist, liefert für ϱ die Bestimmung

$$\varrho((\xi^2 + \eta^2)(\xi_1^2 + \eta_1^2) - (\xi\xi_1 + \eta\eta_1)^2) = (\xi\eta_1 - \eta\xi_1)^2,$$

d. h.

$$\varrho = 1,$$

wie auch aus (9) hätte geschlossen werden können. Zu der Resultante

$$x^2 + y^2 + z^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$$

treten also die beiden

$$\begin{aligned} xx_1 + yy_1 + zz_1 &= \xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 \\ x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 &= \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2. \end{aligned}$$

Setzt man nun an die Stelle von $x, x_1, \xi, \xi_1, \ldots$ wieder die Größen, die nach S. 548 (10) hier in Betracht kommen, so sieht man, daß in der Tat, solange von höheren Ableitungen nicht die Rede ist, allein die Fundamentalgrößen erster Ordnung für die Transformation der kartesischen Koordinaten invariant sind.

§ 171.

Fundamentalinvarianten zweiter Ordnung. Kovarianten beliebiger Ordnung.

Beim Fortgange zu den Ableitungen zweiter Ordnung mögen, wie im Anfange des § 169, zuerst die Parameter transformiert werden. Aus S. 547 (3) entsteht ein System von 3 . 3 Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u'}\frac{\partial^2 u'}{\partial u^2} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial v'}\frac{\partial^2 v'}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u'^2}\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u'\partial v'}\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u} + \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v'^2}\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2, \ldots$$

(1) $$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u'}\frac{\partial^2 u'}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial v'}\frac{\partial^2 v'}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u'^2}\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u'\partial v'}\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v}\right) + \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v'^2}\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v}, \ldots$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} = \frac{\partial \bar{x}}{\partial u'}\frac{\partial^2 u'}{\partial v^2} + \frac{\partial \bar{x}}{\partial v'}\frac{\partial^2 v'}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u'^2}\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u'\partial v'}\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v'^2}\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2, \ldots .$$

Aus je drei Relationen zwischen gleichartigen Differentialquotienten von x, y und z können zwei zweite Ableitungen der neuen Parameter eliminiert werden, z. B. $\frac{\partial^2 u'}{\partial u^2}$ und $\frac{\partial^2 v'}{\partial u^2}$ aus den Formeln für $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}$. Die Herstellung der Resultanten auf dem gewöhnlichen Wege geschieht durch Addition der Gleichungen jeder Gruppe nach vorgängiger Multiplikation mit Größen, die den Funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(\bar{y}, \bar{z})}{\partial(u', v')}, \quad \frac{\partial(\bar{z}, \bar{x})}{\partial(u', v')}, \quad \frac{\partial(\bar{x}, \bar{y})}{\partial(u', v')},$$

d. h. den Zählern von X', Y', Z', gleich oder proportional sind. Wegen der Invarianz der Richtungskosinus der Normale für die Transformation der krummlinigen Koordinaten wird man die Multiplikatoren gleich X', Y', Z' selbst nehmen und links X, Y, Z dafür schreiben (S. 161). Dann treten die Ausdrücke

$$\sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \equiv L, \qquad \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \equiv M, \qquad \sum X \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \equiv N,$$
$$\sum X' \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u'^2} \equiv L', \qquad \sum X' \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial u' \partial v'} \equiv M', \qquad \sum X' \frac{\partial^2 \bar{x}}{\partial v'^2} \equiv N'$$

auf, und die drei Resultanten lauten

$$L = L'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + 2M'\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial u} + N'\left(\frac{\partial v'}{\partial u}\right)^2$$

(2) $$M = L'\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v} + M'\left(\frac{\partial u'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v} + \frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial u'}{\partial v}\right) + N'\frac{\partial v'}{\partial u}\frac{\partial v'}{\partial v}$$

$$N = L'\left(\frac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + 2M'\frac{\partial u'}{\partial v}\frac{\partial v'}{\partial v} + N'\left(\frac{\partial v'}{\partial v}\right)^2.$$

Wie vorher die Fundamentalgrößen erster Ordnung der Fläche, so erscheinen hier von selbst die der zweiten Ordnung, und die Gleichungen

(2), die der Form nach mit S. 548 (12) übereinstimmen, kennzeichnen auch diese Größen als Koeffizienten einer binären quadratischen Differentialform

$$L du^2 + 2 M du dv + N dv^2 \equiv \mathsf{B},$$

die bei einer beliebigen Transformation in $L' du'^2 + 2 M' du' dv' + N' dv'^2$ übergeführt wird.

Die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung sind für die Transformation der kartesischen Koordinaten invariant. Dies folgt unmittelbar aus den Gleichungen S. 547 (9) und den aus S. 548 (10) durch Fortsetzung der Differentiation hervorgehenden, die dieselbe Form haben wie die Transformationsgleichungen selbst. Lassen sich also die Resultanten der Elimination von $\frac{\partial u'}{\partial u}, \cdots \frac{\partial v'}{\partial v}$ aus (2) und S. 548 (12), deren theoretische Anzahl gleich 2 ist, in invariante Form setzen, so sind die darin beiderseits stehenden Ausdrücke zugleich Fundamentalinvarianten.

Hierüber kann aber kein Zweifel sein. Denn die simultane Transformation der beiden quadratischen Formen A und B liefert die beiden Beziehungen (vgl. S. 162)

$$\frac{GL - 2FM + EN}{EG - F^2} = \frac{G'L' - 2F'M' + E'N'}{E'G' - F'^2}$$

$$\frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{L'N' - M'^2}{E'G' - F'^2},$$

d. h.

$$H_a(\mathsf{A}, \mathsf{B}) = H_{a'}(\mathsf{A}', \mathsf{B}')$$

$$K_a(\mathsf{A}, \mathsf{B}) = K_{a'}(\mathsf{A}', \mathsf{B}')$$

oder einfach

$$H = H' \tag{3}$$

$$K = K', \tag{4}$$

und zwar als einzige Resultanten. Nachdem sich die Verwertung der Formentheorie im Vorhergehenden auf Schritt und Tritt als besonders nützlich erwiesen hat, würde es keinen Zweck haben, bestimmte Hauptresultate dieser Theorie nach unübersichtlicherer Methode nochmals abzuleiten.

Diese Resultate lehren, daß es zwei Fundamentalinvarianten zweiter Ordnung gibt. Wenn man will, kann man die irrationalen Invarianten n_1 und n_2 oder ϱ_1 und ϱ_2 an die Stelle von H und K treten lassen.

Die Theorie des Formenpaares (A, B) liefert auch alles, was für die Abzählung und die Darstellung der Fundamentalkovarianten einer beliebigen Ordnung gebraucht wird. Aus den sechs Transformationsgleichungen für E, F, G, L, M, N und den zwei Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial u} + \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial u}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial u'}\frac{\partial u'}{\partial v} + \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial v'}\frac{\partial v'}{\partial v}$$

folgen zunächst, außer (3) und (4), noch die Resultanten

(5) $$\Delta_a^1 \varphi = \Delta_{a'}^1 \overline{\varphi}$$

und

(6) $$\Delta_b^1 \varphi = \Delta_{b'}^1 \overline{\varphi}.$$

Vermöge der Darstellung von A und B durch lineare Formen, vermittelt durch

$$\mathsf{A} = \mathfrak{P}_1^2 + \mathfrak{P}_2^2$$

$$\mathsf{B} = n_1 \mathfrak{P}_1^2 + n_2 \mathfrak{P}_2^2,$$

wird

(7) $$\Delta_a^1 \varphi = \Theta_1^2 \varphi + \Theta_2^2 \varphi$$

(8) $$\Delta_b^1 \varphi = \varrho_1 \Theta_1^2 \varphi + \varrho_2 \Theta_2^2 \varphi.$$

Die in den Fundamentalgrößen irrationalen Kovarianten $\Theta_1 \varphi$ und $\Theta_2 \varphi$ können die rationalen $\Delta_a^1 \varphi$ und $\Delta_b^1 \varphi$ vertreten.

Nimmt man an, wie es hiermit für $m = 1$ bewiesen ist, daß auch für beliebiges m die Anzahl unabhängiger Kovarianten der der Differentialquotienten von φ gleich, also $= m + 1$ sei, so kann man die Richtigkeit dieser Annahme durch Induktion auf genau dieselbe Art beweisen wie für Biegungskovarianten auf S. 541—542. Aus einer gegebenen Reihe von m unabhängigen Fundamentalkovarianten $m - 1$. Ordnung, $F_1, \dots F_m$, kann man eine Reihe unabhängiger Kovarianten für die nächste Ordnung z. B. dadurch ableiten, daß man $\Theta_1 F_i (i = 1, \dots m)$ bildet und $\Theta_2 F_m$ hinzunimmt; und zwar gilt dies sicher dann, wenn schon $F_1, \dots F_m$ aus bestimmten $m - 1$ Kovarianten der nächstniedrigeren Ordnung nach derselben Rechnungsvorschrift hergestellt sind.

§ 172.

Die Anzahl unabhängiger Fundamentalinvarianten von gegebener Ordnung.

Aus den beiden Fundamentalinvarianten zweiter Ordnung H und K lassen sich vier Fundamentalinvarianten dritter Ordnung ableiten, $\Theta_1 H$, $\Theta_2 H$, $\Theta_1 K$, $\Theta_2 K$. Es fragt sich, ob sie voneinander unabhängig sind. Diese Untersuchung, und die entsprechende für eine beliebige Ordnung, wird durch die Flächendarstellung

(III) $$z = f(x, y)$$

sehr erleichtert. Wie auch die Funktionen $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ angenommen sein mögen, so sind sie doch für eine bestimmte Fläche einer einzigen, $f(x, y)$, äquivalent, und für eine nicht spezialisierte Fläche ist dies eine willkürliche Funktion. Hat man nun durch wiederholte Anwendung der Θ-Operationen Invarianten m. Ordnung gebildet, so kann man deren Werte vermöge der Invarianz dieser Operationen sofort in die Parameter x und y umsetzen. Dabei sieht man dann, daß die Anzahl der unabhängigen Invarianten nicht größer sein kann als die der partiellen Ableitungen m. Ordnung von z nach x und y, also $m+1$. Ob sie im allgemeinen dieser Anzahl gleich ist, bedarf einer genauen Feststellung um so mehr, als für $m=2$ nur zwei Fundamentalinvarianten vorhanden sind.

Nun ist z. B.

$$\Theta_1 H = \frac{1}{T}\left(\quad p_{22}\frac{\partial H}{\partial u} - p_{21}\frac{\partial H}{\partial v}\right)$$

$$\Theta_2 H = \frac{1}{T}\left(-p_{12}\frac{\partial H}{\partial u} + p_{11}\frac{\partial H}{\partial v}\right),$$

wo $p_{11}, \ldots p_{22}$ die im § 118 angegebenen Werte haben. Beim Übergange zu x und y werden diese, als Funktionen der Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung, in bestimmter Weise von p, q, r, s, t abhängig. Setzt man nun weiter nach S. 80 (12, 13)

$$H = \varepsilon\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(p^2+q^2+1)^{\frac{3}{2}}} \tag{1}$$

$$K = \frac{rt - s^2}{(p^2+q^2+1)^2}, \tag{2}$$

so kommt es darauf an, das Verhalten der Größen

$$\frac{1}{(p^2+q^2+1)^{\frac{1}{2}}}\left(\quad p_{22}\frac{\partial H}{\partial x} - p_{21}\frac{\partial H}{\partial y}\right)$$

$$\frac{1}{(p^2+q^2+1)^{\frac{1}{2}}}\left(-p_{12}\frac{\partial H}{\partial x} + p_{11}\frac{\partial H}{\partial y}\right)$$

$$\frac{1}{(p^2+q^2+1)^{\frac{1}{2}}}\left(\quad p_{22}\frac{\partial K}{\partial x} - p_{21}\frac{\partial K}{\partial y}\right)$$

$$\frac{1}{(p^2+q^2+1)^{\frac{1}{2}}}\left(-p_{12}\frac{\partial K}{\partial x} + p_{11}\frac{\partial K}{\partial y}\right)$$

inbezug auf die in $\frac{\partial H}{\partial x}, \cdots \frac{\partial K}{\partial y}$ enthaltenen dritten Ableitungen z_{30}, z_{21}, z_{12}, z_{03} zu untersuchen. Dabei bedeuten, unter Verzicht auf besondere Kennzeichnung, jetzt $p_{11}, \ldots p_{22}$ die Werte dieser Koeffizienten für $u = x$, $v = y$. Der Faktor $(p^2+q^2+1)^{-\frac{1}{2}}$ ist hier ohne Bedeu-

tung. Aber man kann noch weitere Faktoren weglassen, weil es offenbar in den vier Ableitungen von H und K nur auf Ausdrücke der Form

$$\alpha z_{30} + \beta z_{21} + \gamma z_{12}, \qquad \alpha z_{21} + \beta z_{12} + \gamma z_{03},$$
$$\alpha' z_{30} + \beta' z_{21} + \gamma' z_{12}, \qquad \alpha' z_{21} + \beta' z_{12} + \gamma' z_{03}$$

ankommt, in denen $\alpha, \ldots \gamma'$ folgende Werte haben:

$$\alpha = 1 + q^2, \qquad \beta = -2pq, \qquad \gamma = 1 + p^2,$$
$$\alpha' = t \quad , \qquad \beta' = -2s \quad , \qquad \gamma' = r.$$

Für die Unabhängigkeit der vier Invarianten ist das Nichtverschwinden der Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha p_{22}, & \beta p_{22} - \alpha p_{21}, & \gamma p_{22} - \beta p_{21}, & -\gamma p_{21} \\ -\alpha p_{12}, & -\beta p_{12} + \alpha p_{11}, & -\gamma p_{12} + \beta p_{11}, & \gamma p_{11} \\ \alpha' p_{22}, & \beta' p_{22} - \alpha' p_{21}, & \gamma' p_{22} - \beta' p_{21}, & -\gamma' p_{21} \\ -\alpha' p_{12}, & -\beta' p_{12} + \alpha' p_{11}, & -\gamma' p_{12} + \beta' p_{11}, & \gamma' p_{11} \end{vmatrix}$$

entscheidend. Sie hat den Wert

$$(p_{11} p_{22} - p_{21} p_{12})^2 ((\alpha\gamma' - \gamma\alpha')^2 - (\alpha\beta' - \beta\alpha')(\beta\gamma' - \gamma\beta'))$$
$$\equiv (p^2 + q^2 + 1)^4 (H^2 - 4K).$$

Hiermit ist für $m = 3$ bewiesen, daß die Anzahl unabhängiger Fundamentalinvarianten gleich $m + 1$ ist, und für eine beliebige Ordnung unterscheidet sich dann das Beweisverfahren in nichts von dem am Schlusse des vorigen Paragraphen. Zugleich liefert dieses Verfahren die Möglichkeit, für jede Ordnung ein vollständiges System von Fundamentalinvarianten, nämlich ein System von unabhängigen Größen dieser Art, mittels der Θ-Operationen durch independente Ausdrücke darzustellen.

§ 173.

Darstellung von Fundamentalinvarianten durch das Christoffelsche Verfahren.

Ein vollständiges System von Fundamental-Invarianten oder Kovarianten kann auf unendlichviele Weisen durch ein äquivalentes ersetzt werden. So können z. B. die vier Fundamentalinvarianten dritter Ordnung

$$\Theta_1 n_1, \quad \Theta_2 n_1, \quad \Theta_1 n_2, \quad \Theta_2 n_2$$

die vier im vorigen Paragraphen behandelten

$$\Theta_1 H, \quad \Theta_2 H, \quad \Theta_1 K, \quad \Theta_2 K$$

vertreten. Ferner darf man u. a. zu jeder Fundamentalinvariante eine willkürliche Funktion von Invarianten niedrigerer Ordnungen hinzu-

fügen. Ein Übergang von einem bestimmten System zu einem anderen wird sich sicher dann empfehlen, wenn das gegebene in irgendeiner Beziehung unsymmetrisch ist. So verhält es sich z. B. mit den Kovarianten, von denen am Schlusse des § 171 die Rede gewesen ist, und den entsprechend gebildeten Invarianten. Bei ihrer Herstellung werden die Operationen Θ_1 und Θ_2 nicht in gleicher Weise angewendet.

Bedenkt man nun, welche wichtige Rolle die Christoffelsche Kovarianz in verschiedenen Untersuchungen gespielt hat, so wird man erwarten dürfen, ein befriedigendes System von Invarianten durch Hinzuziehung dieser Kovarianz, und zwar für eine beliebige Ordnung, zu erzielen. Zwei Wege stehen dabei offen, die übrigens sachlich auf dasselbe hinauslaufen: Entweder die Einführung der zu A, B kovarianten linearen Formen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ in die fertigen Ausdrücke von $\mathfrak{B}_m$ oder B_m, oder schon der Ersatz des im § 158 allgemein beschriebenen Christoffelschen Verfahrens durch einen invarianten Prozeß.

Veranschaulicht man sich die erste Methode an der Grundform B selbst, bei der von dem Christoffelschen Verfahren noch nicht die Rede ist, so erhält man natürlich nichts weiter als

$$\mathsf{B} \equiv b_{11}du^2 + 2b_{12}du\,dv + b_{22}dv^2 = n_1\mathfrak{P}_1^2 + n_2\mathfrak{P}_2^2.$$

Diese Gleichung läßt die Invarianten n_1 und n_2 hervortreten. Wollte man

$$\sum_{i,k} b_{ik}du_i du_k = \sum_{\alpha,\beta} \mathfrak{b}_{\alpha\beta}\mathfrak{P}_\alpha\mathfrak{P}_\beta$$

schreiben, so würde man

(1) $$b_{ik} = \sum_{\alpha,\beta} p_{\alpha i}p_{\beta k}\mathfrak{b}_{\alpha\beta}$$

finden, oder umgekehrt und für den vorliegenden Zweck wichtiger:

(2) $$\mathfrak{b}_{\alpha\beta} = \sum_{i,k} \pi_{\alpha i}\pi_{\beta k}b_{ik}.$$

Hierbei ist die in der Theorie des Formenpaares ($\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$) beständig benutzte Bezeichnung (S. 176) auf ($\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$) übertragen. Dasselbe Resultat ergibt sich aus

$$\mathfrak{B} \equiv \sum_{i,k} b_{ik}du_i\delta u_k = \sum_{\alpha,\beta} \mathfrak{b}_{\alpha\beta}\mathfrak{P}_\alpha\bar{\mathfrak{P}}_\beta,$$

wo $\bar{\mathfrak{P}}_\beta$ ebenso aus δu und δv gebildet ist wie $\mathfrak{P}_\beta$ aus du und dv. Die Werte

(3) $$\mathfrak{b}_{11} = n_1, \quad \mathfrak{b}_{12} = 0, \quad \mathfrak{b}_{22} = n_2$$

würden nun z. B. durch Übergang zu den Hauptparametern folgen, der wegen des invarianten Charakters von (2) ohne weiteres gestattet ist.

Von Bedeutung ist hier die Verallgemeinerungsfähigkeit der Gleichungen (2). Drückt man $\mathfrak{B}_3$ auf doppelte Weise aus, so erhält man

(4) $$\mathfrak{b}_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{i,k,l} \pi_{\alpha i}\pi_{\beta k}\pi_{\gamma l} b_{ikl};$$

und so fort.

Welche Gestalt nehmen nun zunächst die Formeln (4) an, wenn in den Koeffizienten von $\mathfrak{B}_3$,

$$b_{ikl} \equiv \frac{\partial b_{ik}}{\partial u_l} - \sum_\nu \left(b_{i\nu} \begin{Bmatrix} k\,l \\ \nu \end{Bmatrix} + b_{\nu k} \begin{Bmatrix} i\,l \\ \nu \end{Bmatrix} \right)$$

(S. 493 (3)), die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung durch die Fundamentalinvarianten, die Differentiationen durch die Theta-Operationen ersetzt werden?

Man kann die Frage allgemeiner fassen, und hat dabei den Vorteil, sich an frühere Formelsysteme anlehnen zu können. In der Theorie der Fundamentalinvarianten sind die Θ-Operationen überall die Differentiationen längs den Krümmungslinien. Ersetzt man Θ_1 und Θ_2 durch Θ und Θ', also durch die Differentiationen längs einer beliebigen Kurve und ihrer orthogonalen Trajektorie, so erhält man Invarianten im Gebiete des Formensystems (A, B, $\mathfrak{M}_0$), d. h. Fundamentalkovarianten. Wird nun die Transformation von $\mathfrak{B}_3$ in der Weise vollzogen, daß statt dreier Paare von Differentialen die drei Formenpaare $\mathfrak{M}_\alpha$, $\overline{\mathfrak{M}}_\alpha$, $\overline{\overline{\mathfrak{M}}}_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ eingeführt werden, so ziehen die Resultate der Transformationen diejenigen nach sich, um die es sich hier handelt. Man hat nur

$$\mathfrak{M}_1 \quad \mathfrak{M}_2 \quad m_{ik} \quad \mu_{ik} \quad \Theta\varphi \quad \Theta'\varphi$$

durch

$$\mathfrak{P}_1 \quad \mathfrak{P}_2 \quad p_{ik} \quad \pi_{ik} \quad \Theta_1\varphi \quad \Theta_2\varphi$$

zu ersetzen.

Noch allgemeiner: Es sei

$$\mathfrak{C}_2 \equiv \sum_{i,k} c_{ik}\, du_i\, \delta u_k$$

eine bilineare Differentialform, deren Koeffizienten nur der Bedingung

$$c_{21} = c_{12}$$

unterworfen sind. Sie brauchen also nicht etwa mit denen der quadratischen Kovariante von A und B übereinzustimmen; vielmehr soll nachher $c_{ik} = b_{ik}$ genommen werden. Zu $\mathfrak{C}_2$ und A gehört die Christoffelsche Kovariante $\mathfrak{C}_3$, deren Koeffizienten durch die Formeln

(5) $$c_{ikl} = \frac{\partial c_{ik}}{\partial u_l} - \sum_\nu \left(c_{i\nu} \begin{Bmatrix} k\,l \\ \nu \end{Bmatrix} + c_{\nu k} \begin{Bmatrix} i\,l \\ \nu \end{Bmatrix} \right)$$

erklärt sind. Läßt man die Differentiale, wie angegeben, durch Paare linearer Formen vertreten werden, die in bekannter Weise mit einer linearen Grundform $\mathfrak{M}_0$ zusammenhängen, so möge

$$(6)\qquad \mathfrak{C}_2 = \sum_{\alpha,\beta} \mathfrak{c}_{\alpha\beta}\mathfrak{M}_\alpha\overline{\mathfrak{M}}_\beta$$

$$(7)\qquad \mathfrak{C}_3 = \sum_{\alpha,\beta,\gamma} \mathfrak{c}_{\alpha\beta\gamma}\mathfrak{M}_\alpha\overline{\mathfrak{M}}_\beta\overline{\mathfrak{M}}_\gamma$$

sein; hierin ist

$$(8)\qquad \mathfrak{c}_{\alpha\beta} = \sum_{i,k} \mu_{\alpha i}\mu_{\beta k}c_{ik}$$

$$(9)\qquad \mathfrak{c}_{\alpha\beta\gamma} = \sum_{i,k,l} \mu_{\alpha i}\mu_{\beta k}\mu_{\gamma l}c_{ikl}.$$

Um in die Formeln (9) die im Gebiete des Systems $(A, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{M}_0)$ invarianten Größen $\mathfrak{c}_{\alpha\beta}$ einzuführen, ersetze man die Gleichungen (8) durch

$$(10)\qquad c_{ik} = \sum_{p,q} m_{pi}m_{qk}\mathfrak{c}_{pq}$$

und vollziehe die durch (5) geforderten Differentiationen. Die einfache Rechnung ist in ähnlicher Weise wiederholt angestellt worden. Es erscheinen von selbst die geometrischen Ableitungen der Größen $\mathfrak{c}_{\alpha\beta}$. Werden sie, wie auf S. 177, durch ϑ_1 und ϑ_2 gekennzeichnet, so findet sich

$$(11)\qquad \mathfrak{c}_{\alpha\beta\gamma} = \vartheta_\gamma\mathfrak{c}_{\alpha\beta} + \sum_{q,k,l}\mathfrak{c}_{\alpha q}\mu_{\beta k}\mu_{\gamma l}\left(\frac{\partial m_{qk}}{\partial u_l} - \sum_\nu m_{q\nu}\begin{Bmatrix} k\ l \\ \nu \end{Bmatrix}\right)$$
$$+ \sum_{p,i,l}\mathfrak{c}_{p\beta}\mu_{\alpha i}\mu_{\gamma l}\left(\frac{\partial m_{pi}}{\partial u_l} - \sum_\nu m_{p\nu}\begin{Bmatrix} i\ l \\ \nu \end{Bmatrix}\right),$$

oder unter Verwendung der Definitionsgleichungen

$$(12)\qquad \frac{\partial m_{\lambda i}}{\partial u_k} - \sum_\nu m_{\lambda\nu}\begin{Bmatrix} i\ k \\ \nu \end{Bmatrix} = \overline{m}_{\lambda,ik}$$

(vgl. S. 187):

$$(13)\qquad \mathfrak{c}_{\alpha\beta\gamma} = \vartheta_\gamma\mathfrak{c}_{\alpha\beta} + \sum_\lambda\Big(\mathfrak{c}_{\alpha\lambda}\sum_{i,k}\mu_{\beta i}\mu_{\gamma k}\overline{m}_{\lambda,ik} + \mathfrak{c}_{\lambda\beta}\sum_{i,k}\mu_{\alpha i}\mu_{\gamma k}\overline{m}_{\lambda,ik}\Big).$$

Setzt man noch

$$(14)\qquad \sum_{i,k}\mu_{\alpha i}\mu_{\beta k}\overline{m}_{\lambda,ik} = \mathfrak{m}_{\lambda,\alpha\beta},$$

so erhält man

$$(15)\qquad \mathfrak{c}_{\alpha\beta\gamma} = \vartheta_\gamma\mathfrak{c}_{\alpha\beta} + \sum_\lambda(\mathfrak{c}_{\alpha\lambda}\mathfrak{m}_{\lambda,\beta\gamma} + \mathfrak{c}_{\lambda\beta}\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha\gamma}).$$

Von den acht Größen $\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha\beta}$ sind zwei nach dem Früheren bekannt, nämlich

$$(16)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{m}_{1,21} &= g \equiv \mathfrak{g}_1 \\ \mathfrak{m}_{1,22} &= -g' \equiv -\mathfrak{g}_2 \end{aligned}$$

(S. 187 (4), 189 (11)), wenn der Gleichförmigkeit wegen auch die geodätischen Krümmungen einer beliebigen Kurve und ihrer orthogonalen Trajektorie mit Indizes belegt werden. Durch Vertauschung von 1 mit 2 wird

$$\mathfrak{m}_{2,12} = \mathfrak{g}_2 \quad (17)$$
$$\mathfrak{m}_{2,11} = -\mathfrak{g}_1 .$$

Die vier übrigen Größen sind Null, wie man für $\mathfrak{m}_{1,11}$ und $\mathfrak{m}_{1,12}$ durch Einsetzen des Wertes von $\frac{\partial m_{1i}}{\partial u_p}$ aus S. 185 (20) findet und für $\mathfrak{m}_{2,22}$ und $\mathfrak{m}_{2,21}$ durch Vertauschung schließt. Wird endlich berücksichtigt, daß infolge von $c_{ki} = c_{ik}$ auch $\mathfrak{c}_{\beta\alpha} = \mathfrak{c}_{\alpha\beta}$ ist, so ergibt sich folgendes Formelsystem:

$$(18) \quad \begin{aligned}
\mathfrak{c}_{111} &= \vartheta_1 \mathfrak{c}_{11} - 2\mathfrak{g}_1 \mathfrak{c}_{12} \\
\mathfrak{c}_{112} &= \vartheta_2 \mathfrak{c}_{11} + 2\mathfrak{g}_2 \mathfrak{c}_{12} \\
\mathfrak{c}_{121} &= \vartheta_1 \mathfrak{c}_{12} + \mathfrak{g}_1(\mathfrak{c}_{11} - \mathfrak{c}_{22}) \\
\mathfrak{c}_{122} &= \vartheta_2 \mathfrak{c}_{12} - \mathfrak{g}_2(\mathfrak{c}_{11} - \mathfrak{c}_{22}) \\
\mathfrak{c}_{211} &= \vartheta_1 \mathfrak{c}_{12} + \mathfrak{g}_1(\mathfrak{c}_{11} - \mathfrak{c}_{22}) \\
\mathfrak{c}_{212} &= \vartheta_2 \mathfrak{c}_{12} - \mathfrak{g}_2(\mathfrak{c}_{11} - \mathfrak{c}_{22}) \\
\mathfrak{c}_{221} &= \vartheta_1 \mathfrak{c}_{22} + 2\mathfrak{g}_1 \mathfrak{c}_{12} \\
\mathfrak{c}_{222} &= \vartheta_2 \mathfrak{c}_{22} - 2\mathfrak{g}_2 \mathfrak{c}_{12} .
\end{aligned}$$

Die beiden hierin enthaltenen Gleichungen

$$(19) \quad \mathfrak{c}_{\alpha\beta\gamma} = \mathfrak{c}_{\beta\alpha\gamma},$$

die wieder in der Annahme $c_{ik} = c_{ki}$ ihren Grund haben, hätten schon aus (9) abgelesen werden können.

Setzt man jetzt

$$\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{B},$$

also

$$c_{ik} = b_{ik}, \qquad \mathfrak{c}_{\alpha\beta} = \mathfrak{b}_{\alpha\beta}, \qquad \mathfrak{c}_{\alpha\beta\gamma} = \mathfrak{b}_{\alpha\beta\gamma},$$

wo nach oft benutzten Formeln

$$(20) \quad \mathfrak{c}_{11} = n, \qquad \mathfrak{c}_{12} = t, \qquad \mathfrak{c}_{22} = n'$$

ist, so nehmen die Gleichungen (18) die Gestalt an:

$$(21) \quad \begin{aligned}
\mathfrak{b}_{111} &= \Theta n - 2gt \\
\mathfrak{b}_{112} &= \Theta' n + 2g't \\
\mathfrak{b}_{121} = \mathfrak{b}_{211} &= \Theta t + g(n - n') \\
\mathfrak{b}_{212} = \mathfrak{b}_{122} &= \Theta' t - g'(n - n') \\
\mathfrak{b}_{221} &= \Theta n' + 2gt \\
\mathfrak{b}_{222} &= \Theta' n' - 2g't .
\end{aligned}$$

Diese Resultate sind von keiner besonderen Bedeutung, denn das erste und das letzte Formelpaar findet sich schon auf S. 511, und die beiden anderen liefern in Folge der Fundamentalgleichungen (B) (S. 205)

$$(22)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{b}_{112} - \mathfrak{b}_{121} &\equiv \mathfrak{b}_{211} \\ \mathfrak{b}_{221} = \mathfrak{b}_{212} &\equiv \mathfrak{b}_{122}, \end{aligned}$$

sodaß

$$(23)\qquad \mathsf{B}_3 = \mathfrak{b}_{111}\mathfrak{M}_1^3 + 3\mathfrak{b}_{112}\mathfrak{M}_1^2\mathfrak{M}_2 + 3\mathfrak{b}_{221}\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2^2 + \mathfrak{b}_{222}\mathfrak{M}_2^3$$

wird. Die Anwendung auf $\mathfrak{B}$ dient nur dazu, die früheren Ergebnisse anders zu gruppieren und in einer bestimmten Richtung zu ergänzen. Auch ist es nützlich, auf die Verbindungen zu achten, in denen die Fundamentalkovarianten auftreten, wenn das Christoffelsche Verfahren die Grundlage der Untersuchung bildet. Dagegen ist nicht etwa von der planmäßigen Darstellung eines vollständigen Systems von Kovarianten die Redé. Nicht $\mathfrak{M}_0$, sondern B steht hier im Vordergrunde.

Wichtiger ist es, durch die auf S. 560 angegebene Spezialisierung zu Fundamentalinvarianten überzugehen. Es wird

$$n = n_1, \qquad t = 0, \qquad n' = n_2,$$

$$\mathfrak{g}_1 = g_1, \qquad \mathfrak{g}_2 = g_2.$$

Für die kubische Kovariante von A und B ergibt sich der Ausdruck

$$(24)\quad \mathsf{B}_3 = \Theta_1 n_1 \cdot \mathfrak{P}_1^3 + 3\Theta_2 n_1 \cdot \mathfrak{P}_1^2\mathfrak{P}_2 + 3\Theta_1 n_2 \cdot \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2^2 + \Theta_2 n_2 \cdot \mathfrak{P}_2^3.$$

Man kommt also auch durch das Christoffelsche Verfahren auf die eingangs dieses Paragraphen erwähnten Fundamentalinvarianten $\Theta_1 n_1$, $\Theta_2 n_1$, $\Theta_1 n_2$, $\Theta_2 n_2$.

§ 174.

Fundamentalinvarianten vierter Ordnung.

Es sei jetzt

$$\mathfrak{B}_m \equiv \sum_{i_1,\ldots i_m} (i_1 i_2 \ldots i_m)\, d_1 u_{i_1} d_2 u_{i_2} \ldots d_m u_{i_m}$$

(S. 514) die durch $(m-2)$-malige Anwendung des Christoffelschen Verfahrens entstandene m-fach lineare Kovariante von A und B. Ferner gelte die Bezeichnung

$$\sum_\nu m_{\alpha\nu} d_\mu u_\nu = \mathfrak{M}_\alpha^{(\mu)}, \qquad (\mu = 1, \ldots m)$$

sodaß für den vorher erledigten Fall $m = 3$

$$\mathfrak{M}_\alpha^{(1)} = \mathfrak{M}_\alpha, \qquad \mathfrak{M}_\alpha^{(2)} = \bar{\mathfrak{M}}_\alpha, \qquad \mathfrak{M}_\alpha^{(3)} = \bar{\bar{\mathfrak{M}}}_\alpha$$

sein würde. Bei Einführung dieser linearen Formen an Stelle der Differentiale werde

$$(1) \qquad \mathfrak{B}_m = \sum_{\alpha_1,\ldots\alpha_m} [\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]\,\mathfrak{M}^{(1)}_{\alpha_1}\mathfrak{M}^{(2)}_{\alpha_2}\ldots\mathfrak{M}^{(m)}_{\alpha_m}.$$

Die im Gebiete des Formensystems (A, B, $\mathfrak{M}_0$) invarianten Koeffizienten haben die Werte

$$(2) \qquad [\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m] = \sum_{i_1,\ldots i_m} \mu_{\alpha_1 i_1}\mu_{\alpha_2 i_2}\ldots\mu_{\alpha_m i_m}(i_1 i_2\ldots i_m),$$

wobei

$$(3) \quad (i_1\ldots i_m) = \frac{\partial(i_1\ldots i_{m-1})}{\partial u_{i_m}} - \sum_\nu\Big(\left\{{i_1\, i_m \atop \nu}\right\}(\nu i_2\ldots i_{m-1})$$
$$+ \left\{{i_2\, i_m \atop \nu}\right\}(i_1\nu\ldots i_{m-1}) + \ldots + \left\{{i_{m-1}\, i_m \atop \nu}\right\}(i_1\ldots i_{m-2}\nu)\Big)$$

ist. Für $m-1$ statt m entsprechen den Gleichungen (2) die folgenden:

$$[\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}] = \sum_{i_1,\ldots i_{m-1}} \mu_{\alpha_1 i_1}\ldots\mu_{\alpha_{m-1} i_{m-1}}(i_1\ldots i_{m-1}),$$

die mit

$$(4) \qquad (i_1\ldots i_{m-1}) = \sum_{p_1\ldots p_{m-1}} m_{p_1 i_1}\ldots m_{p_{m-1} i_{m-1}}[p_1\ldots p_{m-1}]$$

gleichbedeutend sind. Die ganze Zahl m kann mit dem ebenso bezeichneten Koeffizienten, der hier nur vorübergehend gebraucht wird und außerdem überall als Träger von Indizes erscheint, nicht verwechselt werden.

Setzt man nun, auch hier auf dem direktesten Wege vorgehend, die Werte, die $(i_1 i_2\ldots i_{m-1})$, $(\nu i_2\ldots i_{m-1})$, ... nach (4) annehmen, in (3), und dann (3) in (2) ein, so erhält man

$$[\alpha_1\ldots\alpha_m] - \vartheta_{\alpha_m}[\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}]$$
$$= \sum_{i_1, i_m, p_1}[p_1\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}]\mu_{\alpha_1 i_1}\mu_{\alpha_m i_m}\Big(\frac{\partial m_{p_1 i_1}}{\partial u_{i_m}} - \sum_\nu m_{p_1\nu}\left\{{i_1\, i_m \atop \nu}\right\}\Big) + \cdots$$
$$= \sum_{i,k,\lambda}[\lambda\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}]\mu_{\alpha_1 i}\mu_{\alpha_m k}\overline{m}_{\lambda, ik} + \ldots,$$

d. h.

$$(5) \quad [\alpha_1\ldots\alpha_m] = \vartheta_{\alpha_m}[\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}]$$
$$+ \sum_\lambda([\lambda\alpha_2\ldots\alpha_{m-1}]\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha_1\alpha_m} + [\alpha_1\lambda\ldots\alpha_{m-1}]\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha_2\alpha_m}$$
$$+ \ldots + [\alpha_1\ldots\alpha_{m-2}\lambda]\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha_{m-1}\alpha_m}).$$

Beim Übergange von $\mathfrak{B}_m$ zu der entsprechenden binären Form B_m

fügen sich die Größen $[\alpha_1 \ldots \alpha_m]$ gruppenweise zu den Koeffizienten dieser Form zusammen. Der Übergang wird dadurch bewirkt, daß man die linearen Formen $\mathfrak{M}_\alpha^{(\mu)}$ für alle m Werte von μ einander gleich, $= \mathfrak{M}_\alpha$ setzt.

Es sei jetzt $\mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{P}_\alpha$. Von den $m+1$ Fundamentalinvarianten, die dann als Koeffizienten von B_m erscheinen, läßt sich ohne Schwierigkeit beweisen, daß die in einen und denselben Koeffizienten eingehenden Größen $[\alpha_1 \ldots \alpha_m]$ sämtlich untereinander, dagegen keiner in den übrigen Koeffizienten vorkommenden Größe äquivalent sind. Die $m+1$ Koeffizienten, an Zahl den Fundamentalgrößen gleich, bilden also ein vollständiges System von Fundamentalinvarianten m. Ordnung. In einem derartigen System ist offenbar keine der beiden Theta-Operationen vor der anderen bevorzugt.

Worauf es ankommt, möge zunächst für $m = 4$ auseinandergesetzt werden. Die Bezeichnung $[\alpha_1 \ldots \alpha_m]$ werde auch für $\mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{P}_\alpha$ beibehalten und dann auch schon für $m < 4$ benutzt. Die Formel (15) des vorigen Paragraphen, auf $\mathfrak{C}_m = \mathfrak{B}_m$ übertragen, lautet in diesen Zeichen

(6) $$[\alpha_1\alpha_2\alpha_3] = \Theta_{\alpha_3}[\alpha_1\alpha_2] + \sum_\lambda ([\lambda\alpha_2]\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha_1\alpha_3} + [\alpha_1\lambda]\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha_2\alpha_3}),$$

und die Formel (19):

(7) $$[\alpha_1\alpha_2\alpha_3] = [\alpha_2\alpha_1\alpha_3].$$

Für $m = 4$ wird

(8) $$[\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4] = \Theta_{\alpha_4}[\alpha_1\alpha_2\alpha_3] + \sum_\lambda ([\lambda\alpha_2\alpha_3]\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha_1\alpha_4} + [\alpha_1\lambda\alpha_3]\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha_2\alpha_4} + [\alpha_1\alpha_2\lambda]\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha_3\alpha_4}).$$

Vertauscht man α_1 mit α_2 und wendet rechts überall die Relation (7) an, so sieht man, daß der Ausdruck ungeändert bleibt;

(9) $$[\alpha_2\alpha_1\alpha_3\alpha_4] = [\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4].$$

Während diese Beziehungen eine Folge von $b_{ki} = b_{ik}$ sind, so lehren die Fundamentalgleichungen (B), daß die Indizes α_i, die Argumente der Größen $[\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4]$, noch auf andere Art vertauscht werden dürfen. Aus

(10) $$[\alpha_1\alpha_2\alpha_3] = [\alpha_1\alpha_3\alpha_2]$$

(S. 563 (22)) folgt nämlich wie oben

(11) $$[\alpha_1\alpha_3\alpha_2\alpha_4] = [\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4].$$

Wenn hiernach alle Permutationen der ersten drei Indizes zulässig sind, so reduzieren sich die ursprünglich sechzehn Invarianten auf acht, nämlich:

$$(12)\quad \begin{aligned}
[1\,1\,1\,\alpha] &= \Theta_\alpha[1\,1\,1] + 3[1\,1\,2]\mathfrak{m}_{2,1\alpha}\\
[1\,1\,2\,\alpha] &= \Theta_\alpha[1\,1\,2] + [1\,1\,1]\mathfrak{m}_{1,2\alpha} + 2[2\,2\,1]\mathfrak{m}_{2,1\alpha}\\
[2\,2\,1\,\alpha] &= \Theta_\alpha[2\,2\,1] + [2\,2\,2]\mathfrak{m}_{2,1\alpha} + 2[1\,1\,2]\mathfrak{m}_{1,2\alpha}\\
[2\,2\,2\,\alpha] &= \Theta_\alpha[2\,2\,2] + 3[2\,2\,1]\mathfrak{m}_{1,2\alpha}.
\end{aligned}$$

Eine weitere Verringerung tritt wegen

$$(13)\quad [1\,1\,1] = \Theta_1 n_1,\quad [1\,1\,2] = \Theta_2 n_1,\quad [2\,2\,1] = \Theta_1 n_2,\quad [2\,2\,2] = \Theta_2 n_2$$

auf Grund der Vertauschungsformel ein. Unter Benutzung der Bezeichnung $\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha\beta}$ lautet sie

$$(14)\qquad \Theta_2\Theta_1\varphi - \Theta_1\Theta_2\varphi = \mathfrak{m}_{1,21}\Theta_1\varphi - \mathfrak{m}_{2,12}\Theta_2\varphi$$

und liefert z. B.

$$[1\,1\,1\,2]-[1\,1\,2\,1] = 2([1\,1\,2]\mathfrak{m}_{2,12} - [2\,2\,1]\mathfrak{m}_{2,11}) = 2(g_2\Theta_2 n_1 + g_1\Theta_1 n_2).$$

Diese Größe ist aber in Folge der Fundamentalgleichungen gleich Null, also

$$[1\,1\,1\,2] = [1\,1\,2\,1]$$

und ebenso

$$[2\,2\,2\,1] = [2\,2\,1\,2]$$

oder zusammengefaßt

$$(15)\qquad [\alpha_1\alpha_1\alpha_1\alpha_2] = [\alpha_1\alpha_1\alpha_2\alpha_1].$$

Über einen etwaigen Zusammenhang zwischen $[\alpha_1\alpha_1\alpha_2\alpha_2]$ und $[\alpha_2\alpha_2\alpha_1\alpha_1]$, also zwischen $[1\,1\,2\,2]$ und $[2\,2\,1\,1]$, wird hierdurch noch nichts ausgesagt. Sicher kann er durch die Vertauschungsformel, auf n_1 oder n_2 angewendet, nicht hergestellt werden, denn $[1\,1\,2\,2]$ enthält $\Theta_2\Theta_2 n_1$, $[2\,2\,1\,1]$ dagegen $\Theta_1\Theta_1 n_2$. Aber diese beiden geometrischen Ableitungen sind äquivalent wegen der Fundamentalgleichung

$$(\mathrm{A})\qquad \Theta_2 g_1 + \Theta_1 g_2 - g_1^2 - g_2^2 = n_1 n_2.$$

Denn setzt man g_1 und g_2 aus

$$(\mathrm{B})\qquad g_1 = \frac{\Theta_2 n_1}{n_1 - n_2},\qquad g_2 = \frac{\Theta_1 n_2}{n_2 - n_1}$$

in (A) ein, so erhält man

$$(16)\qquad (n_1 - n_2)(\Theta_2\Theta_2 n_1 - \Theta_1\Theta_1 n_2)$$
$$= n_1 n_2 (n_1 - n_2)^2 - (\Theta_1 n_1 \cdot \Theta_1 n_2 + \Theta_2 n_1 \cdot \Theta_2 n_2) + 2(\Theta_2 n_1)^2 + 2(\Theta_1 n_2)^2.$$

Es ist also auch

$$(17)\qquad [\alpha_1\alpha_1\alpha_2\alpha_2] \sim [\alpha_2\alpha_2\alpha_1\alpha_1].$$

Durch diese Beziehung und die beiden Gleichungen (15) wird die Anzahl der Größen $[\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4]$ auf fünf zurückgeführt. Und daß sich unter diesen keine äquivalenten mehr finden können, geht aus § 172 hervor.

Im einzelnen ergeben sich aus dem Formelsystem (12) die nachstehenden Ausdrücke. Die einander gleichen Invarianten sind dabei nur je einmal aufgeschrieben, bloß äquivalente dagegen beibehalten. Es sind ferner für die Größen $\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha\beta}$ ihre Werte aus S. 561 (16), S. 562 (17) eingeführt, aber g_1 und g_2 der Gleichförmigkeit wegen aus (B) durch geometrische Ableitungen von n_1 und n_2 ersetzt worden.

$$
(18)\quad
\begin{aligned}
[1111] &= \Theta_1\Theta_1 n_1 - \frac{3}{n_1 - n_2}(\Theta_2 n_1)^2 \\
[1112] &= \Theta_2\Theta_1 n_1 - \frac{3}{n_1 - n_2}\Theta_2 n_1 \cdot \Theta_1 n_2 \\
[1122] &= \Theta_2\Theta_2 n_1 + \frac{1}{n_1 - n_2}\Theta_1 n_2(\Theta_1 n_1 - 2\Theta_1 n_2) \\
[2211] &= \Theta_1\Theta_1 n_2 + \frac{1}{n_2 - n_1}\Theta_2 n_1(\Theta_2 n_2 - 2\Theta_2 n_1) \\
[2221] &= \Theta_1\Theta_2 n_2 - \frac{3}{n_2 - n_1}\Theta_1 n_2 \cdot \Theta_2 n_1 \\
[2222] &= \Theta_2\Theta_2 n_2 - \frac{3}{n_2 - n_1}(\Theta_1 n_2)^2 .
\end{aligned}
$$

Die fünf Fundamentalinvarianten, die in B_4 der Reihe nach als Koeffizienten von

$$\mathfrak{P}_1^4, \quad \mathfrak{P}_1^3\mathfrak{P}_2, \quad \mathfrak{P}_1^2\mathfrak{P}_2^2, \quad \mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2^3, \quad \mathfrak{P}_2^4$$

auftreten, haben die Werte

$$[1111], \quad 4[1112], \quad 3([1122]+[2211]), \quad 4[2221], \quad [2222].$$

Wo in einzelnen Fundamentalinvarianten mehrere geometrische Ableitungen vorkommen, können diese immer, auch für $m > 4$, vermöge der Äquivalenzen auf eine zurückgeführt werden. Aber offenbar würde dies schon hier, in der an dritter Stelle stehenden Invariante, aus Symmetriegründen nicht zweckmäßig sein.

Handelt es sich nur um ein vollständiges System von Fundamentalinvarianten vierter Ordnung überhaupt, nicht um seinen genauen Zusammenhang mit B_4, so können nicht bloß die Zahlfaktoren, sondern nach der auf S. 558 gemachten Bemerkung auch die Invarianten niedrigerer Ordnungen weggelassen werden.

§ 175.

Fundamentalinvarianten beliebiger Ordnung.

Die Vertauschbarkeit der beiden ersten Argumente von $[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]$, auf S. 565 für $m = 4$ bewiesen, gilt auch für beliebiges m. Es ist

$$[\alpha_2\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_m] = \Theta_{\alpha_m}[\alpha_2\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_{m-1}]$$
$$+\sum_\lambda([\lambda\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_{m-1}]\,\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha_2\alpha_m}+[\alpha_2\lambda\alpha_3\ldots\alpha_{m-1}]\,\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha_1\alpha_m}$$
$$+\cdots+[\alpha_2\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_{m-2}\lambda]\,\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha_{m-1}\alpha_m}).$$

Wird nun die Vertauschbarkeit für die $m-1$. Ordnung als bewiesen angenommen, so stimmt das erste Glied rechts mit dem ersten Gliede des Ausdrucks von $[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]$ überein, und dasselbe gilt von den Gliedern unter dem Summenzeichen, vom dritten an gerechnet. Die beiden ersten können

$$[\alpha_1\lambda\alpha_3\ldots\alpha_{m-1}]\,\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha_2\alpha_m} \quad \text{und} \quad [\lambda\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{m-1}]\,\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha_1\alpha_m}$$

geschrieben werden und erweisen sich dann dem zweiten und ersten in $[\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m]$ gleich. In derselben Weise wie die Gleichung

(1) $$[\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_m] = [\alpha_2\alpha_1\alpha_3\ldots\alpha_m]$$

wird auch die Eigenschaft

(2) $$[\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_m] = [\alpha_1\alpha_3\alpha_2\ldots\alpha_m]$$

induktiv bewiesen. Die Vertauschungsformel dagegen führt für beliebiges m im allgemeinen nicht zu Gleichungen, sondern nur zu Äquivalenzen. Aber dies reicht für die weiteren Schlüsse vollständig aus, wie eine einfache Überlegung zeigt.

Ein Ausdruck $[\alpha_1\ldots\alpha_m]$ — dessen Argumente nur die Werte 1 und 2 haben können — ist aus einer der beiden Invarianten zweiter Ordnung n_1, n_2 durch l-malige Anwendung der Operation Θ_1 und $(m-2-l)$-malige Anwendung von Θ_2 entstanden (so für $m=3$), oder es treten wenigstens zu dem Ergebnis dieser Rechnungsoperationen nur noch Invarianten niedrigerer Ordnungen hinzu (wie schon für $m=4$). Nun ist nach dem eben wieder herangezogenen Bildungsgesetz das Anfangsglied $\Theta_{\alpha_m}[\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}]$ das einzige in $[\alpha_1\ldots\alpha_m]$, das beim Aufsteigen von $m-1$ zu m eine höhere geometrische Ableitung von n_1 oder n_2 einführt. Von sämtlichen Größen, die aus $[\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}]$ durch irgendwelche Umstellung der Argumente entstehen, gelte als bewiesen, daß sie einander äquivalent sind, d. h. eine und dieselbe Ableitung $m-3$. Ordnung von n_1 oder n_2 enthalten. Die Frage, ob dann Entsprechendes auch für $[\alpha_1\ldots\alpha_m]$ behauptet werden kann, läuft darauf hinaus, ob auch α_m in die Vertauschungen einbezogen werden darf. Und es ist dazu nur zu beweisen, daß α_m mit α_{m-1} vertauschbar ist; jetzt immer im Sinne der Äquivalenz, nicht der Gleichheit der beiden Ausdrücke $[\alpha_1\ldots\alpha_{m-1}\alpha_m]$ und $[\alpha_1\ldots\alpha_m\alpha_{m-1}]$. Die Größen, auf die es darin ankommt, sind nun $\Theta_{\alpha_m}[\alpha_1\ldots\alpha_{m-2}\alpha_{m-1}]$ und $\Theta_{\alpha_{m-1}}[\alpha_1\ldots\alpha_{m-2}\alpha_m]$,

und in diesen Ausdrücken wieder sind nach demselben Bildungsgesetz nur $\Theta_{\alpha_m}\Theta_{\alpha_{m-1}}[\alpha_1 \ldots \alpha_{m-2}]$ und $\Theta_{\alpha_{m-1}}\Theta_{\alpha_m}[\alpha_1 \ldots \alpha_{m-2}]$ für die höchsten Ableitungen von Bedeutung. Da die Untersuchung bloß für $\alpha_m \gtrless \alpha_{m-1}$ einen Sinn hat, so ist

$$\Theta_2\Theta_1[\alpha_1 \ldots \alpha_{m-2}] - \Theta_1\Theta_2[\alpha_1 \ldots \alpha_{m-2}]$$

zu bilden, und dies ist nach der Vertauschungsformel gleich

$$g_1\Theta_1[\alpha_1 \ldots \alpha_{m-2}] - g_2\Theta_2[\alpha_1 \ldots \alpha_{m-2}],$$

einer Größe, die nur Ableitungen bis zur $m-3$. Ordnung enthält. Hiernach sind auch für die m. Ordnung alle Invarianten, die sich nur durch die Anordnung ihrer Argumente unterscheiden, äquivalent. Wenn daher, wie man sagen kann, sämtliche Größen derselben Ordnung, die die gleiche Anzahl von Einsen und demnach auch von Zweien enthalten, einander äquivalent sind, so bleiben etwa

$$[11\ldots 11], \quad [11\ldots 12], \quad [11\ldots 22], \ldots [22\ldots 22],$$

jedenfalls $m+1$ Größen m. Ordnung übrig. Finden sich unter diesen keine äquivalenten mehr, so empfiehlt es sich dennoch nicht, gerade sie als vollständiges System von Fundamentalinvarianten zu nehmen (vgl. S. 567). Statt dessen kann man, wie bisher, z. B. auf die Koeffizienten von B_m ausgehen, diese binäre Form in $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ dargestellt:

$$\mathsf{B}_m = \sum_{\mu=0}^{m} \binom{m}{\mu} \mathfrak{b}_{m-\mu,\mu} \mathfrak{P}_1^{m-\mu} \mathfrak{P}_2^{\mu}. \tag{3}$$

Vermöge der Entstehung von B_m aus $\mathfrak{B}_m$ erscheint jeder Faktor eines Potenzproduktes $\mathfrak{P}_1^{m-\mu}\mathfrak{P}_2^{\mu}$ als Vielfaches einer der obigen $m+1$ Invarianten, vermehrt um eine rationale Funktion von Invarianten niedrigerer Ordnung.

In jedem Falle ist nur noch zu zeigen, daß zwei Größen $[\alpha_1 \ldots \alpha_m]$, die nicht dieselbe Anzahl von Einsen enthalten, nicht äquivalent sein können. Man vergleiche zunächst zwei Invarianten, in denen die beiden ersten Argumente einander gleich, $= \alpha$ sind. Das Argumentenpaar als erstes anzunehmen, ist nach dem eben Bewiesenen gestattet. Außerdem mögen noch andere Argumente, deren erstes dann wieder α_1 heißen soll, gleich α sein; $\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots$ seien gleich der von α verschiedenen Zahl des Paares $(1, 2)$. In den beiden Invarianten selbst,

$$[\alpha\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_p\beta_1 \ldots \beta_q] \quad \text{und} \quad [\alpha\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_r\beta_1 \ldots \beta_s],$$

ist

$$p + q = r + s = m - 2.$$

Der Allgemeinheit unbeschadet darf $p > r$ vorausgesetzt werden, sodaß die erste Größe $p - r \equiv g$ Zahlen α mehr enthält als die zweite, und

demnach diese $s - q \equiv g$ Zahlen β mehr als die erste. Durch die Schreibweise

$$[\alpha\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_r\alpha_1 \ldots \alpha_g\beta_1 \ldots \beta_q] \quad \text{und} \quad [\alpha\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_r\beta_1 \ldots \beta_q\beta_1 \ldots \beta_g]$$

kann dies zum Ausdruck gebracht werden. Die beiden Invarianten sind der Reihe nach mit

$$[\alpha\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_g\alpha_1 \ldots \alpha_r\beta_1 \ldots \beta_q] \quad \text{und} \quad [\alpha\alpha\beta_1 \ldots \beta_g\alpha_1 \ldots \alpha_r\beta_1 \ldots \beta_q],$$

und diese wieder mit

$$\Theta_{\beta_q} \ldots \Theta_{\beta_1}\Theta_{\alpha_r} \ldots \Theta_{\alpha_1}[\alpha\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_g] \quad \text{und} \quad [\Theta_{\beta_q} \ldots \Theta_{\beta_1}\Theta_{\alpha_r} \ldots \Theta_{\alpha_1}[\alpha\alpha\beta_1 \ldots \beta_g]$$

äquivalent. Wie sind die beiden unter den Differentiationszeichen stehenden Größen $[\alpha\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_g]$ und $[\alpha\alpha\beta_1 \ldots \beta_g]$ aus den Invarianten niedrigster Ordnung entstanden?

Die vier Formeln

$$[1\,1\,1] = \Theta_1 n_1, \quad [1\,1\,2] = \Theta_2 n_1, \quad [2\,2\,1] = \Theta_1 n_2, \quad [2\,2\,2] = \Theta_2 n_2$$

lassen sich in die eine

$$(4) \qquad [\alpha\alpha\lambda] = \Theta_\lambda n_\alpha$$

zusammenfassen. Die höchste in $[\alpha\alpha\alpha_1 \ldots \alpha_g]$ vorkommende Ableitung entsteht aus $[\alpha\alpha\alpha_1] \equiv \Theta_\alpha n_\alpha$ durch $(g-1)$-malige geometrische Differentiation Θ_α, und ebenso die höchste Ableitung in $[\alpha\alpha\beta_1 \ldots \beta_g]$ aus $[\alpha\alpha\beta_1] \equiv \Theta_\beta n_\alpha$ durch $(g-1)$-malige Anwendung von Θ_β. Schon $\Theta_\alpha n_\alpha$ und $\Theta_\beta n_\alpha$ sind nicht äquivalent, und ebensowenig $\Theta_\alpha\Theta_\alpha n_\alpha$ und $\Theta_\beta\Theta_\beta n_\alpha$, u. s. f.

Diese Schlüsse gelten auch dann, wenn eine der Zahlen 1, 2 in einer der beiden miteinander verglichenen Größen garnicht enthalten ist, setzen aber freilich voraus, daß α in beiden Ausdrücken mindestens zweimal vorkommt. Demnach sind

$$[1\,1 \ldots 1\,1], \quad [1\,1 \ldots 1\,2], \quad [1\,2 \ldots 2\,2], \quad [2\,2 \ldots 2\,2]$$

besonders zu betrachten. Und zwar hat man nur die erste und zweite Invariante sowohl mit der dritten wie mit der vierten zusammenzustellen. Nun kann nach der Entstehung der vier Größen sicher keine Äquivalenz zwischen der zweiten und dritten oder der ersten und vierten stattfinden. Daß die letztere Tatsache schon für die nächstniedrigere Ordnung gilt, hat zur Folge, daß auch die erste Invariante nicht mit der dritten, die zweite nicht mit der vierten äquivalent sein kann.

Damit sind schließlich auch für beliebiges m die $m+1$ Größen $\mathfrak{b}_{m-\mu,\mu}$, mit oder ohne Binomialkoeffizienten angesetzt, als vollständiges System von Fundamentalinvarianten nachgewiesen. Mittels der gefundenen Ergebnisse könnte man diese Größen auch leicht direkt aus den entsprechenden der vorhergehenden Ordnung herstellen.

XIII. Abschnitt.

Die Weingartenschen Gleichungen in der Theorie der Strahlensysteme.

§ 176.

Die geometrischen Differentiationen längs der Leitfläche.

In den Untersuchungen über krumme Flächen hat es sich allenthalben als nützlich, ja als notwendig erwiesen, Systeme gerader Linien in Betracht zu ziehen, die in bestimmter Weise mit der Fläche zusammenhängen. Namentlich spielten von Anfang an die Normalen der Fläche eine ausgezeichnete Rolle. Ihre Theorie war als besonderer Fall in der der Strahlensysteme enthalten, für welche einige Hauptresultate in den Paragraphen 103—108 entwickelt worden sind. Eine eingehendere Untersuchung der Strahlensysteme hat sich in ihrer Methode nach dem Zweck zu richten, den man im Auge hat. Eine große Klasse von Aufgaben benutzt ein Strahlensystem als Hilfsmittel für die Darstellung von Flächen, die zu einer gegebenen in einer vorgeschriebenen Beziehung stehen, oder für die Auffindung von Eigenschaften solcher Flächen. Wird dagegen das Strahlensystem als Gebilde für sich betrachtet, so tritt die Leitfläche zurück; sie kann für ein und dasselbe Strahlensystem auf unendlichviele Weisen angenommen werden (S. 347).

Für die erste Gruppe von Untersuchungen liegt kein Grund vor, von den geometrischen Differentiationen längs der Fläche abzugehen, die im Vorhergehenden beständig benutzt worden sind. Wo es der Unterscheidung wegen erforderlich ist, sollen dabei die auf die Leitfläche bezüglichen Größen durch einen Index 0 gekennzeichnet werden. Dies ist namentlich für die Richtungskosinus der Flächennormale, X_0, Y_0, Z_0, und die Fundamentalgrößen, wenigstens der zweiten Ordnung, nötig; überflüssig dagegen, solange nicht eine zweite Fläche ins Spiel kommt, für Größen wie $A, A', \ldots$, die neben $X_0, \ldots$ in den allgemeinen Frenetschen Formeln auftreten.

Der Strahl $s \equiv (XYZ)$ sei außer auf das feste Achsensystem x, y, z auf das mit u und v veränderliche t, t', n bezogen. Die Kurve c, deren

Tangente t ist, wird auf der Leitfläche entweder beliebig angenommen oder ist passend zu wählen. Wird

(1) $$\cos(s,t) = \xi, \qquad \cos(s,t') = \eta, \qquad \cos(s,n) = \zeta$$

gesetzt, wo also

(2) $$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

ist, so gelten die Gleichungen

(3) $$\begin{aligned} X &= A\xi + A'\eta + X_0\zeta \\ Y &= B\xi + B'\eta + Y_0\zeta \\ Z &= C\xi + C'\eta + Z_0\zeta. \end{aligned}$$

Unterwirft man sie der geometrischen Differentiation längs c und c', so findet man nach Anwendung der allgemeinen Frenetschen Formeln

(4) $$\begin{aligned} \Theta X &= A\xi_1 + A'\eta_1 + X_0\zeta_1 \\ \Theta Y &= B\xi_1 + B'\eta_1 + Y_0\zeta_1 \\ \Theta Z &= C\xi_1 + C'\eta_1 + Z_0\zeta_1 \end{aligned}$$

(5) $$\begin{aligned} \Theta' X &= A\xi_2 + A'\eta_2 + X_0\zeta_2 \\ \Theta' Y &= B\xi_2 + B'\eta_2 + Y_0\zeta_2 \\ \Theta' Z &= C\xi_2 + C'\eta_2 + Z_0\zeta_2, \end{aligned}$$

wo die Koeffizienten die Werte haben:

(6) $$\begin{aligned} \xi_1 &= \Theta\xi - g\eta - n\zeta \\ \eta_1 &= \Theta\eta - t\zeta + g\xi \\ \zeta_1 &= \Theta\zeta + n\xi + t\eta \end{aligned}$$

(7) $$\begin{aligned} \xi_2 &= \Theta'\xi + g'\eta - t\zeta \\ \eta_2 &= \Theta'\eta - n'\zeta - g'\xi \\ \zeta_2 &= \Theta'\zeta + t\xi + n'\eta. \end{aligned}$$

Sie genügen den Relationen

(8) $$\begin{aligned} \xi\xi_1 + \eta\eta_1 + \zeta\zeta_1 &= 0 \\ \xi\xi_2 + \eta\eta_2 + \zeta\zeta_2 &= 0. \end{aligned}$$

Besonders einfach werden die Werte für $s \perp t$, wenn also die Kurven c auf der Leitfläche die orthogonalen Trajektorien der Strahlen des Systems sind. Außer

(9) $$\xi = 0$$

darf man dann bei passender Erklärung des Neigungswinkels σ des Strahls gegen die Fläche

(10) $$\eta = \cos\sigma, \qquad \zeta = \sin\sigma,$$

also

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -g\cos\sigma - n\sin\sigma \\ \eta_1 &= -\sin\sigma(t+\Theta\sigma) \\ \zeta_1 &= \cos\sigma(t+\Theta\sigma) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \xi_2 &= g'\cos\sigma - t\sin\sigma \\ \eta_2 &= -\sin\sigma(n'+\Theta'\sigma) \\ \zeta_2 &= \cos\sigma(n'+\Theta'\sigma) \end{aligned} \tag{12}$$

setzen.

Man kann fragen, was für Bedingungen sich bei einer Vergleichung von $\Theta'\Theta X$ mit $\Theta\Theta' X, \ldots$ aus (4) und (5) herausstellen. Bei den allgemeinen Frenetschen Formeln hatte die Vertauschungsformel zu den drei Fundamentalgleichungen geführt, aber es war nicht umgekehrt untersucht worden, was man über die Fläche aussagen kann, wenn man diese Gleichungen als erfüllt annimmt. So wichtig diese Frage ist, so setzt doch ihre vollständige Beantwortung zu viel aus der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen voraus, um hier gegeben werden zu können. Die Untersuchung gipfelt in dem zuerst von Bonnet, freilich nur unter der Annahme rechtwinkliger Koordinatenlinien, bewiesenen Satze: Zu 2.3 Größen E, F, G; L, M, N, die den für Fundamentalgrößen nötigen Bedingungen, namentlich also den drei Fundamentalgleichungen genügen, gibt es unter Voraussetzung bestimmter Vorzeichen der Koordinaten eine bis auf die Lage im Raum eindeutig bestimmte Fläche, für die jene Größen die Bedeutung der Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung haben.

Dies vorausgeschickt, ist nun klar und wird durch Ausführung der Rechnung leicht bestätigt, daß aus der Anwendung der Vertauschungsformel auf (4) und (5) nur wieder die Fundamentalgleichungen hervorgehen können. Die beiden Gleichungssysteme enthalten außer zwei unabhängigen Winkelgrößen nichts auf das Strahlensystem Bezügliches, sondern bloß Größen, die zu der Leitfläche gehören. Existiert nun die Fläche, so steht auch die Existenz des Strahlensystems nicht in Frage. Man findet vielmehr sogar unendlichviele Strahlensysteme, für die die Fläche Leitfläche ist, indem man sich durch jeden ihrer Punkte einen Strahl gelegt denkt, dessen Richtungskosinus beliebige, nur durch die Gleichung $\Sigma X^2 = 1$ verbundene Funktionen von u und v sind.

§ 177.

Die allgemeinen Weingartenschen Gleichungen.

Wird über den eben eingenommenen Standpunkt hinausgegangen, so treten zu den beiden Grundformen der Leitfläche,

$$\mathsf{A}_0 \equiv E_0 du^2 + 2F_0 du dv + G_0 dv^2$$
$$\mathsf{B}_0 \equiv L_0 du^2 + 2M_0 du dv + N_0 dv^2,$$

noch zwei weitere quadratische Differentialformen,

$$\mathsf{E} \equiv \mathfrak{E} du^2 + 2\mathfrak{F} du dv + \mathfrak{G} dv^2$$
$$\mathsf{B} \equiv L du^2 + (M + \overline{M}) du dv + N dv^2$$

(S. 349); oder vielmehr die quadratische Form E und eine bilineare,

$$\overline{\mathfrak{B}} \equiv (L du + M dv)\delta u + (\overline{M} du + N dv)\delta v$$

(S. 354). Die Betrachtung des Strahlensystems als solchen bedingt die Einführung geometrischer Differentiationen, in denen vor allem E die Stelle von A_0 vertritt. Dadurch werden die Kurven auf der Leitfläche, die die Grundlage der Differentiationen bildeten, durch Kurven auf der Einheitskugel ersetzt. In der Theorie der Flächen, also für $M = \overline{M}$, $X = X_0, \ldots$ ist diese Einführung nur bei solchen Aufgaben nützlich, die der sphärischen Abbildung entspringen.

Im übrigen kann man, den Voraussetzungen in der Flächentheorie entsprechend, der ersten Differentiation etwa eine willkürliche, durch eine lineare Differentialgleichung $\mathfrak{M}_0 = 0$ definierte Kurve (auf der Einheitskugel) zugrunde legen, die zweite Differentiation längs ihrer orthogonalen Trajektorie ausführen. Besonders wichtig ist der Spezialfall, daß die beiden Theta-Operationen sich an die simultane Transformation der Formen E und B (S. 351) anschließen. Sie entsprechen dann in bestimmter Hinsicht den geometrischen Ableitungen längs den Krümmungslinien einer Fläche. Aber die Gliederung reicht hier weiter, weil vier Fundamentalgrößen zweiter Ordnung $L, M, \overline{M}, N$ vorhanden sind, oder geometrisch, weil den Grenzpunkten, die bei den eben genannten Operationen als bevorzugt erscheinen, die Brennpunkte zur Seite treten. Es würde hier zu weit führen, für die verschiedenen Differentiationen, bei denen es sich um eine erweiterte Anwendung der früher auseinandergesetzten Methoden handelt, die charakteristischen Formeln aufzustellen und ihre Zusammenhänge zu erörtern. Nur sei erwähnt, daß man, durch die Frenetschen Formeln geleitet, die Verbindungen

$$\sum A\vartheta_1 X, \qquad \sum A'\vartheta_1 X, \qquad \sum A\vartheta_2 X, \qquad \sum A'\vartheta_2 X$$

einführen und außerdem natürlich auch

$$\sum AX \equiv \xi, \qquad \sum A'X \equiv \eta$$

beibehalten wird. Die Formeln, die dann A und A' als homogene lineare Funktionen von X, $\vartheta_1 X$, $\vartheta_2 X$ liefern, bilden nebst ihren entsprechenden die Grundlage der weiteren Untersuchung.

Der Übergang zu den gewöhnlichen Ableitungen würde sich im allgemeinen Falle in der Art des § 60 vollziehen. Die dabei entstehenden Gleichungen mögen hier einmal ganz ohne Benutzung geometrischer Differentiationen aufgestellt werden. Bei der heutigen Art der Formulierung bestimmter differentialgeometrischer Probleme (S. 218) sind sie nicht vollständig zu entbehren. Auf anschauliche Bedeutung — ein Hauptvorzug der geometrischen Differentiationen — ist allerdings bei diesen Formeln zu verzichten.

Die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung eines Strahlensystems werden durch die Gleichungen (S. 349 (3))

$$(1)\qquad \begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial u}+\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial y_0}{\partial u}+\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial z_0}{\partial u}&=-L\\
\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial u}+\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial y_0}{\partial u}+\frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial z_0}{\partial u}&=-\overline{M}\\
\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v}+\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial y_0}{\partial v}+\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial z_0}{\partial v}&=-M\\
\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x_0}{\partial v}+\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial y_0}{\partial v}+\frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial z_0}{\partial v}&=-N
\end{aligned}$$

erklärt. Sie vertreten bei der gewöhnlichen Differentiation die vier oben genannten Verbindungen. An Stelle von ξ und η sind die Größen $\sum X\frac{\partial x_0}{\partial u}$ und $\sum X\frac{\partial x_0}{\partial v}$ zu benutzen, und es sei

$$(2)\qquad \begin{aligned}
X\frac{\partial x_0}{\partial u}+Y\frac{\partial y_0}{\partial u}+Z\frac{\partial z_0}{\partial u}&=\alpha\\
X\frac{\partial x_0}{\partial v}+Y\frac{\partial y_0}{\partial v}+Z\frac{\partial z_0}{\partial v}&=\beta.
\end{aligned}$$

Löst man die sechs Gleichungen (1, 2) nach den sechs ersten partiellen Ableitungen von x_0, y_0, z_0 auf, so findet man unter Benutzung von S. 335 (6, 7, 8) die Formeln

$$(3)\qquad \begin{aligned}
\frac{\partial x_0}{\partial u}&=\bar{\vartheta}_{11}\frac{\partial X}{\partial u}+\bar{\vartheta}_{12}\frac{\partial X}{\partial v}+\alpha X,\ldots\\
\frac{\partial x_0}{\partial v}&=\bar{\vartheta}_{21}\frac{\partial X}{\partial u}+\bar{\vartheta}_{22}\frac{\partial X}{\partial v}+\beta X,\ldots,
\end{aligned}$$

in denen die neu eingeführten Koeffizienten die Werte haben:

$$(4)\qquad \begin{aligned}
\bar{\vartheta}_{11}&=\frac{\mathfrak{F}\overline{M}-\mathfrak{G}L}{\mathfrak{T}^2}, & \bar{\vartheta}_{12}&=\frac{\mathfrak{F}L-\mathfrak{E}\overline{M}}{\mathfrak{T}^2}\\
\bar{\vartheta}_{21}&=\frac{\mathfrak{F}N-\mathfrak{G}M}{\mathfrak{T}^2}, & \bar{\vartheta}_{22}&=\frac{\mathfrak{F}M-\mathfrak{E}N}{\mathfrak{T}^2}.
\end{aligned}$$

Die Gleichungen (3) erscheinen also als Verallgemeinerung der Wein-

gartenschen in der nach $\frac{\partial x}{\partial u}$ und $\frac{\partial x}{\partial v}$ aufgelösten Form, nachdem $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}$ statt E, F, G eingeführt sind. Abgesehen davon, daß X, Y, Z hier eine allgemeinere Bedeutung haben als im § 100, stimmen $\bar{\vartheta}_{21}$ und $\bar{\vartheta}_{22}$ mit ϑ_{21} und ϑ_{22} genau überein, während $\bar{\vartheta}_{11}$ und $\bar{\vartheta}_{12}$ für $\bar{M} = M$ gleich ϑ_{11} und ϑ_{12} werden. Unter dieser Annahme und für $X = X_0, \ldots, \alpha = 0$, $\beta = 0$ (wo dann der Index 0 überall weggelassen wird) gehen die Formeln (3) in S. 340 (4) über. Sie mögen als **allgemeine Weingartensche Gleichungen** bezeichnet werden. Der Zusatz allgemein darf wegbleiben, wenn kein Zweifel ist, daß es sich um die Theorie der Strahlensysteme handelt.

§ 178.

Folgerungen aus den Weingartenschen Gleichungen.

Aus den Weingartenschen Gleichungen können, falls X, Y, Z als bekannt gelten, die Koordinaten der Leitfläche durch Quadraturen bestimmt werden, wenn die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial^2 x_0}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 x_0}{\partial v \partial u}, \ldots$$

erfüllt sind. Um sie zu bilden, hat man nach ausgeführter Differentiation die zweiten partiellen Ableitungen von X, Y, Z aus S. 336 (10, 11, 12), den Gaußschen Gleichungen für die Einheitskugel, einzusetzen. Man findet dann (vgl. S. 230) drei Gleichungen der Form

$$P\frac{\partial X}{\partial u} + P'\frac{\partial X}{\partial v} + P_0 X = 0$$

$$P\frac{\partial Y}{\partial u} + P'\frac{\partial Y}{\partial v} + P_0 Y = 0$$

$$P\frac{\partial Z}{\partial u} + P'\frac{\partial Z}{\partial v} + P_0 Z = 0,$$

aus denen

$$P = 0, \qquad P' = 0, \qquad P_0 = 0$$

folgt. Für die vorliegende Untersuchung ist

$$P = \left(\frac{\partial \bar{\vartheta}_{11}}{\partial v} + \mathfrak{J}_1' \bar{\vartheta}_{11} + \mathfrak{J}_1'' \bar{\vartheta}_{12}\right) - \left(\frac{\partial \bar{\vartheta}_{21}}{\partial u} + \mathfrak{J}_1 \bar{\vartheta}_{21} + \mathfrak{J}_1' \bar{\vartheta}_{22} + \beta\right)$$

(1) $$P' = \left(\frac{\partial \bar{\vartheta}_{12}}{\partial v} + \mathfrak{J}_2' \bar{\vartheta}_{11} + \mathfrak{J}_2'' \bar{\vartheta}_{12} + \alpha\right) - \left(\frac{\partial \bar{\vartheta}_{22}}{\partial u} + \mathfrak{J}_2 \bar{\vartheta}_{21} + \mathfrak{J}_2' \bar{\vartheta}_{22}\right)$$

$$P_0 = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial v} - \mathfrak{F}\bar{\vartheta}_{11} - \mathfrak{G}\bar{\vartheta}_{12}\right) - \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} - \mathfrak{E}\bar{\vartheta}_{21} - \mathfrak{F}\bar{\vartheta}_{22}\right).$$

Obgleich nur vier bestimmte Ableitungen $\frac{\partial \bar{\vartheta}_{ik}}{\partial u_l}$ vorkommen und das Bildungsgesetz aller sich aus einer von ihnen ablesen läßt, so mögen doch ihre Ausdrücke sämtlich aufgeführt werden:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\bar\vartheta_{11}}{\partial u} &= \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\Big[\mathfrak{F}\Big(\frac{\partial\bar M}{\partial u} - \mathfrak{J}_1' L - \mathfrak{J}_2'\bar M\Big) - \mathfrak{G}\Big(\frac{\partial L}{\partial u} - \mathfrak{J}_1 L - \mathfrak{J}_2\bar M\Big)\Big] \\
&\qquad - \mathfrak{J}_1\bar\vartheta_{11} - \mathfrak{J}_1'\bar\vartheta_{12} \\
\frac{\partial\bar\vartheta_{11}}{\partial v} &= \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\Big[\mathfrak{F}\Big(\frac{\partial\bar M}{\partial v} - \mathfrak{J}_1'' L - \mathfrak{J}_2''\bar M\Big) - \mathfrak{G}\Big(\frac{\partial L}{\partial v} - \mathfrak{J}_1' L - \mathfrak{J}_2'\bar M\Big)\Big] \\
&\qquad - \mathfrak{J}_1'\bar\vartheta_{11} - \mathfrak{J}_1''\bar\vartheta_{12} \\
\frac{\partial\bar\vartheta_{12}}{\partial u} &= \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\Big[\mathfrak{F}\Big(\frac{\partial L}{\partial u} - \mathfrak{J}_1 L - \mathfrak{J}_2\bar M\Big) - \mathfrak{E}\Big(\frac{\partial\bar M}{\partial u} - \mathfrak{J}_1' L - \mathfrak{J}_2'\bar M\Big)\Big] \\
&\qquad - \mathfrak{J}_2\bar\vartheta_{11} - \mathfrak{J}_2'\bar\vartheta_{12} \\
\frac{\partial\bar\vartheta_{12}}{\partial v} &= \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\Big[\mathfrak{F}\Big(\frac{\partial L}{\partial v} - \mathfrak{J}_1' L - \mathfrak{J}_2'\bar M\Big) - \mathfrak{E}\Big(\frac{\partial\bar M}{\partial v} - \mathfrak{J}_1'' L - \mathfrak{J}_2''\bar M\Big)\Big] \\
(2)\qquad &\qquad - \mathfrak{J}_2'\bar\vartheta_{11} - \mathfrak{J}_2''\bar\vartheta_{12} \\
\frac{\partial\bar\vartheta_{21}}{\partial u} &= \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\Big[\mathfrak{F}\Big(\frac{\partial N}{\partial u} - \mathfrak{J}_1' M - \mathfrak{J}_2' N\Big) - \mathfrak{G}\Big(\frac{\partial M}{\partial u} - \mathfrak{J}_1 M - \mathfrak{J}_2 N\Big)\Big] \\
&\qquad - \mathfrak{J}_1\bar\vartheta_{21} - \mathfrak{J}_1'\bar\vartheta_{22} \\
\frac{\partial\bar\vartheta_{21}}{\partial v} &= \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\Big[\mathfrak{F}\Big(\frac{\partial N}{\partial v} - \mathfrak{J}_1'' M - \mathfrak{J}_2'' N\Big) - \mathfrak{G}\Big(\frac{\partial M}{\partial v} - \mathfrak{J}_1' M - \mathfrak{J}_2' N\Big)\Big] \\
&\qquad - \mathfrak{J}_1'\bar\vartheta_{21} - \mathfrak{J}_1''\bar\vartheta_{22} \\
\frac{\partial\bar\vartheta_{22}}{\partial u} &= \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\Big[\mathfrak{F}\Big(\frac{\partial M}{\partial u} - \mathfrak{J}_1 M - \mathfrak{J}_2 N\Big) - \mathfrak{E}\Big(\frac{\partial N}{\partial u} - \mathfrak{J}_1' M - \mathfrak{J}_2' N\Big)\Big] \\
&\qquad - \mathfrak{J}_2\bar\vartheta_{21} - \mathfrak{J}_2'\bar\vartheta_{22} \\
\frac{\partial\bar\vartheta_{22}}{\partial v} &= \frac{1}{\mathfrak{T}^2}\Big[\mathfrak{F}\Big(\frac{\partial M}{\partial v} - \mathfrak{J}_1' M - \mathfrak{J}_2' N\Big) - \mathfrak{E}\Big(\frac{\partial N}{\partial v} - \mathfrak{J}_1'' M - \mathfrak{J}_2'' N\Big)\Big] \\
&\qquad - \mathfrak{J}_2'\bar\vartheta_{21} - \mathfrak{J}_2''\bar\vartheta_{22}.
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen $P = 0$, $P' = 0$ liefern nun, wenn man sie in der Form

$$\mathfrak{E}P + \mathfrak{F}P' = 0, \qquad \mathfrak{F}P + \mathfrak{G}P' = 0$$

benutzt,

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
&\frac{\partial L}{\partial v} - \mathfrak{J}_1' L - \mathfrak{J}_2'\bar M - \Big(\frac{\partial M}{\partial u} - \mathfrak{J}_1 M - \mathfrak{J}_2 N\Big) + \mathfrak{E}\beta - \mathfrak{F}\alpha = 0 \\
&\frac{\partial N}{\partial u} - \mathfrak{J}_1' M - \mathfrak{J}_2' N - \Big(\frac{\partial\bar M}{\partial v} - \mathfrak{J}_1'' L - \mathfrak{J}_2''\bar M\Big) + \mathfrak{G}\alpha - \mathfrak{F}\beta = 0.
\end{aligned}
$$

Da ferner

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{F}\bar\vartheta_{11} + \mathfrak{G}\bar\vartheta_{12} &= -\bar M \\
\mathfrak{E}\bar\vartheta_{21} + \mathfrak{F}\bar\vartheta_{22} &= -M
\end{aligned}
$$

ist, so wird in Folge von $P_0 = 0$:

$$(5)\qquad \frac{\partial\alpha}{\partial v} - \frac{\partial\beta}{\partial u} + \bar M - M = 0.$$

Durch Elimination von α und β aus (3) und (5) entsteht eine Relation zwischen den sieben Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung und ihren Ableitungen. Zu ihr tritt, als Integrabilitätsbedingung für das System der Gaußschen Gleichungen,

$$\mathfrak{K} = 1, \tag{6}$$

wenn $\mathfrak{K}$ die Gaußsche Invariante der Form E bezeichnet (S. 341).

Die Beziehungen (3), (5) und (6) entsprechen für Strahlensysteme den Fundamentalgleichungen der Flächentheorie.

In dem wiederholt hervorgehobenen Spezialfall, daß das Strahlensystem aus den Normalen der Leitfläche besteht, gehen die Formeln (3) in S. 341 (6) über, (5) wird identisch erfüllt. Unter denselben Annahmen liefern nach einer auf S. 340 gemachten Bemerkung die Gleichungen (2) zugleich die Ausdrücke der Ableitungen von $\eta_{11}, \ldots \eta_{22}$. Man hat nur $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ durch E, F, G zu ersetzen.

Allgemein kann man die Fundamentalgrößen erster Ordnung der Leitfläche durch $\mathfrak{E}, \ldots N$, α und β darstellen. Multipliziert man nämlich die Formeln (3) des vorigen Paragraphen mit $\frac{\partial x_0}{\partial u}$, $\frac{\partial x_0}{\partial v}$ und summiert über die kartesischen Koordinaten, so erhält man

$$\begin{aligned} E_0 &= -(\bar{L}\vartheta_{11} + \bar{M}\vartheta_{12}) + \alpha^2 \\ F_0 &= -(\bar{M}\vartheta_{11} + \bar{N}\vartheta_{12}) + \alpha\beta \\ F_0 &= -(\bar{L}\vartheta_{21} + \bar{M}\vartheta_{22}) + \alpha\beta \\ G_0 &= -(\bar{M}\vartheta_{21} + \bar{N}\vartheta_{22}) + \beta^2. \end{aligned} \tag{7}$$

Ebenfalls lassen sich aus denselben Formeln auf direktem Wege, nämlich nach S. 63 (3), die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung der Leitfläche bilden. Doch bedarf diese Rechnung keiner Erläuterung.

XIV. Abschnitt.

Spezielle Sätze und Aufgaben der Flächentheorie.

§ 179.

Die Gaußsche Invarianz nach Beltrami.

Unter den Beweisen für die Gaußsche Invarianz ist ein von Beltrami gegebener bemerkenswert, der als Anwendung der Theorie der Biegungskovarianten betrachtet werden kann. Beltrami geht von der Zerlegung einer binären quadratischen Differentialform in lineare Faktoren aus, wie sie zu einem speziellen biegungstheoretischen Zweck schon auf S. 464 angewendet worden ist; dort freilich unter der Voraussetzung, daß die Invarianz bereits feststeht. Es sei

$$(1)\qquad \mathsf{A} = \left(\sqrt{a_{11}}\,du + \frac{a_{12} + \sqrt{-a}}{\sqrt{a_{11}}}\,dv\right)\left(\sqrt{a_{11}}\,du + \frac{a_{12} - \sqrt{-a}}{\sqrt{a_{11}}}\,dv\right)$$

oder kürzer geschrieben

$$(2)\qquad \mathsf{A} = (A\,du + B\,dv)\,(A'du + B'dv),$$

und es seien ferner λ und λ' die beiden integrierenden Faktoren der linearen Differentialformen auf der rechten Seite, sodaß man

$$(3)\qquad \begin{aligned} \lambda(A\,du + B\,dv) &= d\alpha \\ \lambda'(A'du + B'dv) &= d\beta \end{aligned}$$

setzen kann. Für

$$(4)\qquad \lambda\lambda' = m$$

geht aus (2) und (3) die Gleichung

$$(5)\qquad m(a_{11}du^2 + 2a_{12}du\,dv + a_{22}dv^2) = d\alpha\,d\beta$$

hervor. Nun genügt jede der Größen λ und λ' einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung. Werden λ und λ' aus diesen in Verbindung mit (4) eliminiert, so ergibt sich für m eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Sie soll hergeleitet werden, weil sie unmittelbar auf die Gaußsche Invariante führt.

Die beiden Differentialgleichungen für λ und λ' sind

$$\frac{\partial(\lambda A)}{\partial v} = \frac{\partial(\lambda B)}{\partial u}, \qquad \frac{\partial(\lambda' A')}{\partial v} = \frac{\partial(\lambda' B')}{\partial u}$$

oder

$$B\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} - A\frac{\partial \log \lambda}{\partial v} = \frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u}$$

$$B'\frac{\partial \log \lambda'}{\partial u} - A'\frac{\partial \log \lambda'}{\partial v} = \frac{\partial A'}{\partial v} - \frac{\partial B'}{\partial u}.$$

Setzt man in die zweite

$$\log \lambda' = \log m - \log \lambda \equiv \psi - \log \lambda$$

ein und stellt das Resultat mit der ersten zusammen, so findet man

$$(A'B - AB')\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} = A'\left(\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u}\right) + A\left(\frac{\partial A'}{\partial v} - \frac{\partial B'}{\partial u}\right) + A\left(A'\frac{\partial \psi}{\partial v} - B'\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)$$

$$(A'B - AB')\frac{\partial \log \lambda}{\partial v} = B'\left(\frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u}\right) + B\left(\frac{\partial A'}{\partial v} - \frac{\partial B'}{\partial u}\right) + B\left(A'\frac{\partial \psi}{\partial v} - B'\frac{\partial \psi}{\partial u}\right).$$

Da nach (1, 2)

$$A = A' = \sqrt{a_{11}}, \qquad B = \frac{a_{12} + \sqrt{-a}}{\sqrt{a_{11}}}, \qquad B' = \frac{a_{12} - \sqrt{-a}}{\sqrt{a_{11}}}$$

ist, so wird

$$2\sqrt{-a}\,\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} = \frac{\partial a_{11}}{\partial v} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial u} - 2\frac{\partial a_{12}}{\partial u} + A\left(A'\frac{\partial \psi}{\partial v} - B'\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)$$

$$2\sqrt{-a}\,\frac{\partial \log \lambda}{\partial v} = \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial v} - \frac{\partial a_{22}}{\partial u} + B\left(A'\frac{\partial \psi}{\partial v} - B'\frac{\partial \psi}{\partial u}\right).$$

Durch Elimination von λ entsteht nun für ψ, wenn vorübergehend

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial v} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial u} - 2\frac{\partial a_{12}}{\partial u}\right) = a'$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial u} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial v}\right) = a''$$

gesetzt wird, die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A}{\sqrt{a}}\left(A'\frac{\partial \psi}{\partial v} - B'\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B}{\sqrt{a}}\left(A'\frac{\partial \psi}{\partial v} - B'\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)\right) + \frac{\partial a'}{\partial v} + \frac{\partial a''}{\partial u} = 0.$$

Sie läßt sich sehr übersichtlich darstellen, wenn die Differentiationen im ersten und zweiten Gliede ausgeführt werden. Es folgt nämlich

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{A}{\sqrt{a}}\left(A'\frac{\partial \psi}{\partial v} - B'\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)\right) - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{B}{\sqrt{a}}\left(A'\frac{\partial \psi}{\partial v} - B'\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial v}\frac{a_{11}\frac{\partial \psi}{\partial v} - a_{12}\frac{\partial \psi}{\partial u}}{\sqrt{a}} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{a_{22}\frac{\partial \psi}{\partial u} - a_{12}\frac{\partial \psi}{\partial v}}{\sqrt{a}} \equiv \sqrt{a}\,\Delta_a^2\psi.$$

Setzt man für a' und a'' ihre Werte wieder ein und definiert eine Größe k durch die Formel

$$(6)\qquad k = -\frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial a_{22}}{\partial u} - \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial v}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial v} + \frac{a_{12}}{a_{11}}\frac{\partial a_{11}}{\partial u} - 2\frac{\partial a_{12}}{\partial u}\right)\right)\right],$$

so erhält man schließlich das Resultat: Besteht die Gleichung (5), so genügt m der partiellen Differentialgleichung

$$(7)\qquad \Delta_a^2 \log m - 2k = 0.$$

Wird jetzt eine Veränderung der Variablen vorgenommen, durch welche A in A′ transformiert wird, und sind $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{m}$ die Werte der Funktionen α, β, m, in den neuen Veränderlichen u', v' dargestellt, so ergibt sich aus (5) die Gleichung

$$(8)\qquad \bar{m}(a'_{11}du'^2 + 2a'_{12}du'dv' + a'_{22}dv'^2) = d\bar{\alpha}\,d\bar{\beta},$$

und diese zieht wieder die partielle Differentialgleichung

$$(9)\qquad \Delta_{a'}^2 \log \bar{m} - 2k' = 0$$

nach sich, in der k' aus a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, u' und v' ebenso gebildet ist wie k aus a_{11}, a_{12}, a_{22}, u und v. Und da vermöge der Kovarianz des Differentialparameters zweiter Ordnung

$$\Delta_a^2 \log m = \Delta_{a'}^2 \log \bar{m}$$

ist, so folgt aus (7) und (9)

$$(10)\qquad k = k',$$

d. h. k ist eine Invariante der Differentialform A.

Bei der Anwendung auf $\mathsf{A} = ds^2$, also für

$$a_{11} = E, \qquad a_{12} = F, \qquad a_{22} = G$$

werden die Größen α und β konjugiert komplex und führen auf isometrische Parameter, für die der gemeinsame Wert von E' und G' gleich $\frac{1}{m}$ ist.

Man erkennt leicht durch Ausrechnung, daß dann die Invariante k dem Gaußschen Krümmungsmaße gleich wird. Nimmt man z. B.

$$u = x, \qquad v = y,$$

also

$$a_{11} = 1 + p^2, \qquad a_{12} = pq, \qquad a_{22} = 1 + q^2,$$

so liefert die Formel (6)

$$k = \frac{-1}{\sqrt{p^2+q^2+1}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{qs}{(1+p^2)\sqrt{p^2+q^2+1}} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{qr}{(1+p^2)\sqrt{p^2+q^2+1}}\right)$$
$$= \frac{rt-s^2}{(p^2+q^2+1)^2},$$

d. h.

$$k = K.$$

§ 180.

Verschiedene Ausdrücke des Krümmungsmaßes.

In der Form (6) ist der Ausdruck des Krümmungsmaßes von Liouville gegeben worden. Er ist nicht symmetrisch in u und v, kann aber auf mannigfache Art ohne vollständige Ausführung der Differentiationen in eine symmetrische Form gesetzt werden. Benutzt man z. B., unter der Annahme $\mathsf{A} = ds^2$, den Koordinatenwinkel ϑ, um mittels der Gleichung

$$\cos\vartheta = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

die Größe F zu eliminieren, so erhält man

$$-\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial v} = -\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial E}{\partial v}\cos\vartheta$$

$$\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial u} - 2\frac{\partial F}{\partial u} = 2\sqrt{EG}\sin\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial u} - \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial G}{\partial u}\cos\vartheta,$$

also

$$(1)\quad K = -\frac{1}{2T}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial G}{\partial u} - \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial E}{\partial v}\cos\vartheta\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial v} - \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial G}{\partial u}\cos\vartheta\right) + 2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{EG}}{T}\sin\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)\right),$$

worin noch

$$(2)\quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{EG}}{T}\sin\vartheta\right) = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial u\,\partial v}$$

gesetzt werden kann.

Führt man in den so entstehenden Ausdruck weiter die geodätischen Krümmungen der Koordinatenlinien nach den Formeln (S. 329 (1, 2))

$$g_u = -\frac{1}{T}\left(\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}\frac{F}{\sqrt{G}}\right)$$

$$g_v = -\frac{1}{T}\left(\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial u}\frac{F}{\sqrt{E}}\right)$$

ein und benutzt fortgesetzt die Darstellungen von $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$ durch die Fundamentalgrößen, so findet man leicht

$$\frac{\partial G}{\partial u} - \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial E}{\partial v}\cos\vartheta = -2T\left(g_u\sqrt{G} + \frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right)$$

$$\frac{\partial E}{\partial v} - \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial G}{\partial u}\cos\vartheta = -2T\left(g_v\sqrt{E} + \frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right),$$

mithin

(3) $$K = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial u\,\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}(g_u\sqrt{G}) + \frac{\partial}{\partial v}(g_v\sqrt{E})\right).$$

Diese Formel ist von geringer Wichtigkeit gegenüber früheren, z. B. denen des § 57, sowie einem Ausdruck, den man aus (1) und (2), d. h. aus

(4) $$K = -\frac{1}{2T}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial G}{\partial u} - \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial E}{\partial v}\cos\vartheta + T\frac{\partial\vartheta}{\partial v}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial v} - \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial G}{\partial u}\cos\vartheta + T\frac{\partial\vartheta}{\partial u}\right)\right)$$

durch Wiederwegschaffung des Koordinatenwinkels bilden kann. Man setze

$$-\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial E}{\partial v}\cos\vartheta + T\frac{\partial\vartheta}{\partial v} = -\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial E}{\partial v}\cos\vartheta + \sqrt{EG}\sin\vartheta\frac{\partial\vartheta}{\partial v}$$

$$= -\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial(E\cos\vartheta)}{\partial v} = -\frac{\partial F}{\partial v} - F\frac{\partial\log\sqrt{\frac{E}{G}}}{\partial v},$$

und entsprechend unter dem Zeichen der Differentiation nach v. Der gesuchte symmetrische Wert ergibt sich, wenn für E, F, G wieder a_{11}, a_{12}, a_{22} geschrieben wird, in der von Weingarten herrührenden Form

(5) $$K = -\frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{2}a_{12}\frac{\partial\log\frac{a_{22}}{a_{11}}}{\partial v} + \frac{\partial a_{22}}{\partial u} - \frac{\partial a_{12}}{\partial v}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{2}a_{12}\frac{\partial\log\frac{a_{11}}{a_{22}}}{\partial u} + \frac{\partial a_{11}}{\partial v} - \frac{\partial a_{12}}{\partial u}\right)\right).$$

Daß er auch für eine beliebige Differentialform A gilt und daß der Koordinatenwinkel für seine Herleitung bedeutungslos ist, bedarf kaum der Erwähnung.

§ 181.

Die Liouvillesche Formel der Theorie der geodätischen Linien.

Nachdem die Krümmung einer Flächenkurve in eine normale und eine tangentiale Komponente zerlegt worden war, ist im § 26 in Gestalt des Eulerschen Satzes eine Formel entwickelt worden, die über

die Verteilung der Normalkrümmung um einen gegebenen Flächenpunkt herum Auskunft gibt. Sie stellt die Normalkrümmung einer beliebigen Kurve durch die zu den beiden Krümmungslinien gehörenden Größen derselben Art und durch den Winkel dar, den die Kurve mit einer dieser Linien bildet. Man kann fragen, ob es in der Theorie der Tangentialkrümmung eine ähnliche Formel gibt. Eine genaue Analogie zu dem Eulerschen Satze findet sicher nicht statt, und zwar aus zwei Gründen: erstens weil die Tangentialkrümmung nicht bloß von den Ableitungen erster Ordnung abhängt, und zweitens, weil es in dieser Theorie keine Linien gibt, die in gleicher Weise ausgezeichnet wären wie die Krümmungslinien für die Normalkrümmung. Des zweiten Umstandes wegen kann man aber hier die Frage allgemeiner fassen: Wie hängt die Tangentialkrümmung einer beliebigen Kurve mit den Größen gleicher Art für irgend zwei aufeinander senkrechte Kurven und mit dem Winkel zusammen, den sie mit einer von ihnen einschließt?

Das Material für eine solche Untersuchung liegt in den früheren Abschnitten vollständig vor. Als Ausgangspunkt könnte man z. B. den Ausdruck S. 187 (1) von g nehmen. Die Erörterung wird jedoch der Form nach etwas einfacher, ohne deshalb an Allgemeinheit einzubüßen, wenn man die Kurven, zu denen die Tangentialkrümmungen gehören sollen, durch Gleichungen $\varphi(u, v) = C$, $\psi(u, v) = C'$, statt durch lineare Differentialgleichungen, definiert denkt. Dann gelten nach S. 137 (26) und S. 139 (6) die Formeln

(1) $$g_\varphi = \frac{-1}{\sqrt{\Delta^1\varphi}} \sum_{i,k} \varphi_i \varphi_k \varphi_{ik}$$

(2) $$g'_\varphi = \frac{1}{\sqrt{\Delta^1\varphi}} \sum_{i,k} \varphi_i \varphi'_k \varphi_{ik},$$

die mit

(3) $$g_\psi = \frac{-1}{\sqrt{\Delta^1\psi}} \sum_{i,k} \psi_i \psi_k \psi_{ik}$$

und den Ausdrücken für Kosinus und Sinus des auf S. 35—36 definierten Winkels w zusammenzustellen sind. Nach S. 44 (7, 8) in Verbindung mit

$$\Theta\psi = \frac{-D(\varphi, \psi)}{\sqrt{\Delta^1\varphi}}, \qquad \Theta'\psi = \frac{\Delta(\varphi, \psi)}{\sqrt{\Delta^1\varphi}}$$

lassen sich diese Ausdrücke durch

(4) $$\cos w = -\frac{1}{\sqrt{\Delta^1\psi}}\,\Theta'\psi$$
$$\sin w = -\frac{1}{\sqrt{\Delta^1\psi}}\,\Theta\psi$$

wiedergeben. Das Auftreten der zweiten Ableitungen von ψ in (3) bedingt die Einführung auch der geometrischen Ableitungen von w. Die Rechnung wird am meisten symmetrisch, wenn man die Ableitungen $\Theta\Theta\psi$, $\Theta'\Theta\psi$, $\Theta\Theta'\psi$, $\Theta'\Theta'\psi$, $\Theta(\sqrt{\Delta^1\psi})$, $\Theta'(\sqrt{\Delta^1\psi})$ sämtlich bildet, obwohl sie nach dem Bildungsgesetz der Gleichungen (4) sicher nur zum Teil gebraucht werden. Die Ausdrücke sind für die Theorie der Biegungskovarianten eines Systems zweier Funktionen nützlich.

Für die vier ersten Größen findet man sofort mit Hilfe der Formeln S. 186 (24, 25), in denen nur

$$\mu_{1i} \qquad \mu_{2i} \qquad \overline{m}_{ik}$$

durch

$$\varphi_i \qquad \varphi'_i \qquad \varphi_{ik}$$

zu ersetzen ist:

$$(5)\qquad \begin{aligned}\Theta\Theta\psi &= \sum_{i,k}\varphi_i\varphi_k\psi_{ik} + g_\varphi\Theta'\psi\\ \Theta'\Theta\psi &= \sum_{i,k}\varphi_i\varphi'_k\psi_{ik} - g'_\varphi\Theta'\psi\\ \Theta\Theta'\psi &= \sum_{i,k}\varphi_i\varphi'_k\psi_{ik} - g_\varphi\Theta\psi\\ \Theta'\Theta'\psi &= \sum_{i,k}\varphi'_i\varphi'_k\psi_{ik} + g'_\varphi\Theta\psi.\end{aligned}$$

Die beiden noch übrigen Größen lassen sich aus diesen, von denen übrigens die zweite und dritte inbezug auf die zweiten Ableitungen von ψ äquivalent sind, leicht ableiten. Man kann aber auch nach der Formel S. 184 (17), die hier in der Gestalt

$$(6)\qquad \frac{\partial\sqrt{\Delta^1\psi}}{\partial u_l} = \sum_\varrho \psi'_\varrho\psi_{\varrho l}$$

zu benutzen ist, unmittelbar hinschreiben:

$$(7)\qquad \begin{aligned}\Theta(\sqrt{\Delta^1\psi}) &= \sum_{i,k}\varphi_i\psi'_k\psi_{ik}\\ \Theta'(\sqrt{\Delta^1\psi}) &= \sum_{i,k}\varphi'_i\psi'_k\psi_{ik}.\end{aligned}$$

Es sei nun zur Abkürzung

$$(8)\qquad -\sin w = \alpha,$$

sodaß

$$\alpha\sqrt{\Delta^1\psi} = \Theta\psi,$$

$$\sqrt{\Delta^1\psi}\,\Theta\alpha = \sum_{i,k}\varphi_i\varphi_k\psi_{ik} + g_\varphi\Theta'\psi - \frac{\Theta\psi}{\sqrt{\Delta^1\psi}}\sum_{i,k}\varphi_i\psi'_k\psi_{ik}$$

$$= g_\varphi\Theta'\psi + \sum_i\varphi_i\sum_k\left(\varphi_k - \frac{\Theta\psi}{\sqrt{\Delta^1\psi}}\psi'_k\right)\psi_{ik}.$$

Nun ist

$$(9)\qquad \frac{1}{\sqrt{\Delta^1\psi}}(\psi_k'\Theta\psi + \psi_k\Theta'\psi) = \varphi_k,$$

mithin wird

$$(10)\qquad \sqrt{\Delta^1\psi}\,\Theta\alpha = \left(g_\varphi + \frac{1}{\sqrt{\Delta^1\psi}}\sum_{i,k}\varphi_i\psi_k\psi_{ik}\right)\Theta'\psi,$$

und ebenso

$$(11)\qquad \sqrt{\Delta^1\psi}\,\Theta'\alpha = \left(-g_\varphi' + \frac{1}{\sqrt{\Delta^1\psi}}\sum_{i,k}\varphi_i'\psi_k\psi_{ik}\right)\Theta'\psi.$$

Aus diesen beiden Gleichungen können die in g_ψ auftretenden Verbindungen $\sum_k \psi_k\psi_{ik}$ $(i = 1, 2)$ berechnet und in g_ψ eingesetzt werden. Entfernt man zugleich wieder die Hilfsgröße α mittels der Formeln

$$\Theta\alpha = -\cos w\,\Theta w = \frac{\Theta'\psi}{\sqrt{\Delta^1\psi}}\Theta w$$

$$\Theta'\alpha = -\cos w\,\Theta' w = \frac{\Theta'\psi}{\sqrt{\Delta^1\psi}}\Theta' w,$$

so findet man

$$(12)\qquad g_\psi = -(g_\varphi - \Theta w)\cos w - (g_\varphi' + \Theta' w)\sin w.$$

Dieselbe Elimination liefert für die geodätische Krümmung der orthogonalen Trajektorie,

$$(13)\qquad g_\psi' \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta^1\psi}}\sum_{i,k}\psi_i\psi_k'\psi_{ik} \equiv \frac{1}{\sqrt{\Delta^1\psi}}\sum_{i,k}\psi_i'\psi_k\psi_{ik},$$

den Ausdruck

$$(14)\qquad g_\psi' = (g_\varphi - \Theta w)\sin w - (g_\varphi' + \Theta' w)\cos w.$$

Man kann in diesen Gleichungen die geometrischen Ableitungen mit der Grundkurve $\varphi(u, v) = C$ durch solche längs der Linie $\psi(u, v) = C$ und ihrer orthogonalen Trajektorie, $D\chi$ und $D'\chi$, ersetzen. Der Übergang geschieht durch Spezialisierung der Formeln S. 524 (14). Für

$$\bar{D}_1\chi,\quad \bar{D}_2\chi,\quad v_{1\beta},\quad v_{2\beta}$$

hat man

$$\Theta\chi,\quad \Theta'\chi,\quad \psi_\beta,\quad \psi_\beta'$$

zu schreiben und die Koeffizienten der linearen Formen $\mathfrak{R}_1 \equiv \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{R}_2 \equiv \mathfrak{M}_2$ der Annahme $\mathfrak{M}_0 = d\varphi$ gemäß, also für $m_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial u}$, $m_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial v}$ aus den Formeln S. 178 (21, 22) zu entnehmen. Die sehr einfache Rechnung ergibt

$$(15)\qquad \begin{aligned} D\chi &= -\cos w\,\Theta\chi + \sin w\,\Theta'\chi \\ D'\chi &= -\sin w\,\Theta\chi - \cos w\,\Theta'\chi. \end{aligned}$$

Diese Übergangsformeln liefern auf w angewendet und mit (12) und (14) zusammengestellt die Liouvillesche Gleichung

$$g_\psi = -g_\varphi \cos w - g'_\varphi \sin w - Dw \tag{16}$$

und ihre entsprechende

$$g'_\psi = g_\varphi \sin w - g'_\varphi \cos w + D'w. \tag{17}$$

§ 182.

Quadratische Gleichung für die geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien.

Unter den Invarianten, auf die man kommt, sobald man über die Größen zweiter Ordnung hinausgeht, erweisen sich die Tangentialkrümmungen der Krümmungslinien als besonders wichtig. Sie treten bereits in den Fundamentalgleichungen auf, wenn diese in der einfachsten Form geschrieben werden; und zwar sind g_1 und g_2 vermöge der zweiten und dritten Gleichung S. 255 (B)

$$g_1 = \frac{\Theta_2 n_1}{n_1 - n_2}, \qquad g_2 = \frac{\Theta_1 n_2}{n_2 - n_1} \tag{1}$$

zwei bestimmten geometrischen Ableitungen der Hauptkrümmungen äquivalent, machen demnach mit den beiden übrigen Ableitungen dieser Größen zusammen ein vollständiges System von Fundamentalinvarianten dritter Ordnung aus (S. 558). Die Grundlage der flächentheoretischen Untersuchungen zweiter Ordnung, wenn man sich so ausdrücken will, bildet die quadratische Gleichung für n_1 und n_2, deren Koeffizienten rationale Funktionen der Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung sind. Dieser Gleichung eine andere für g_1 und g_2 an die Seite zu stellen, ist die Aufgabe der folgenden Untersuchung.

Da der analytische Ausdruck der geodätischen Krümmung eine Quadratwurzel enthält, während die Normalkrümmung in allen ihren Bestimmungsgrößen rational ist, so wird man zweckmäßig g_1^2 und g_2^2 als Unbekannte betrachten. Die ersten Schritte der Rechnung lehren dann außerdem, daß man für die in g_1 und g_2 vorkommenden Koeffizienten genau die Relationen — ohne weitere Umformung — benutzen kann, die aus der simultanen Transformation der beiden Grundformen in Quadratsummen linearer Formen entspringen.

Für die Summe der Unbekannten ergibt sich aus (1) nach Einführung der gewöhnlichen Ableitungen (vgl. S. 391 (16)) die Gleichung

$$T^2(n_1 - n_2)^2(g_1^2 + g_2^2) = \left(-p_{12}\frac{\partial n_1}{\partial u} + p_{11}\frac{\partial n_1}{\partial v}\right)^2 + \left(p_{22}\frac{\partial n_2}{\partial u} - p_{21}\frac{\partial n_2}{\partial v}\right)^2.$$

Die in n_1 und n_2 steckende Irrationalität kann aus den Differentialquotienten mittels der Relationen

$$(2)\qquad \begin{aligned}(n_1 - n_2)\frac{\partial n_1}{\partial u} &= n_1\frac{\partial H}{\partial u} - \frac{\partial K}{\partial u}, \ldots\\ (n_1 - n_2)\frac{\partial n_2}{\partial u} &= \frac{\partial K}{\partial u} - n_2\frac{\partial H}{\partial u}, \ldots\end{aligned}$$

entfernt werden. Der leicht zu überblickende Ausdruck von

$$T^2(n_1 - n_2)^4(g_1^2 + g_2^2)$$

st dann nach den Ableitungen von H und K zu ordnen. Hierbei nun werden die Gleichungen (S. 389 (1))

$$(3)\qquad \begin{aligned}(p_{11}\xi + p_{12}\eta)^2 + \quad (p_{21}\xi + p_{22}\eta)^2 &= E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2\\ n_1(p_{11}\xi + p_{12}\eta)^2 + n_2(p_{21}\xi + p_{22}\eta)^2 &= L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2\end{aligned}$$

gebraucht, durch die, von den Vorzeichen abgesehen, die Größen $p_{11}, \ldots p_{22}$ zusammen mit n_1 und n_2 definiert werden, und zu denen man noch

$$(4)\qquad n_1^2(p_{11}\xi + p_{12}\eta)^2 + n_2^2(p_{21}\xi + p_{22}\eta)^2 = \mathfrak{E}\xi^2 + 2\mathfrak{F}\xi\eta + \mathfrak{G}\eta^2$$

hinzunehmen kann. Es folgt

$$(5)\qquad \begin{aligned}T^2(n_1 - n_2)^4(g_1^2 + g_2^2) = \mathfrak{G}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^2 - 2\mathfrak{F}\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial v} + \mathfrak{E}\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)^2\\ - 2\left(N\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial K}{\partial u} - M\left(\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial K}{\partial v} + \frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial K}{\partial u}\right) + L\frac{\partial H}{\partial v}\frac{\partial K}{\partial v}\right)\\ + G\left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial K}{\partial u}\frac{\partial K}{\partial v} + E\left(\frac{\partial K}{\partial v}\right)^2.\end{aligned}$$

Der hieraus für $g_1^2 + g_2^2$ hervorgehende Wert ist bereits in den Fundamentalgrößen rational und könnte durch Differentialparameter mit den Grundformen E, B und A dargestellt werden.

Allein die Formel wird noch übersichtlicher, wenn für die Fundamentalgrößen der Einheitskugel ihre Werte S. 338 (12) gesetzt und statt der Ableitungen von H und K die Fundamentalgrößen dritter Ordnung nach S. 500 (5, 6) eingeführt werden. Man findet durch eine elementare Rechnung

$$(6)\qquad \begin{aligned}T^6(n_1 - n_2)^4(g_1^2 + g_2^2) = G(c_{22}P - 2c_{12}Q + c_{11}R)^2\\ - 2F(c_{22}P - 2c_{12}Q + c_{11}R)(c_{22}Q - 2c_{12}R + c_{11}S)\\ + E(c_{22}Q - 2c_{12}R + c_{11}S)^2.\end{aligned}$$

Das Bildungsgesetz der rechten Seite ist invariantentheoretisch leicht zu beschreiben. Zunächst ist

$$(7)\qquad \frac{1}{T^3}\left((c_{22}P - 2c_{12}Q + c_{11}R)\,du + (c_{22}Q - 2c_{12}R + c_{11}S)\,dv\right) \equiv \mathfrak{M}$$

eine Kovariante von A, Γ und H, die nach S. 501(14) mit

$$H_a(\Gamma, \mathsf{H})$$

bezeichnet werden kann. Die durch T^6 dividierte rechte Seite von (6) ist dann durch die entsprechende Operation (S. 160(3)) aus A und $\mathfrak{M}^2$ gebildet. Mithin wird

$$(8)\qquad g_1^2 + g_2^2 = \frac{H_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}^2)}{(n_1 - n_2)^4}.$$

Nach (1) und (2) ist ferner

$$(9)\qquad -T^2(n_1-n_2)^4 g_1 g_2 = \left(-p_{12}\left(n_1\frac{\partial H}{\partial u} - \frac{\partial K}{\partial u}\right) + p_{11}\left(n_1\frac{\partial H}{\partial v} - \frac{\partial K}{\partial v}\right)\right)$$
$$\left(\quad p_{22}\left(\frac{\partial K}{\partial u} - n_2\frac{\partial H}{\partial u}\right) - p_{21}\left(\frac{\partial K}{\partial v} - n_2\frac{\partial H}{\partial v}\right)\right).$$

Für die beim Ordnen nach den Differentialquotienten von H und K auftretenden Verbindungen gelten folgende Gleichungen, die aus den in (3) enthaltenen unmittelbar hervorgehen:

$$(10)\qquad \begin{aligned} T\eta_{11} &= -n_2 p_{11}p_{22} + n_1 p_{12}p_{21} \\ T\eta_{12} &= (n_1 - n_2)p_{11}p_{21} \\ T\eta_{21} &= (n_2 - n_1)p_{12}p_{22} \\ T\eta_{22} &= -n_1 p_{11}p_{22} + n_2 p_{12}p_{21}, \end{aligned}$$

und demnach

$$(11)\qquad \begin{aligned} c_{11} &= (n_2 - n_1)p_{11}p_{21} \\ 2c_{12} &= (n_1 - n_2)(p_{11}p_{22} + p_{12}p_{21}) \\ c_{22} &= (n_2 - n_1)p_{12}p_{22}. \end{aligned}$$

Die Ausrechnung liefert, der Formel (5) entsprechend,

$$(12)\qquad T^2(n_1-n_2)^5 g_1 g_2 = K\left(c_{22}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^2 - 2c_{12}\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial v} + c_{11}\left(\frac{\partial H}{\partial v}\right)^2\right)$$
$$-HT\left(\left(\eta_{12}\frac{\partial K}{\partial u} + \eta_{22}\frac{\partial K}{\partial v}\right)\frac{\partial H}{\partial u} - \left(\eta_{11}\frac{\partial K}{\partial u} + \eta_{12}\frac{\partial K}{\partial v}\right)\frac{\partial H}{\partial v}\right)$$
$$+\left(c_{22}\left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)^2 - 2c_{12}\frac{\partial K}{\partial u}\frac{\partial K}{\partial v} + c_{11}\left(\frac{\partial K}{\partial v}\right)^2\right)$$
$$-2KT\left(\frac{\partial H}{\partial u}\frac{\partial K}{\partial v} - \frac{\partial K}{\partial u}\frac{\partial H}{\partial v}\right).$$

Führt man dagegen in (9) die Fundamentalgrößen dritter Ordnung ein, so erhält man

$$(13)\qquad -T^6(n_1-n_2)^5 g_1 g_2 = c_{22}(c_{22}P - 2c_{12}Q + c_{11}R)^2 \\ - 2c_{12}(c_{22}P - 2c_{12}Q + c_{11}R)(c_{22}Q - 2c_{12}R + c_{11}S) \\ + c_{11}(c_{22}Q - 2c_{12}R + c_{11}S)^2,$$

d. h.

$$(14)\qquad g_1 g_2 = -\frac{H_a(\Gamma, \mathfrak{M}^2)}{(n_1-n_2)^5}.$$

Nach (8) und (14) genügen also g_1^2 und g_2^2 der quadratischen Gleichung

$$(15)\qquad g^4 - \frac{H_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}^2)}{(H^2-4K)^2} g^2 + \frac{H_a^2(\Gamma, \mathfrak{M}^2)}{(H^2-4K)^5} = 0,$$

deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereich der Fundamentalgrößen erster bis dritter Ordnung oder, was dasselbe ist, der Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung und ihrer ersten Ableitungen angehören. Denn auch T, die Quadratwurzel aus der Determinante von A, durch deren Potenzen man beständig zu dividieren hat, um die auftretenden algebraischen Invarianten in die für die Flächentheorie allein brauchbaren absoluten Invarianten überzuführen, kommt in den Koeffizienten nur mit geraden Exponenten vor.

Auf die entsprechende Gleichung, von der die beiden übrigen Fundamentalinvarianten dritter Ordnung $\Theta_1 n_1$ und $\Theta_2 n_2$ abhängig gemacht werden können, soll hier nicht eingegangen werden.

§ 183.

Krümmung der Asymptotenkurven.

Neben der Normalkrümmung und der Tangentialkrümmung sind in der Theorie der Flächenkurven hauptsächlich die geodätische Windung und das Verhältnis des Winkels benachbarter Flächennormalen zum Bogenelement hervorgetreten. Solche geometrischen Größen kann man in unbegrenzter Anzahl bilden. Man braucht dazu nur irgendwelche gerade Linien oder Ebenen durch einen Flächenpunkt, sowie durch einen oder mehrere ihm auf einer gegebenen Kurve benachbarte zu legen, die dabei entstehenden Winkel und Abstände ins Auge zu fassen und, soweit sie unendlichklein sind, Größen von derselben Ordnung durch Division zu endlichen Werten zu verbinden. Dabei erscheinen teils dieselben Größen wieder, die man als anderweitig definiert bereits kennt, teils neue, die dann untereinander und mit jenen zusammenhängen. Der Niederschlag solcher Zusammenhänge sind Formeln und Sätze (vgl. z. B. S. 474), deren Bedeutung man sich im voraus klar machen kann, wenn man sich an das im XII. Abschnitt über die Anzahl unabhängiger Invarianten und Kovarianten Bewiesene erinnert. Dadurch schützt man sich vor einer falschen Schätzung des Unwesent-

lichen und entgeht namentlich der bei jeder Verallgemeinerung nahe liegenden Gefahr, exakte Begriffe, über deren grundlegende Bedeutung kein Zweifel ist, durch mißbräuchliche Anwendung feststehender Bezeichnungen zu verflachen.

Daß neben vielem Bedeutungslosen auch interessante Resultate herauskommen müssen, ist klar und soll hier an zwei Beispielen gezeigt werden, für eine unendlichkleine und eine endliche Größe.

Wie groß ist der Abstand eines Flächenpunktes von der Tangentialebene in einem beliebigen benachbarten Punkte? Dieser habe die kartesischen Koordinaten x, y, z, die krummlinigen Koordinaten u, v. Die Gleichung der Tangentialebene ist

$$\sum X(\mathfrak{x} - x) = 0.$$

Der Abstand des unendlichnahen Punktes von der Ebene ergibt sich, vom Vorzeichen abgesehen, dessen Bestimmung aus der analytischen Geometrie bekannt ist, durch Einführung von

$$\mathfrak{x} = x + dx + \frac{1}{2} d^2x + \cdots, \quad \cdots$$

in die linke Seite der Gleichung. Bei den unendlichkleinen Größen erster Ordnung

$$dx \equiv \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \ldots$$

kann man hier nicht stehen bleiben, weil infolge von

$$\sum X \frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \sum X \frac{\partial x}{\partial v} = 0$$

die Größen niedrigster Ordnung aus der Formel wegfallen. Der gesuchte Ausdruck wird im allgemeinen gleich

$$\frac{1}{2} \sum X d^2x \equiv \frac{1}{2} \mathsf{B}.$$

Die zweite Grundform B erhält auf diese Weise eine neue anschauliche Bedeutung.

Es soll zweitens die Krümmung einer Asymptotenlinie berechnet, d. h. durch die bereits vorgekommenen Fundamentalinvarianten, soweit man sie braucht, ausgedrückt werden. Die Lösung dieser Aufgabe muß sich von selbst mit herausstellen, wenn man die Asymptotenlinien als Grundkurven eines Paares geometrischer Differentiationen annimmt und einen Übergang zu den geometrischen Ableitungen längs der Krümmungslinien macht (§ 161—162). Was die Windung einer Asymptotenkurve angeht, so folgt für sie z. B. aus S. 197 (23) die sehr einfache Bestimmung $t^2 = -K$.

Wenn hier eine Formel für die Krümmung ohne Zusammenhang mit anderen Sätzen entwickelt werden soll, so kann man sich des speziellen Koordinatensystems von S. 83 bedienen (vgl. S. 87). Es sei also der betrachtete Punkt Anfangspunkt der Koordinaten; die (xy)-Ebene falle mit der Tangentialebene, die x- und y-Achse mit den beiden Haupttangenten zusammen. Da für den Anfangspunkt O

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

ist, so lautet die Flächengleichung in der Nähe dieses Punktes

$$(1) \qquad z = \frac{1}{2}(a_1 x^2 + a_2 y^2) + \frac{1}{6}(b_1 x^3 + 3 b_2 x^2 y + 3 b_3 x y^2 + b_4 y^3) + \cdots.$$

$a_1, a_2, b_1, \ldots$ sind die Werte von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}, \ldots$ für den Punkt O. Da höhere als zweite Ableitungen vorkommen, so sollen schon die der ersten und zweiten Ordnung durch Indizes gekennzeichnet werden. Die Differentiation von (1) ergibt

$$(2) \qquad \begin{aligned} z_{10} &= a_1 x + \frac{1}{2}(b_1 x^2 + 2 b_2 x y + b_3 y^2) + \cdots \\ z_{01} &= a_2 y + \frac{1}{2}(b_2 x^2 + 2 b_3 x y + b_4 y^2) + \cdots \end{aligned}$$

$$(3) \qquad \begin{aligned} z_{20} &= a_1 + b_1 x + b_2 y + \cdots \\ z_{11} &= b_2 x + b_3 y + \cdots \\ z_{02} &= a_2 + b_3 x + b_4 y + \cdots. \end{aligned}$$

Aus der quadratischen Gleichung der Hauptkrümmungen findet man dann

$$(4) \qquad \begin{aligned} n_1 &= a_1 + b_1 x + b_2 y + \cdots \\ n_2 &= a_2 + b_3 x + b_4 y + \cdots. \end{aligned}$$

Diese Entwickelungen geben nicht nur

$$a_1 = (n_1)_0, \qquad a_2 = (n_2)_0$$

(S. 84) wieder, sondern auch

$$(5) \quad b_1 = \left(\frac{\partial n_1}{\partial x}\right)_0, \quad b_2 = \left(\frac{\partial n_1}{\partial y}\right)_0, \quad b_3 = \left(\frac{\partial n_2}{\partial x}\right)_0, \quad b_4 = \left(\frac{\partial n_2}{\partial y}\right)_0.$$

Die Asymptotenkurven sind durch die Differentialgleichung

$$(6) \qquad z_{20} + 2 z_{11} \frac{dy}{dx} + z_{02} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

bestimmt. Beim Fortgange längs einer solchen Kurve wird

$$(7) \quad z_{30} + 3 z_{21} \frac{dy}{dx} + 3 z_{12} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + z_{03} \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 2\left(z_{11} + z_{02} \frac{dy}{dx}\right) \frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

Für den Punkt 0 selbst ist

$$(8) \qquad \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \varepsilon \sqrt{-\frac{a_1}{a_2}}$$

$$(9) \qquad \frac{a_2 b_1 - 3 a_1 b_3}{a_2} + \varepsilon \sqrt{-\frac{a_1}{a_2}} \left(\frac{3 a_2 b_2 - a_1 b_4}{a_2} + 2 a_2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0\right) = 0,$$

wo $\varepsilon = +1$ und $\varepsilon = -1$ den beiden verschiedenen Wendetangenten zugehören. Da das Krümmungsmaß negativ, also hier $a_1 a_2 < 0$ sein muß, so sei

$$a_1 > 0, \qquad a_2 < 0.$$

Wegen $n = 0$ ist die Krümmung einer Asymptotenlinie gleich dem absoluten Betrage ihrer Tangentialkrümmung. Bildet man deren Ausdruck aus S. 127 (6), so sieht man, daß für $x = 0$, $y = 0$ eine große Anzahl von Gliedern verschwindet, und daß schließlich

$$\frac{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

übrig bleibt; ein Resultat, das auch aus § 42 hätte geschlossen werden können. Der Ausdruck wird

$$\frac{(a_1 b_4 - 3 a_2 b_2)\sqrt{a_1} - \varepsilon (a_2 b_1 - 3 a_1 b_3)\sqrt{-a_2}}{2(a_1 - a_2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{-a_1 a_2}}.$$

Die hiermit zu verbindenden Werte (5) lassen sich übersichtlicher darstellen, wenn man beachtet, daß die von O ausgehenden Bogenelemente der Krümmungslinien gleich $\pm\, dx$ und $\pm\, dy$ sind, und daß man demnach statt

$$b_1\,, \qquad b_2\,, \qquad b_3\,, \qquad b_4$$

die Größen (unter Weglassung des Index 0)

$$\Theta_1 n_1, \qquad \Theta_2 n_1, \qquad \Theta_1 n_2, \qquad \Theta_2 n_2$$

verwenden kann. Wird dann, nach einer einfachen Umformung,

$$(10) \qquad \frac{\frac{n_1^2}{n_2^2}\,\Theta_1\left(\frac{-n_2^3}{n_1}\right)\sqrt{-n_2} - \varepsilon\,\frac{n_2^2}{n_1^2}\,\Theta_2\left(\frac{n_1^3}{-n_2}\right)\sqrt{n_1}}{2(n_1 - n_2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{-n_1 n_2}} = \gamma$$

gesetzt, so sind die beiden in dieser Formel für $\varepsilon = \pm 1$ vereinigten Ausdrücke γ_1 und γ_2 dem absoluten Betrage nach gleich den Krümmungen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ der Asymptotenkurven.

Die unter den Zeichen Θ_1 und Θ_2 vorkommenden Größen mögen abgekürzt bezeichnet werden:

(11) $$-\frac{n_2^3}{n_1} = H_1, \qquad -\frac{n_1^3}{n_2} = H_2,$$

sodaß

$$H_1 H_2^3 = n_1^8, \qquad H_1^3 H_2 = n_2^8$$

$$n_1 = (H_1 H_2^3)^{\frac{1}{8}}, \qquad n_2 = -(H_1^3 H_2)^{\frac{1}{8}}$$

ist. Dann liefert die Formel (10)

$$\gamma = \frac{\left(\frac{H_2}{H_1}\right)^{\frac{1}{4}} (H_1^3 H_2)^{\frac{1}{16}} \Theta_1 H_1 - \varepsilon \left(\frac{H_1}{H_2}\right)^{\frac{1}{4}} (H_1 H_2^3)^{\frac{1}{16}} \Theta_2 H_2}{2(\varrho_1 - \varrho_2)^{\frac{3}{2}} H_1 H_2},$$

oder wenn H_1 und H_2 wieder weggeschafft und statt ihrer überall die Hauptkrümmungsradien eingeführt werden:

(12) $$\gamma = \frac{4(-\varrho_1 \varrho_2)^{\frac{7}{8}}}{(\varrho_1 - \varrho_2)^{\frac{3}{2}}} \left(\Theta_1 \left(\frac{\varrho_1}{-\varrho_2^3}\right)^{\frac{1}{8}} - \varepsilon \Theta_2 \left(\frac{-\varrho_2}{\varrho_1^3}\right)^{\frac{1}{8}}\right).$$

Diese Formel rührt von Bonnet her.

Behält man H_1 und H_2 bei, so hat man

(13) $$\gamma = \frac{4(H_1 H_2)^{\frac{1}{8}}}{(H_1^{\frac{1}{4}} + H_2^{\frac{1}{4}})^{\frac{3}{2}}} \left(\Theta_1 H_1^{\frac{1}{8}} - \varepsilon \Theta_2 H_2^{\frac{1}{8}}\right).$$

Die Krümmungen der Asymptotenkurven hängen also nur von zwei Größen dritter Ordnung, $\Theta_i H_i^{\frac{1}{8}}$, und einer Verbindung aus Größen zweiter Ordnung ab.

§ 184.

Einige spezielle Kurvennetze.

Unter den unendlichvielen Scharen und Netzen von Kurven, die man auf einer Fläche annehmen kann, sind nur solche wichtig, die eine vom Parametersystem unabhängige Bedeutung haben. Wenn man sich also bei irgendeiner flächentheoretischen Aufgabe veranlaßt sieht, behufs rechnerischer Vereinfachung die Parameter und damit auch die Fundamentalgrößen zu spezialisieren, so muß man sich doch jedesmal fragen, ob eine solche besondere Annahme einen mehr als bloß formalen Wert hat. Das Kennzeichen dafür ist, daß die Relationen zwischen den Fundamentalgrößen bei der Darstellung des Netzes in der allgemeinen Form

$$\varphi(u, v) = \text{const.}, \qquad \psi(u, v) = \text{const.}$$

in Beziehungen zwischen Kurveninvarianten untereinander oder zu Punktinvarianten übergehen. So waren z. B. die Gleichungen

(1) $$E' = G', \qquad F' = 0$$

oder allgemeiner

$$\frac{\partial^2 \log \frac{E'}{G'}}{\partial u' \partial v'} = 0, \qquad F' = 0,$$

die Bedingungen für ein isometrisches Koordinatensystem, gleichbedeutend mit

(2) $$\Theta g - \Theta' g' = 0$$

(3) $$\Delta(\varphi, \psi) = 0,$$

wo g und g' etwa als Funktionen der Ableitungen von φ zu denken sind. Die Gleichung (2) ist dann eine Differentialgleichung für solche Kurven, die mit ihren orthogonalen Trajektorien zusammen geeignet sind, die Fläche in unendlichkleine Quadrate zu zerlegen, und (3) die Bestimmungsgleichung für diese Orthogonalschar. Jedenfalls wird das Kurvennetz durch das Verschwinden zweier bestimmten Biegungskovarianten charakterisiert.

Die Annahmen

(4) $$F' = 0, \qquad M' = 0$$

(Krümmungslinien) und, für negativ gekrümmte Flächen,

(5) $$L' = 0, \qquad N' = 0$$

(Asymptotenlinien) sind in bestimmter Hinsicht einfacher. Die beiden Funktionen φ und ψ genügen nämlich je einer und derselben partiellen Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades. Oder auch, die beiden Kurvennetze sind durch die gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung zweiten Grades

$$\mathsf{\Gamma} = 0, \qquad \mathsf{B} = 0$$

bestimmt.

Um ein weiteres Beispiel anzugeben, so werde die Bedingung

(6) $$\frac{L'}{E'} = \frac{N'}{G'}$$

angenommen und mit

(7) $$F' = 0$$

zusammengestellt. Das Kurvennetz ist dann orthogonal, und die Normalkrümmungen n und n' der beiden Bestandteile einander gleich. Für $F' = 0$ folgt aus dem allgemeinen Ausdruck von H

$$H = \frac{L'}{E'} + \frac{N'}{G'}.$$

Setzt man dementsprechend

(8) $$n = \frac{1}{2} H \equiv \frac{1}{2}(n_1 + n_2),$$

so wird n' ebenfalls diesem Werte gleich. Wegen $n = \frac{\mathsf{B}}{\mathsf{A}}$ ist das Netz allgemein durch die Differentialgleichung

$$H\mathsf{A} - 2\mathsf{B} = 0 \tag{9}$$

gekennzeichnet. Mittels der Gleichung S. 470 (16) findet man, daß es aus den Winkelhalbierenden der Krümmungslinien besteht. Auch könnte dieses Resultat wieder einmal aus der Theorie des Dupinschen Kegelschnitts entnommen werden.

Behält man die Bedingung (6) bei, fügt aber

$$M' = 0 \tag{10}$$

hinzu, so sind auch jetzt die Normalkrümmungen der beiden Koordinatenlinien in jedem ihrer Schnittpunkte einander gleich, aber die Kurven einander konjugiert. Aus

$$L' = E'n, \qquad N' = G'n$$

und den Ausdrücken von H und K folgt

$$2E'G'n = T'^2 H, \qquad E'G'n^2 = T'^2 K,$$

$$n = 2\frac{K}{H} \tag{11}$$

oder

$$\varrho = \frac{1}{2}(\varrho_1 + \varrho_2). \tag{12}$$

Für ein solches Kurvennetz gilt die Differentialgleichung

$$2K\mathsf{A} - H\mathsf{B} = 0. \tag{13}$$

Die Determinante der quadratischen Differentialform $2K\mathsf{A} - H\mathsf{B}$ ist gleich $-T^2K(H^2 - 4K)$, also nur für $K > 0$ negativ; das betrachtete Kurvennetz existiert also bloß auf positiv gekrümmten Flächen. Die Krümmungslinien halbieren die Winkel des Netzes. Dieses entspricht in bestimmtem Sinne den Asymptotenlinien auf Flächen negativen Krümmungsmaßes.

Drittens sei mit (6) gleichzeitig

$$\mathfrak{F}' = 0. \tag{14}$$

Die sphärischen Bilder der Kurven, deren Normalkrümmungen einander gleich sein sollen, sind aufeinander senkrecht. Die Elimination der Fundamentalgrößen aus den beiden Bedingungen in Verbindung mit n, H und K ergibt

$$n = \frac{(n_1 + n_2)n_1 n_2}{n_1^2 + n_2^2} \tag{15}$$

oder

$$\varrho = \frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}{\varrho_1 + \varrho_2}, \tag{16}$$

sodaß die Differentialgleichung des Netzes

$$(17) \qquad HK\mathsf{A} - (H^2 - 2K)\mathsf{B} = 0$$

lautet.

Sobald eine solche Relation wie (2), (8), (12) oder (15) einmal gefunden ist, kann man das Kurvennetz vermöge des Zusammenhanges zwischen den verschiedenen Kurveninvarianten gleicher Ordnung noch auf mannigfache andere Arten kennzeichnen. Dies führt zu einer großen Anzahl von Sätzen, namentlich wenn auch die Fläche spezialisiert wird. Für die drei letzten Annahmen, wo nur Kurveninvarianten erster Ordnung vorkommen, könnte man z. B. die geodätische Windung statt der Normalkrümmung einführen. Die Hauptsache aber ist, daß diese Netze, die Krümmungslinien eingeschlossen, einer Differentialgleichung der allgemeinen Form

$$a\mathsf{A} + b\mathsf{B} + c\Gamma = 0$$

genügen, wo a, b, c Konstanten oder Funktionen der beiden Fundamentalinvarianten zweiter Ordnung sind.

§ 185.

Kennzeichen der auf Umdrehungsflächen abwickelbaren Flächen.

Verschiedene Untersuchungen, z. B. die im § 114, haben zu Flächen geführt, die auf Umdrehungsflächen abwickelbar sind. Ein solches Ergebnis gibt zu zwei allgemeinen Aufgaben Veranlassung (§ 38). Die eine von ihnen fordert, x, y, z auf die allgemeinste Weise so zu bestimmen, daß bei gegebener Funktion f die Gleichung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1 + f'(u)^2)\,du^2 + u^2 dv^2$$

stattfindet (S. 102 (11)). Daß freilich ihre Lösung geeignet sein würde, die Einsicht in die Eigenschaften der jeweilig betrachteten Flächen zu vertiefen, ist nicht zu erwarten. Man braucht nur einen Blick auf die komplizierten Formeln zu werfen, die in den wenigen Fällen gelten, für die die Lösung der Aufgabe bekannt ist; vgl. z. B. § 140—141.

Bei der anderen Grundaufgabe handelt es sich in erster Linie um die Entscheidung darüber, ob eine gegebene Fläche überhaupt auf eine Rotationsfläche abwickelbar ist oder nicht. Die kartesischen Koordinaten treten in den Hintergrund. Die Frage ist, wie die Koeffizienten E, F, G einer quadratischen Differentialform A beschaffen sein müssen, damit A auf die Form

$$(1 + f'(r)^2)\,dr^2 + r^2 dv^2$$

oder auch

$$du'^2 + U'dv'^2$$

gebracht werden kann. Es soll also, wenn man

$$Edu^2 + 2F\,du\,dv + Gdv^2 = E'du'^2 + 2F'du'dv' + G'dv'^2$$

setzt, bei passender Wahl der Variablen u', v'

$$(1) \qquad E' = 1, \qquad F' = 0, \qquad G' = U'$$

gemacht werden können, wobei es auf den Ausdruck von U' als Funktion von u' nicht ankommt, sondern eben nur darauf, daß v' nicht in ihm enthalten ist. Um diese Bedingungen von der Parameterdarstellung zu befreien, wird man sie mit den Formeln für Kovarianten, und zwar hier offenbar für Biegungskovarianten, zusammenstellen. Dies ist auf unendlichviele Weisen möglich; aber man weiß wenigstens, daß es für jede Ordnung ausreicht, eine endliche bestimmte Anzahl von Größen in Betracht zu ziehen.

Spezielle Werte von Biegungskovarianten erster Ordnung erhält man sofort aus den Gleichungen der Koordinatentransformation. Für $u' = \varphi(u, v)$, $v' = \psi(u, v)$ wird nach S. 42 (20)

$$(2) \qquad \Delta^1\varphi = 1, \qquad \Delta(\varphi, \psi) = 0, \qquad \Delta^1\psi = \frac{1}{\Phi}.$$

Da die Funktion $\Phi \equiv U'$ nicht gegeben sein sollte, so ist die letzte Gleichung durch

$$\frac{\partial(\Delta^1\psi, \varphi)}{\partial(u, v)} = 0$$

zu ersetzen. Nach Division mit T, also in der Form

$$(3) \qquad D(\Delta^1\psi, \varphi) = 0,$$

kennzeichnet sie das Verschwinden einer Biegungskovariante von φ und ψ, die inbezug auf ψ von der zweiten Ordnung ist. Da (3) auf die dritte Gleichung (2), die drei Gleichungen (2) zusammen auf (1) und diese wieder auf

$$(4) \qquad ds^2 = du'^2 + U'dv'^2$$

zurückführen, so kann die Frage so ausgesprochen werden: Unter welchen Bedingungen (für E, F, G) gibt es zwei Funktionen φ und ψ, die folgende Gleichungen befriedigen:

$$(5) \qquad \Delta^1\varphi = 1, \qquad \Delta(\varphi, \psi) = 0, \qquad D(\Delta^1\psi, \varphi) = 0.$$

Da eine Biegungskovariante zweiter Ordnung notwendig auftritt, so mögen weiter diejenigen Kovarianten dieser Ordnung berechnet werden, die sich immer als besonders wichtig erwiesen haben, g und g'. Für $F' = 0$ ist (vgl. S. 140 (11, 12))

(6) $$g_{u'} = -\frac{1}{\sqrt{E'G'}}\frac{\partial\sqrt{G'}}{\partial u'}, \qquad g'_{u'} = \frac{1}{\sqrt{E'G'}}\frac{\partial\sqrt{E'}}{\partial v'},$$

also in Folge der ersten und dritten Gleichung (1)

$$g_{u'} = U_1', \qquad g'_{u'} = 0,$$

d. h.

(7) $$D(g_\varphi, \varphi) = 0, \qquad g'_\varphi = 0.$$

Auch diese Gleichungen führen auf (4) zurück. Dann für $\varphi = u'$ und unter Voraussetzung der Orthogonalität des Kurvennetzes liefert die zweite E' als Funktion von u' allein, für die ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Konstante 1 gesetzt werden kann, und nach der ersten wird dann G' ebenfalls nur von u' abhängig.

Die beiden Bedingungen (7) haben vor (5) das voraus, daß sie nur eine einzige Funktion φ enthalten. Es würde also jetzt darauf ankommen, die Ableitungen von φ aus diesen Gleichungen und ihren Derivierten bis zu einer bestimmten Ordnung hin zu eliminieren und dabei überall so bald wie möglich die Differentialquotienten der Fundamentalgrößen erster Ordnung zu Biegungsinvarianten zusammenzufassen. Die einfachste von diesen ist das Gaußsche Krümmungsmaß (§ 164). Unendlichviele andere findet man dadurch, daß man K als Argument irgendwelcher Biegungskovarianten betrachtet. Man kennt auch die Abhängigkeitsverhältnisse dieser Biegungsinvarianten untereinander (§ 167). Aber trotzdem ist es natürlich nicht gleichgültig, auf welche Invarianten man bei einer bestimmten Aufgabe ausgeht, vielmehr wird eine planmäßige Untersuchung diese Größen mit liefern. Die ganze Rechnung, in gewöhnlichen Ableitungen unübersehbar, vereinfacht sich ungemein bei Benutzung geometrischer Differentiationen.

Zu den Gleichungen (7), nämlich bei Weglassung des Index φ

(8) $$\Theta g = 0, \qquad g' = 0,$$

tritt die erste Fundamentalgleichung, also hier

(9) $$\Theta' g - g^2 = K,$$

und die Vertauschungsformel für g, hier

$$\Theta'\Theta g - \Theta\Theta' g = g\Theta g.$$

Mit ihr zusammen geben die ersten Derivierten der ersten Gleichung (8) und der Gleichung (9),

$$\Theta\Theta g = 0, \qquad \Theta'\Theta g = 0$$

und

$$\Theta\Theta' g - 2g\Theta g = \Theta K, \qquad \Theta'\Theta' g - 2g\Theta' g = \Theta' K,$$

fünf Gleichungen zwischen den vier geometrischen Ableitungen zweiter Ordnung. Ihre Elimination bringt zugleich Θg zum Wegfall und läßt nur

$$(10) \qquad \Theta K = 0$$
$$K = f(\varphi)$$

übrig. Das heißt: die vorher unbekannten Kurven $\varphi =$ const. sind mit den Kurven konstanten Krümmungsmaßes identisch. Die beiden Ausgangsgleichungen gehen hiernach in

$$(11) \qquad \mathsf{K} g_K = 0, \qquad g'_K = 0$$

über, wo K die geometrische Differentiation längs der Kurve $K =$ const. kennzeichnet. Die linken Seiten der beiden Bedingungen sind nunmehr Biegungsinvarianten geworden.

Freilich verliert dieses Resultat jede Bedeutung, wenn das Krümmungsmaß längs der ganzen Fläche konstant ist, von Kurven konstanten Krümmungsmaßes also nicht die Rede sein kann. Dann werden auch alle abgeleiteten Biegungsinvarianten konstant, nämlich identisch Null. Aber nach S. 413 ist bekannt, daß jede Fläche von konstantem Krümmungsmaß auf eine Umdrehungsfläche abwickelbar ist.

Daß nach Ausscheidung dieses besonderen Falles die beiden notwendigen Bedingungen (11) auch hinreichend sind, ergibt sich in genau derselben Weise wie vorher. Demnach läßt sich die gestellte Frage durch eine endliche Anzahl wohldefinierter Operationen, bei denen allein die Differentiation verwendet wird, beantworten.

Berechnet man von vornherein für die Annahmen (1) die Größe K und zwei im allgemeinen Falle voneinander unabhängige Biegungsinvarianten, z. B. $\Delta^1 K$ und $\Delta^2 K$, so findet man direkt, daß diese von K abhängig sein müssen. Aber dieses Vorgehen ist bei ähnlichen Untersuchungen, z. B. für die Kennzeichnung eines Liouvilleschen oder Bonnetschen Linienelements (S. 291 und 330), der Komplikation der Formeln wegen praktisch nicht anwendbar. Übrigens ist für diese Fälle auch der Schluß von der an die Stelle von (10) tretenden Gleichung auf die Endbedingungen nicht so einfach wie hier. Die Ausgangsgleichungen (8) werden für die Liouvilleschen Flächen durch

$$\Theta g = \Theta' g' = 3 g g',$$

für die Bonnetschen durch

$$\Theta g = \Theta' g' = 0$$

vertreten. Nachdem man wie eben die geometrischen Ableitungen von g und g' eliminiert hat, muß man, um zu Invariantengleichungen zu kommen, von den Operationen Θ und Θ' einen Übergang zu K und K'

machen. Dazu dienen nach passender Vertauschung von Bezeichnungen die Formeln § 181 (15), (12) und (14). Sie reichen sicher aus. Denn nicht nur $\mathsf{K}\chi$ ist bekannt, weil K aus dem allgemeinen Ausdruck des Linienelements durch Differentiationen hergeleitet werden kann, sondern auch die in $\mathsf{K}'\chi$ enthaltenen Koeffizienten dürfen als bekannt gelten. Die zur wirklichen Bestimmung der orthogonalen Trajektorien erforderliche Integration ist für $\mathsf{K}'\chi$ entbehrlich.

§ 186.

Die Christoffelsche Aufgabe.

Von Christoffel ist die Frage aufgeworfen und beantwortet worden, wann zwei Flächen durch parallele Normalen konform aufeinander abgebildet werden können. Die Gleichungen des Problems sind für unmittelbar ersichtliche Voraussetzungen und bei sofort verständlicher Bezeichnung:

(1) $$\bar{X} = X, \qquad \bar{Y} = Y, \qquad \bar{Z} = Z$$

(2) $$\bar{E} = m^2 E, \qquad \bar{F} = m^2 F, \qquad \bar{G} = m^2 G,$$

wo m eine Funktion von u und v bedeutet. Aus (2) folgt

(3) $$\bar{T} = m^2 T$$

und aus (1)

(4) $$\bar{\mathfrak{E}} = \mathfrak{E}, \qquad \bar{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}, \qquad \bar{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}$$

(5) $$d\bar{\sigma}^2 = d\sigma^2.$$

Durch Spezialisierung der Parameter mittels der Annahmen $F = 0$, $\mathfrak{F} = 0$ kann man aus (2) und (4) ablesen, daß die Krümmungslinien der beiden Flächen einander entsprechen müssen. Aber eine bessere Einsicht gewinnt man, wenn man Γ selbst, die linke Seite der Differentialgleichung der Krümmungslinien, transformiert. Ihr Ausdruck ist

$$\frac{1}{T}\begin{vmatrix} Edu + Fdv, & Fdu + Gdv \\ Ldu + Mdv, & Mdu + Ndv \end{vmatrix} = \frac{1}{4T}\frac{\partial(\mathsf{A}, \mathsf{B})}{\partial(\xi, \eta)}.$$

Werden darin nach den Formeln

$$L = \frac{1}{H}(\mathfrak{E} + KE), \ldots \quad .$$

(S. 226 (25)) die Fundamentalgrößen der Einheitskugel statt der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung der Fläche eingeführt, wobei $H = 0$ ausgeschlossen ist, so ergibt sich

$$\Gamma = \frac{1}{HT}\begin{vmatrix} Edu + Fdv, & Fdu + Gdv \\ \mathfrak{E}du + \mathfrak{F}dv, & \mathfrak{F}du + \mathfrak{G}dv \end{vmatrix} = \frac{1}{4HT}\frac{\partial(\mathsf{A}, \mathsf{E})}{\partial(\xi, \eta)}.$$

Entsprechend ist für die zweite Fläche

$$\bar{\Gamma} = \frac{1}{\bar{H}\bar{T}} \begin{vmatrix} \bar{E}du + \bar{F}dv, & \bar{F}du + \bar{G}dv \\ \bar{\mathfrak{E}}du + \bar{\mathfrak{F}}dv, & \bar{\mathfrak{F}}du + \bar{\mathfrak{G}}dv \end{vmatrix}$$

oder nach (2), (3) und (4)

$$\bar{\Gamma} = \frac{1}{\bar{H}m^2T} \begin{vmatrix} m^2(Edu + Fdv), & m^2(Fdu + Gdv) \\ \mathfrak{E}du + \mathfrak{F}dv, & \mathfrak{F}du + \mathfrak{G}dv \end{vmatrix},$$

d. h.

(6) $$\bar{H}\bar{\Gamma} = H\Gamma.$$

Ist also keine der beiden Flächen eine Minimalfläche, so folgt aus $\Gamma = 0$ auch $\bar{\Gamma} = 0$, womit die Behauptung bewiesen ist.

Der eben ausgeschlossene Fall ist leicht zu erledigen. Für eine Minimalfläche konnte das Linienelement durch S. 440 (11) dargestellt werden, wo s_0 durch S. 439 (5) bestimmt und s_1 zu s_0 konjugiert ist. Gelten nun für zwei verschiedene Flächen die Gleichungen (1), so haben s_0 und s_1 für entsprechende Punkte dieselben Werte. Die beiden Formeln für ds und $d\bar{s}$ unterscheiden sich nur durch den Ausdruck des Produktes $\mathfrak{F}_0(s_0)\mathfrak{F}_1(s_1)$, und es muß daher $d\bar{s}^2 = m^2 ds^2$ sein. Irgend zwei Minimalflächen werden durch parallele Normalen konform aufeinander abgebildet.

Um in der allgemeinen Untersuchung fortzufahren, so ist

$$d\sigma^2 = n_1^2\mathfrak{P}_1^2 + n_2^2\mathfrak{P}_2^2$$
$$d\bar{\sigma}^2 = \bar{n}_1^2\bar{\mathfrak{P}}_1^2 + \bar{n}_2^2\bar{\mathfrak{P}}_2^2.$$

Läßt man nun die Krümmungslinien $\bar{\mathfrak{P}}_2 = 0$ der zweiten den Krümmungslinien $\mathfrak{P}_2 = 0$ der ersten Fläche entsprechen, so erhält man aus (5)

$$\bar{n}_1^2\bar{\mathfrak{P}}_1^2 = n_1^2\mathfrak{P}_1^2.$$

$\mathfrak{P}_1$ und $\bar{\mathfrak{P}}_1$ sind, vom Vorzeichen abgesehen, die Bogenelemente der betrachteten Kurven, also muß

$$\bar{\mathfrak{P}}_1^2 = m^2\mathfrak{P}_1^2$$

und weiter

(7) $$\bar{n}_1^2 m^2 = n_1^2,$$

ebenso

(8) $$\bar{n}_2^2 m^2 = n_2^2$$

sein, woraus entweder

(9) $$\frac{\bar{n}_1}{n_1} = \frac{\bar{n}_2}{n_2}$$

oder

(10) $$\frac{\bar{n}_1}{n_1} + \frac{\bar{n}_2}{n_2} = 0$$

folgt.

Will man prüfen, ob diese Zusammenhänge zwischen beiden Flächen besondere Eigenschaften der einzelnen Flächen nach sich ziehen, so hat man n_1, n_2 oder $\bar{n}_1, \bar{n}_2$ zu eliminieren. Wegen der Rolle, die die Krümmungslinien hier spielen, wird man dazu die Fundamentalgleichungen in der Form zu benutzen suchen, wo diese Linien die Grundkurven der geometrischen Differentiationen sind:

$$(11) \qquad \Theta_2 n_1 = (n_1 - n_2) g_1, \qquad \Theta_1 n_2 = (n_2 - n_1) g_2$$

$$(12) \qquad \bar{\Theta}_2 \bar{n}_1 = (\bar{n}_1 - \bar{n}_2) \bar{g}_1, \qquad \bar{\Theta}_1 \bar{n}_2 = (\bar{n}_2 - \bar{n}_1) \bar{g}_2.$$

Allerdings treten darin noch die beiden Größenpaare g_1, g_2; $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ auf, doch kann man auch von diesen eines entfernen.

Als Ausgangspunkt diene die allgemeine Formel

$$g_\varphi = -\frac{1}{T}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{G\frac{\partial\varphi}{\partial u} - F\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{E\frac{\partial\varphi}{\partial v} - F\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{G\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 - 2F\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + E\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2}}\right),$$

(S. 325 (8)). Die geodätische Krümmung $\bar{g}_\varphi$ der entsprechenden Kurve auf der zweiten Fläche geht hieraus durch Einführung von $m^2 E, \ldots$ an Stelle von $E, \ldots$ hervor. Da m nur im Quadrat vorkommt, so darf man diese Größe selbst mit einem beliebigen Vorzeichen versehen, etwa $m > 0$ annehmen. Eine bekannte Umformung liefert dann

$$(13) \qquad \bar{g}_\varphi = \frac{1}{m}\left(g_\varphi - \frac{\Delta(\varphi, \log m)}{\sqrt{\Delta^1 \varphi}}\right).$$

Der zweite Bestandteil der Klammergröße ist, vom Vorzeichen abgesehen, die geometrische Ableitung von $\log m$ längs der orthogonalen Trajektorie der Kurve $\varphi = \text{const.}$, also gleich $\Theta' \log m$ (S. 176 (8)).

Die Anwendung auf die Krümmungslinien ergibt

$$(14) \qquad \begin{aligned} \bar{g}_1 &= \frac{1}{m}(g_1 - \Theta_2 \log m) \\ \bar{g}_2 &= \frac{1}{m}(g_2 - \Theta_1 \log m). \end{aligned}$$

Nur kann es nach den Zeichenbestimmungen, sowohl bei der Tangentialkrümmung wie bei den geometrischen Ableitungen, ohne nähere Untersuchung zweifelhaft erscheinen, ob die Vorzeichen richtig angesetzt sind. Aber der Übergang zu den Hauptparametern bestätigt dies.

Nimmt man noch die aus der geometrischen Bedeutung von $\Theta_1\chi$ und $\Theta_2\chi$ unmittelbar folgenden Beziehungen

$$(15) \qquad \bar{\Theta}_1\chi = \frac{1}{m}\Theta_1\chi, \qquad \bar{\Theta}_2\chi = \frac{1}{m}\Theta_2\chi$$

hinzu, so hat man bei Benutzung von (11) und (12) zuerst, der Annahme (9) entsprechend,

$$n_1 = \varepsilon m \bar{n}_1, \qquad n_2 = \varepsilon m \bar{n}_2$$

zu setzen. Dies liefert

$$\Theta_2 \log m = 0, \qquad \Theta_1 \log m = 0,$$

also m gleich einer Konstanten.

Mittels der Ausgangsgleichungen (1) und der Formeln von Rodrigues erhält man nur Flächen, die zu der ersten homothetisch sind.

Ein neues Resultat dagegen folgt aus der Voraussetzung

$$n_1 = \varepsilon m \bar{n}_1, \qquad n_2 = -\varepsilon m \bar{n}_2,$$

die auf (10) geführt hat. Es wird nämlich

$$2g_1 = \Theta_2 \log m, \qquad 2g_2 = \Theta_1 \log m,$$

mithin nach Elimination von m mit Hilfe der Vertauschungsformel:

$$(16) \qquad \Theta_1 g_1 - \Theta_2 g_2 = 0.$$

Nach § 73 müssen also die Krümmungslinien ein isometrisches Kurvennetz bilden. Es soll nicht untersucht werden, ob die Schlüsse, die zu (16) geführt haben, sich rückwärts durchlaufen lassen, mit dem Ergebnis, daß einer Fläche dieser Art in Verbindung mit einer anderen die an die Spitze gestellte Eigenschaft wirklich zukommt. Vom allgemeinen Standpunkt der geometrischen Invariantentheorie ist wichtig, daß die Gleichung (16) eine Familie von Flächen durch das Verschwinden einer Fundamentalinvariante vierter Ordnung kennzeichnet. Zu diesen Flächen gehören u. a. das Ellipsoid (S. 245 (23)) und die beiden Hyperboloide; die Paraboloide (S. 248 (15)); die Umdrehungsflächen (S. 103 (16)) und die Minimalflächen (S. 440 (14)).

§ 187.

Die partielle Differentialgleichung der Flächen mit isometrischen Krümmungslinien.

Werden die Ausdrücke von g_1 und g_2 in die Formeln für $\Theta_1\chi$ und $\Theta_2\chi$ eingesetzt, so liefert die Gleichung (16) eine partielle Differentialgleichung vierter Ordnung zwischen den kartesischen Koordi-

naten, durch die man sich etwa z als Funktion von x und y definiert denken kann. Aber ebenso wie im § 182 bietet sich die Aufgabe dar, die vorkommenden Irrationalitäten wegzuschaffen; ohne dies würde die Gleichung für jede weitere Untersuchung unbrauchbar sein. In jenem Paragraphen, wie auch bei anderen Gelegenheiten, ist der Nutzen von Ausdrücken hervorgetreten, die mittels des Operationszeichens H_a gebildet sind. Die Differentialparameter selbst gehören dazu (S. 163 (10, 11), S. 320 (15)). Hier, wo es sich einzig und allein um die Krümmungslinien handelt, sind solche Kovarianten zu bevorzugen, denen die Form Γ zugrunde liegt, also z. B. die Größen

$$(1)\qquad \Delta_c(\varphi, \psi) \equiv \frac{1}{c}\left(c_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial u} - c_{12}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v} + \frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right) + c_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)$$

und

$$(2)\qquad \Delta_c^2\varphi \equiv \frac{1}{\sqrt{c}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\,\frac{c_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial u} - c_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{c}} + \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{c_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - c_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{c}}\right);$$

die nur scheinbar vorkommende Quadratwurzel aus der negativen Größe

$$(3)\qquad c \equiv c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = -\frac{1}{4}T^2(n_1 - n_2)^2$$

möge gleich $i\sqrt{-c}$ sein.

Ohne eine systematische Theorie der Differentialparameter zu entwickeln, die mit A, B und Γ, sowie mit E zusammenhängen, kann man in jedem Falle den allgemeinen Ausdruck eines Differentialparameters durch geometrische Ableitungen mittels Durchganges durch die Hauptparameter leicht ermitteln. So findet man

$$(4)\qquad -\frac{1}{2}(n_1 - n_2)\,\Delta_c(\varphi, \psi) = \Theta_1\varphi\,\Theta_2\psi + \Theta_2\varphi\,\Theta_1\psi$$

$$(5)\qquad -\frac{1}{2}(n_1 - n_2)\,\Delta_c^2\varphi = \Theta_2\Theta_1\varphi + \Theta_1\Theta_2\varphi - g_1\Theta_1\varphi - g_2\Theta_2\varphi.$$

Die beiden geometrischen Ableitungen zweiter Ordnung $\Theta_2\Theta_1\varphi$ und $\Theta_1\Theta_2\varphi$ sind bekanntermaßen einer einzigen äquivalent, mögen aber der Symmetrie wegen beide beibehalten werden (vgl. S. 567).

Die Berechnung der Fundamentalinvariante vierter Ordnung $\Theta_1 g_1 - \Theta_2 g_2$ hat sich auf die Fundamentalgleichungen

$$\Theta_2 n_1 = (n_1 - n_2)\,g_1$$
$$\Theta_1 n_2 = (n_2 - n_1)\,g_2$$

zu stützen. Setzt man neben

$$n_1 + n_2 = H$$

noch

$$(6)\qquad n_1 - n_2 = J,$$

so erhalten sie die Form

$$(7)\qquad \begin{aligned} \Theta_2 J + \Theta_2 H &= 2Jg_1 \\ \Theta_1 J - \Theta_1 H &= 2Jg_2. \end{aligned}$$

Die Werte von g_1 und g_2, hieraus entnommen und in die Fundamentalinvariante eingesetzt, liefern nach Anwendung der Vertauschungsformel

$$\Theta_2\Theta_1\varphi - \Theta_1\Theta_2\varphi = g_1\Theta_1\varphi - g_2\Theta_2\varphi$$

auf J und nochmaliger Benutzung von (7) die Gleichung

$$(8)\qquad \begin{aligned} 2J^2(\Theta_1 g_1 - \Theta_2 g_2) = J(\Theta_2\Theta_1 H + \Theta_1\Theta_2 H - g_1\Theta_1 H - g_2\Theta_2 H) \\ - (\Theta_1 H\,\Theta_2 J + \Theta_2 H\,\Theta_1 J). \end{aligned}$$

Infolge von (4) und (5) geht sie in

$$(9)\qquad \Theta_1 g_1 - \Theta_2 g_2 = -\frac{1}{4J}(J\Delta_c^2 H - \Delta_c(H, J))$$

über, oder nach einer Umformung, wie sie ähnlich erst auf S. 603 wieder vorgekommen ist, in

$$(10)\qquad \Theta_1 g_1 - \Theta_2 g_2 = -\frac{J}{4\sqrt{c}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{c_{22}\frac{\partial H}{\partial u} - c_{12}\frac{\partial H}{\partial v}}{J\sqrt{c}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{c_{11}\frac{\partial H}{\partial v} - c_{12}\frac{\partial H}{\partial u}}{J\sqrt{c}}\right)$$

Benutzt man den Ausdruck (3) der Determinante c und setzt dann $\Theta_1 g_1 - \Theta_2 g_2 = 0$, so erhält man

$$(11)\qquad \frac{\partial}{\partial u}\frac{c_{22}\frac{\partial H}{\partial u} - c_{12}\frac{\partial H}{\partial v}}{T(H^2 - 4K)} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{c_{11}\frac{\partial H}{\partial v} - c_{12}\frac{\partial H}{\partial u}}{T(H^2 - 4K)} = 0$$

als die gesuchte Differentialgleichung der Flächen mit isometrischen Krümmungslinien.

Literatur.

(Die eigenen Arbeiten des Verfassers sind nicht zitiert. Vgl. auch das Vorwort.)

Zu Seite

1. **Monge,** Application de l'analyse à la géométrie [Monge, Appl.], Paris 1807; 5. édition, revue, corrigée et annotée par Liouville, Paris 1850 5

(Der Inhalt des Werkes ist zum großen Teil in den Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie von Monge enthalten, die zuerst 1795, dann wieder 1801 erschienen sind.)

§ XXVII: Sur les développées, les rayons de courbure et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure (1771); zuerst in den Mémoires de mathématique et de physique présentés à l'Académie des Sciences [Mém. prés.] 10, Paris 1785.

Allgemeine Betrachtung der Normalebene: Ausg. v. 1807, p. 343; v. 1850, p. 394.

2. **Bernoulli,** Johann, Opera 4, Lausanne u. Genf 1742, p. 108: Problema. In superficie quacunque curva ducere lineam inter duo puncta brevissimam (1728).

Einführung der Schmiegungsebene (planum osculans) p. 113.

3. **Tinseau,** Solution de quelques problèmes relatifs à la théorie des surfaces courbes, et des courbes à double courbure (1774). (Mém. prés. 9, Paris 1780, p. 593.)

Allgemeine Betrachtung der Schmiegungsebene (plan osculant) p. 606.

4. **de Saint-Venant,** Mémoire sur les lignes courbes non planes (1844). (Journal de l'École Polytechnique, cah. 30 (t. 18), Paris 1845, p. 1.) 6

Bezeichnung Binormale p. 17.

Krümmungsradius, Koordinaten des Krümmungsmittelpunkts: Monge, Abh. unter Nr. 1; Appl. 1807, p. 365, 366; 1850, p. 419, 420 . . . . 6—7

5. **Euler,** Methodus facilis omnia symptomata linearum curvarum non in eodem plano sitarum investigandi. (Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae pro anno 1782, St. Petersburg 1786, p. 19, 37.)

Krümmung p. 25, 26.

6. **Cauchy,** Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie. 2 Bände. Paris 1826, 1828 8

Bezeichnung Hauptnormale (normale principale) Bd. 1, p. 285, 298.

7. **Lancret,** Mémoire sur les courbes à double courbure (1802). (Mémoires présentés à l'Institut, Sciences mathématiques et physiques, 1, Paris 1806, p. 416.) 9

Rektifizierende Ebene (plan rectifiant) p. 420. Zweite Krümmung (seconde flexion) p. 418, ihr analytischer Aus-

Zu Seite

druck p. 434. Die Unterscheidung der ersten und zweiten Krümmung rührt von Fourier her: p. 420. (Von Fourier selbst nicht veröffentlicht.) 12

8. **Pitot,** Quadrature de la moitié d'une courbe des arcs, appellée la compagne de la cycloide. (Histoire de l'Académie des Sciences, avec les mémoires de mathématique et de physique [Hist. de l'Acad.], année 1724, Paris 1726, p. 107.)
Erstes Auftreten der Bezeichnung courbe à double courbure p. 113.

9. **Vallée,** Traité de géométrie descriptive, Paris 1819.
Bezeichnung Torsion p. 270.
Ganze Krümmung, durch Krümmung und Windung dargestellt: Lancret, Abh. Nr. 7, p. 430 . . . . 14—15
Formeln (5), S. 12 (oder (I), S. 16): Euler, Abh. Nr. 5, p. 55 12—16

10. **Frenet,** Sur les courbes à double courbure. Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Toulouse, le 10. juillet 1847. Auszug daraus: Journal de Mathématiques pures et appliquées [Journ. de Math.] 17, Paris 1852, p. 437.
Formeln (II) p. 439, Formeln (III) p. 440.
Koordinaten des Mittelpunktes der Schmiegungskugel: Monge, Abh. unter Nr. 1; Appl. 1807, p. 359; 1850, p. 412 17
Ausdruck von R: de Saint-Venant, Abh. Nr. 4, p. 34 . 18
Definition der allgemeinen Schraubenlinie: Lancret, Abh. Nr. 7, p. 431. $k:k'$ konstant: ebenda 20
Der umgekehrte Satz bei de Saint-Venant, Abh. Nr. 4, p. 26.

11. **Puiseux,** Problème de géométrie. (Journ. de Math. 7, 1842, p. 65.) 21
Nur für die gewöhnliche Schraubenlinie sind k und k' konstant.

12. **Serret,** J. A., Sur quelques formules relatives à la théorie des courbes à double courbure. (Journ. de Math. 16, 1851, p. 193.). . 19—21

13. **Olivier,** Mémoire de géométrie. (Journal de l'École Polytechnique, cah. 24 (t. 15), 1835, p. 61.) 24
Oskulierende Schraubenlinie p. 63.

14. **Lacroix,** Traité du calcul différentiel et du calcul intégral, t. 2; Paris 1798, 2. Ausgabe 1814. 28
Die Verbindungen $\sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2$ usw. (Fundamentalgrößen 1. Ordnung): Ausg. v. 1798, p. 606; v. 1814, p. 629.

15. **Gauß,** Disquisitiones generales circa superficies curvas (1827). (Commentationes Societatis scientiarum Gottingensis recentiores classis mathematicae 6, Göttingen 1828, p. 99. Gauß Werke 4, Göttingen 1873, p. 217.) . . . . 28—41
Bezeichnungen E, F, G: Werke 4, p. 235.

16. **Gauß,** Zur Transformation der Flächen. (Werke 8, Göttingen u. Leipzig 1900, p. 405.)

17. **Gauß.** Neue allgemeine Untersuchungen über die krummen Flächen (1825). (Werke 8, p. 408. Bemerkungen von Stäckel p. 443.)
Die Formeln (15): Gauß Werke 4, p. 248 41

Zu Seite

18. **Beltrami,** Ricerche di analisi applicata alla geometria. (Giornale di Matematiche [Giorn. di Mat.] 2, 1864, p. 267, 297, 331, 355; 3, 1865, p. 15, 33, 82, 228, 311. Opere matematiche di Beltrami 1, Milano 1902, p. 107.) 42
Differentialparameter 1. Ordnung (mit Hinweis auf Lamé), Zwischenparameter: Giorn. di Mat. 2, p. 358.
Gauß Werke 4, p. 225; 8, p. 418 . . . . 50—51

19. **Euler,** Recherches sur la courbure des surfaces. (Histoire de l'Académie des Sciences, année 1760 (t. 16), Berlin 1767, p. 119.) . . . . 59, 65—69, 71—72, 76—80

20. **Minding,** Bemerkung über die Abwickelung krummer Linien von Flächen. (Journal für die reine und angewandte Mathematik [Journ. f. Math.] 6, 1830, p. 159.) 59
Seitenkrümmung: Gauß Werke 8, p. 386; Bemerkungen von Stäckel p. 395.

21. **Bonnet,** Mémoire sur la théorie générale des surfaces. (Journal de l'École Polytechnique, cah. 32 (t. 19), 1848, p. 1.) . . . . 60—61
Bezeichnung courbure géodésique p. 44, seconde courbure géodésique p. 16.

22. **Gergonne,** De la courbure des surfaces courbes. (Annales de Mathématiques pures et appliquées [Ann. de Math.] 21, Nismes 1830/31, p. 217.) . . . . 65—69

23. **Meusnier,** Mémoire sur la courbure des surfaces (1776). (Mém. prés. 10, Paris 1785, p. 477.). . . . . 69—71

24. **Gergonne,** Démonstration des principaux théorèmes de M. Dupin sur la courbure des surfaces. (Ann. de Math. 4, 1813/14, p. 368.) 76—77
Bezeichnung Haupttangenten (tangentes principales) p. 372, Hauptschnitte, Hauptkrümmungsradien p. 375.

25. **Dupin,** Développements de géométrie, Paris 1813 [Dupin, Dév.], p. 209—210, 223 81
Eulerscher Satz: Abh. Nr. 19, p. 142. 84

26. **Hesse,** Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, Leipzig 1869, p. 421—425 . . . . 90—94
Formel (17): Gauß Werke 4, p. 232 92

27. **Borchardt,** Sur la quadrature définie des surfaces courbes. (Journ. de Math. 19, 1854, p. 369.) Vgl. p. 374—375 97
Dupin, Dév. p. 46 . . . . 106—108
Bezeichnung indicatrice ebenda p. 48; vgl. p. 50, 145—146 107

28. **Bedetti,** De plano tangente. (Novi Commentarii Academiae Scientiarum Instituti Bononiensis 5, Bologna 1842, p. 485.) . . 109

29. **Stäckel,** Über das Modell einer Fläche dritter Ordnung, die das Verhalten einer krummen Fläche in der Nähe eines parabolischen Punktes darstellt. (Zeitschrift für Mathematik und Physik [Zeitschr. f. Math.] 51, 1904, p. 96.). . . . . 109—110
Erste Definition konjugierter Tangenten: Dupin, Dév. p. 46—47. Zweite Definition: p. 43—44. . . . . 110—113
Asymptoten der Indikatrix p. 51.
$\varrho + \varrho' = \varrho_1 + \varrho_2$ p. 48 114
Gauß Werke 4, p. 226—227; 8, p. 425. . . . . 114—116

Zu Seite

30. **Rodrigues**, Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces, et sur la transformation d'une classe d'intégrales doubles, qui ont un rapport direct avec les formules de cette théorie. (Correspondance sur l'École Polytechnique 3, no. 2, 1815, p. 162.) . . . . 115, 117—118
Formel (10): Gauß Werke 4, p. 234 118
Gauß Werke 4, p 235—236 . . . . 118—120
Gauß Werke 4, p. 236—238; Werke 8, p. 435—436 . . 121—122

31. **Minding**, Über die Biegung krummer Flächen. (Journ. f. Math. 18, 1838, p. 365.) 122
Die Schraubenfläche und das Katenoid sind aufeinander abwickelbar.

32. **Euler**, Problema. Invenire duas superficies, quarum alteram in alteram transformare liceat, ita ut in utraque singula puncta homologa easdem inter se teneant distantias. (Zwischen 1766 und 1775.) (Opera postuma 1, Petropoli, 1862, p. 494; vgl. die Anmerkung p. 157.) 123
Minding, Abh. Nr. 20, p. 160 127

33. **Beltrami**, Sulla teorica generale dei parametri differenziali (1869). (Memorie della Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna II, 8, 1868, p. 549. Opere 2, 1904, p. 74.). . . . 133
Vgl. p. 559 der Original-Abhandlung.

34. **Christoffel**, Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades. (Journ. f. Math. 70, 1869, p. 46; Christoffel, Gesammelte mathematische Abhandlungen 1, Leipzig und Berlin 1910, p. 352.) . . . . 135—137
Vgl. p. 48—49.

35. **Weingarten**, Über die Theorie der aufeinander abwickelbaren Oberflächen. Separatabdruck aus der Festschrift der Königlich Technischen Hochschule zu Berlin, 1884. Vgl. p. 16 . . . 149—150
Christoffel, Abh. Nr. 34, p. 49. 168
Weingarten, Abh. Nr. 35, p. 20 191

36. **Enneper**, Analytisch-geometrische Untersuchungen. (Zeitschr. f. Math. 9, 1864, p. 96) 197
$t^2 = (n_1 - n)(n - n_2)$ p. 100.
S. 205 (A) in Verbindung mit S. 206 (1): Bonnet, Abh. Nr. 21, p. 54 . . . . 205—206
Gauß Werke 4, p. 235 223

37. **Weingarten**, Über eine Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen. (Journ. f. Math. 59, 1861, p. 382.) . . . . 224—225

38. **Mainardi**, Su la teoria generale delle superficie (1857). (Giornale dell' Istituto Lombardo di scienze, lettere ed arti 9, Milano 1856, p. 385.) 229
Erster Hinweis auf das Bestehen noch zweier Gleichungen zwischen den Fundamentalgrößen, außer der Gaußschen; Material zu ihrer Herstellung.

39. **Bour**, Théorie de la déformation des surfaces. (Journal de l'École Polytechnique, cah. 39 (t. 22), 1862, p. 1.)

Zu Seite

Bezeichnung Fundamentalgleichungen (équations fondamentales) p. 6.

40. **Monge**, Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais. (Hist. de l'Acad., année 1781, Paris 1784, p. 666.) 233
Vgl. p. 685—695.
Monge, Appl. § XV.
Monge, Appl. § XVI . . . . 234—236

41. **Joachimsthal**, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung, Leipzig 1872, p. 98—99 . . . . . 236, 245

42. **Serret**, J. A., Cours de calcul différentiel et intégral, 2. édition . . 237—239
T. 1, Paris 1879, p. 507—509; 2, 1880, p. 400—402.
Hesse, Nr. 26, 22. Vorlesung 240

43. **Aoust**, Analyse infinitésimale des courbes tracées sur une surface quelconque, Paris 1869, p. 132, 175 . . . . 242—244
Serret, Nr. 42, 1, p. 506—507 . . . . 245—248
Rodrigues, Abh. Nr. 30, p. 163 254
Monge, Abh. Nr. 40, p. 692—693. (Umdrehungsflächen.) 255

44. **Bertrand**, Mémoire sur la théorie des surfaces. (Journ. de Math. 9, 1844, p. 133.) 256
Formel (17): p. 134—135, 140. (Die geodätische Windung als solche kommt dort nicht vor.)
Asymptotenkurven (courbes asymptotiques): Dupin, Dév. p. 190.
Bonnet, Abh. Nr. 21, p. 46—47 . . . . 263—264

45. **Gauß**, Allgemeine Auflösung der Aufgabe: die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird (1822). (Astronomische Abhandlungen herausgegeben von H. C. Schumacher, 3. Heft, Altona 1825, p. 1. Gauß Werke 4, p. 189.) . . . . 266—273
Gauß Werke 8, p. 370—384. Bemerkungen von Stäckel p. 385.
Gauß Werke 4, p. 238—239, 242—243; Werke 8, p. 427—428 . . . . 275—282
Bernoulli, Nr. 2, p. 109 278

46. **Joachimsthal**, Observationes de lineis brevissimis et curvis curvaturae in superficiebus secundi gradus (1842). (Journ. f. Math. 26, 1843, p. 155.) . . . . 283—286
Joachimsthalscher Satz p. 158. 286

47. **Jacobi**, Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution. (Journ. f. Math. 19, 1839, p. 309; Jacobis Gesammelte Werke 2, Berlin 1882, p. 57.) . . . 286—287

48. **Jacobi**, Vorlesungen über Dynamik, Berlin 1866, p. 212—214.

49. **Clairaut**, Détermination géométrique de la perpendiculaire à la méridienne tracée par M. Cassini. (Hist. de l'Acad., année 1733, Paris 1735, p. 406.) 288
Clairautscher Satz p. 409—410.

Zu Seite

50. **Liouville**, Sur quelques cas particuliers où les équations du mouvement d'un point matériel peuvent s'intégrer. (Journ. de Math. 11, 1846, p. 345.) . . . . 289—296

51. **Liouville**, De la ligne géodésique sur un ellipsoide quelconque. (Journ. de Math. 9, 1844, p. 401.) . . . . 292—293

52. **Roberts**, M., Sur quelques propriétés des lignes géodésiques et des lignes de courbure de l'ellipsoide. (Journ. de Math. 11, 1846, p. 1.) . . . . 294—295
Gauß Werke 4, p. 239—241, 243—244; Werke 8, p. 437—439 . . . . 296—299, 300—301
Monge, Appl., § VI, XII . . . . 301—304
Lancret, Abh. Nr. 7, p. 420—421 304
Gauß Werke 4, p. 248—250. . . . . 305—307

53. **Weingarten**, Über die Flächen, deren Normalen eine gegebene Fläche berühren (1861). (Journ. f. Math. 62, 1863, p. 61.) Vgl. p. 63.

54. **Gilbert**, Note sur quelques propriétés des lignes tracées sur une surface quelconque. (Bulletins de l'Académie des Sciences de Belgique, 29. année, II, 9, Brüssel 1860, p. 46.) 309
Roberts, Abh. Nr. 52, p. 2—3 . . . . 310—311
Gauß Werke 4, p. 226—227. . . . . 311—312
Gauß Werke 4, p. 244—246; Werke 8, p. 435 . . . . 313—314

55. **Bianchi**, Lezioni di geometria differenziale fatte nella università di Pisa nell' anno 1885—86, Pisa o. J., p. 75—78 . . . . . 314—315
Beltrami, Abh. Nr. 18, Giorn. di Mat. 2, p. 365 319
Beltrami, Abh. Nr. 18, Giorn. di Mat. 2, p. 369 . . . . 321—322

56. **Beltrami**, Sulle proprietà generali delle superficie d'area minima. (Memorie della Accademia delle scienze dell' Istituto di Bologna II, 7, 1868, p. 411; Opere 2, p. 1.) 323, 338
S. 323 (28): p. 443; S. 338 (6), (7): p. 441, 442.

57. **Bonnet**, Note sur la courbure géodésique. (Comptes rendus de l'Académie des Sciences [C. r. de l'Acad.] 42, Paris 1856, p. 1137.) 325

58. **Minding**, Über die Curven des kürzesten Perimeters auf krummen Flächen (1829). (Journal f. Math. 5, 1830, p. 297.) . . . . 325—329

59. **Bonnet**, Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée. (Journal de l'École Polytechnique cah. 41 (t. 24), 1865, p. 209; cah. 42 (t. 25), 1867, p. 1.) . . . . . 329—330
Vgl. cah. 42, p. 132—133.
Beltrami, Abh. Nr. 18, Giorn. di Mat. 3, p. 89—90 . . 331

60. **Joachimsthal**, Demonstrationes theorematum ad superficies curvas spectantium (1845). (Journ. f. Math. 30, 1846, p. 347.) . . 333
Formel (18): Bonnet, Abh. Nr. 21, p. 9. 339

61. **Bianchi**, Vorlesungen über Differentialgeometrie, deutsche Übersetzung, 2. Aufl., Leipzig u. Berlin 1910, § 65, 68 . . . . 341—345

62. **Lelieuvre**, Sur les lignes asymptotiques et leur représentation sphérique. (Bulletin des sciences mathématiques II, 12, Paris 1888, p. 126.) . . . . 344—345
Weingarten, Abh. Nr. 35, p. 42 . . . . 346—347

63. **Hamilton**, Theory of systems of rays (1824). (Transactions of the Irish Academy 15, Science, Dublin 1828, p. 69.)

Zu Seite

Supplement to an Essay on the theory of systems of rays. (Ebenda 16, part I, Science, 1830, p. 1.) . . . . 347—357
Hamiltonscher Satz: p. 54 der zweiten Abhandlung . . 353

64. **Kummer,** Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme (1859) (Journ. f. Math. 57, 1860, p. 189.) 347—357
Monge, Abh. Nr. 40, p. 685—687. 354
Beltrami, Abh. Nr. 18, Giorn. di Mat. 2, p. 281 282, 298—299. 363—364

65. **Pepin,** Sur les surfaces osculatrices. (Journ. de Math. III, 7, 1881, p. 71.) 369

66. **Marbach,** De superficie aliqua, qua cujusque superficiei curvatura definiri potest. Breslau 1844 (Dissertation) . . . . 369—370
Monge, Abh. Nr. 40, p. 690; Appl. 1807, p. 112—120; 1850, p. 133—139 . . . . 373, 379, 382
Weingarten, Abh. Nr. 37 . . . . 379—381, 395—398, 401—404

67. **Halphen,** Théorème concernant les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation. (Bulletin de la Société Mathématique de France 4, Paris 1876, p. 94.) . . 385

68. **Ribaucour,** Note sur les développées des surfaces. (C. r. de l'Acad. 74, 1872, p. 1399.) Vgl. p. 1402 387
Weingarten, Abh. Nr. 53 . . . . 398—401
Minding, Abh. Nr. 31, p. 367 407
Bour, Abh. Nr. 39, p. 78—84 410

69. **Minding,** Wie sich entscheiden läßt, ob zwei gegebene krumme Flächen aufeinander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaße. (Journ. f. Math. 19, 1839, p. 370.) . . . 412—419
Bianchi, Nr. 61, p. 190—191, 196—197. . . . . 417—419

70. **Dini,** Sulla teoria delle superficie. (Giorn. di Mat. 3, 1865, p. 65.). . 419—426

71. **Dini,** Sulle superficie di curvatura costante. (Ebenda p. 241.) . . . 423—424

72. **Darboux,** Leçons sur la théorie générale des surfaces. 4 Bände. Paris 1887—1896. Vgl. Bd. 1, p. 64 . . . . 428—429

73. **Liouville,** Anhang zur 5. Ausgabe von Monge, Appl.; p. 600 . . . 430
Weingarten, Abh. Nr. 37, p. 12—13 . . . . 431—432
Monge, Appl. § XX . . . . 435—441
Enneper, Abh. Nr. 36, p. 102—107.

74. **Weierstraß,** Über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist. (Monatsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1866, p. 612; vgl. Weierstraß Mathematische Werke 3, Berlin 1903, p. 39.)

75. **Scherk,** Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen (1834). (Journ. f. Math. 13, 1835, p. 185.) . . . . 442—443
Vgl. p. 187.

76. **Weingarten,** Eine neue Klasse aufeinander abwickelbarer Flächen. (Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1887, p. 28.) . . . . 443—447

77. **Weingarten,** Sur la théorie des surfaces applicables. (C. r de l'Acad. 112, Paris 1891, p. 607.) . . . . 447—450

78. **Baroni,** Superficie in cui la somma dei raggi principali di curvatura è proporzionale alla distanza di un punto fisso dal piano tangente. (Giorn. di Mat. 28, 1890, p. 349.) 450

Zu Seite

79. **Goursat,** Sur la théorie des surfaces applicables. (C. r. de l'Acad. 112, Paris 1891, p. 707.) 450
Darboux, Nr. 72, 2, 1889, p. 27—30 . . . . 451—453

80. **Liouville,** Sur l'équation aux différences partielles $\frac{\partial^2 \log \lambda}{\partial u \partial v} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0$. (Journ. de Math. 18, 1853, p. 71.) . . . . 453—455

81. **Weingarten,** Sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée. (C. r. de l'Acad. 112, Paris 1891, p. 706.) 455

82. **Weingarten,** Sur une équation aux différences partielles du second ordre. (Ebenda 116, Paris 1893, p. 493.)

83. **Weingarten,** Über die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Funktion des anderen ist (1862). (Journ. f. Math. 62, 1863, p. 160.) . . . . . . 456—461
Weingarten, Abh. Nr. 35, p. 2—6 . . . . 462—466

84. **Fiedler,** Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen, Leipzig 1862, I. Kapitel . . . . 467—472

85. **Koenigs,** Sur les propriétés infinitésimales de l'espace réglé, Paris 1882 (thèse), p. 63 473

86. **Nicolaïdès,** Analectes ou Mémoires et notes sur les diverses parties des mathématiques. 19 livraisons, Athen 1871—1876 . 486—489, 526—528
Vgl. Lieferung 11—14, 1873—1874.

87. **Transon,** Recherches sur la courbure des lignes et des surfaces. (Journ. de Math. 6, 1841, p. 191.) Vgl. p. 198—199. . . . 499
Christoffel, Abh. Nr. 34, p. 56—57 . . . . 514—516

88. **Bertrand,** Note sur la théorie des normales à une même surface. (Journ. de Math. 12, 1847, p. 343.) Formel (15): p. 345 . 527

89. **Rothe,** Zur Theorie der Differential-Invarianten. (Journ. f. Math. 125, 1903, p. 241.) . . . . 529—558
Bezeichnung Fundamentalinvarianten p. 264 546

90. **Casorati,** Ricerca fondamentale per lo studio di una certa classe di proprietà delle superficie curve (1861). (Annali di Matematica 3, 1860, p. 363; 4, 1861, p. 177.) . . . . 529—544

91. **Riemann's** Mathematische Werke, Leipzig 1876, p. 380—382 . . . 534

92. **Ribaucour,** Propriétés de courbes tracées sur les surfaces. (C. r. de l'Acad. 80, 1875, p. 642.) Vgl. p. 643. 563
Bonnet, Abh. Nr. 59. Vgl. cah. 42, p. 43 573

93. **Cifarelli,** Le congruenze. (Annali di Matematica III, 2, 1899, p. 139.) 575—578
Beltrami, Abh. Nr. 18, Giorn. di Mat. 3, p. 234—238. . 579—582
Weingarten, Abh. Nr. 35, p. 9. 583
Liouville, Anhang zur 5. Ausgabe von Monge, Appl.; p. 575 587
Erstes Vorkommen der Radien der Tangentialkrümmung (für die Krümmungslinien): Dupin, Dév. p. 57—58.

94. **v. Mangoldt.** (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. III 3, p. 90.) 591

95. **Beltrami,** Dimostrazione di due formole del Sig^{r}. Bonnet. (Giorn. di Mat. 4, 1866, p. 123. Opere 1, p. 297.) . . . . 592—594

96. **Christoffel,** Über einige allgemeine Eigenschaften der Minimumsflächen. (Journ. f. Math. 67, 1867, p. 218; Ges. Abh. 1, p. 259.) . 601—604
Weingarten, Abh. Nr. 35, p. 22 606

Bezeichnungen.

(Die Seitenzahlen weisen auf ihr erstes Vorkommen hin.)

---

a, b, c Richtungskosinus der Tangente einer Raumkurve 4.

a', b', c' Richtungskosinus der Binormale einer Raumkurve 9.

a'', b'', c'' Richtungskosinus der Hauptnormale einer Raumkurve 8.

a_{ik}, b_{ik}, c_{ik}, $\mathfrak{c}_{ik}$, l_{ik}, ... Koeffizienten quadratischer oder bilinearer Differentialformen 133, 156, ...

a, b, ... Determinanten $|a_{ik}|$, $|b_{ik}|$, ... 133, ...

a_{ik} s. auch E, F, G.

b_{ik} s. auch L, M, N.

α_{ik} die zu dem Element a_{ik} gehörende, durch a dividierte Unterdeterminante von a 133.

A, B, C Richtungskosinus der Tangente einer Flächenkurve 54.

A', B', C' Richtungskosinus der Tangentialnormale einer Flächenkurve 54.

A^0, B^0, C^0 Richtungskosinus von t^0, s. d.

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ... bilineare Formen oder Differentialformen 149, ...

A, B, Λ, ... quadratische Formen oder Differentialformen 45, 46, 64, 152, ...

b s. a.

b positive Richtung der Binormale einer Kurve 9.

b_{40}, b_{31}, ... b_{04} Fundamentalgrößen 4. Ordnung 521.

b_{m0}, $b_{m-1,1}$, ... b_{0m} Fundamentalgrößen m. Ordnung 521.

b_{ikl} bestimmte Verbindungen aus den Größen b_{ik} und ihren ersten Ableitungen 492, 493.

$\mathfrak{b}_{\alpha\beta}$, $\mathfrak{b}_{\alpha\beta\gamma}$ invariante Formen-Koeffizienten 559, 560.

$\mathfrak{B}_3$, $\mathfrak{B}_4$, $\mathfrak{B}_m$ Kovarianten des Formenpaares (A, B) 493, 517, 563.

B_3 kubische Kovariante des Formenpaares (A, B) 563.

c s. a.

c, c' Kurven; c' im allgemeinen die zu einer Flächenkurve c senkrechte 52, 188.

$\mathfrak{c}_{\alpha\beta}$ (vgl. $\mathfrak{b}_{\alpha\beta}$), $\mathfrak{c}_{\alpha\beta\gamma}$, $\mathfrak{m}_{\lambda,\alpha\beta}$ 561.

$\mathfrak{C} = D_a(\mathfrak{A}, \mathsf{B})$, $\Gamma = D_a(\mathsf{A}, \mathsf{B})$ 482, 193.

$\mathfrak{C}_2$ bilineare Differentialform 560.

$\mathfrak{C}_3$ Christoffelsche Kovariante des Formenpaares (A, $\mathfrak{C}_2$) 560.

ds Bogenelement einer Kurve 4.

ds Linienelement einer Fläche 27.

$d\sigma$ Linienelement der Einheitskugel 225.

$d\omega$ Kontingenzwinkel einer Raumkurve 11.

$d\omega'$ Windungswinkel einer Raumkurve 12.

$d\omega''$ Winkel der ganzen Krümmung einer Raumkurve 14.

dS Flächenelement 115.

$d\Sigma$ Flächenelement der Einheitskugel 115.

$D\chi$, $D'\chi$; $D_1\chi$, $D_2\chi$ geometrische Ableitungen 586, 522—523.

$D(u', v')$ oder $D_a(u', v')$ Quotient der Funktionaldeterminante $\frac{\partial(u', v')}{\partial(u, v)}$ und der Größe T 44.

$D_a(\mathsf{A}, \mathsf{B})$ Quotient der Funktionaldeterminante $\frac{\partial(\mathsf{A}, \mathsf{B})}{\partial(\xi, \eta)}$ und der Größe $4T$ 193.

$\Delta = H_a(\mathsf{A}, \mathfrak{M}_0^2)$ 175.

$\Delta^1\varphi$, $\Delta^2\varphi$ Differentialparameter 1. und 2. Ordnung 42, 319.

$\Delta(\varphi, \psi)$ Zwischenparameter 42.

Register.

(Bei häufig gebrauchten Formeln und Begriffen sind meist nur die Seitenzahlen ihres ersten Vorkommens angegeben.)

